MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 2, 1962

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ M-МАТРИЦЫ И МАТРИЦЫ К НЕЙ ОБРАТНОЙ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага

1. Определения и вспомогательные утверждения

Обозначим через Z множество квадратных вещественных матриц, для которых все недиагональные элементы неположительны. Как известно, матрицы из Z, для которых все главные миноры положительны, называются M-матрицами.

Имеют место следующие известные теоремы об M-матрицах:*

(1,1) *Пусть $A \in Z$. Потом равносильны следующие утверждения:*

1° *A является M-матрицей;*

2° *A^{-1} существует и $A^{-1} \geqq 0$ (по элементам);*

3° *существует столбцевой вектор $x > 0$ так, что $Ax > 0$.*

(1,2) *Пусть A является M-матрицей. Если A неразложима,** то $A^{-1} > 0$, и существует одно и только одно собственное значение матрицы A, которому соответствует положительный собственный вектор. Это собственное значение — положительное, простое и все остальные собственные значения по модулю больше его.*

В дальнейшем нам будет нужна следующая вспомогательная теорема:

(1,3) *Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такая система положительных чисел, что $c_n = \max\limits_{j=1,\ldots,n} c_j$ и*

$$c_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j .$$

Тогда существует такое решение системы уравнений

$$x_i^2 - xx_i + c_i(1 - x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x = 0$$

* См. [1] и [2].

** См. [2], стр. 321.

с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$, *для которого* $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $x < 1$.*

Доказательство. Обозначим через $f_1(x)$, $f_2(x)$ функции

$$f_1(x) = (n-2)\,x - \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x^2 - 4c_i(1-x)} + \sqrt{x^2 - 4c_n(1-x)},$$

$$f_2(x) = (n-2)\,x - \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x^2 - 4c_i(1-x)} - \sqrt{x^2 - 4c_n(1-x)}.$$

Пусть x_0 положительный корень уравнения

$$x^2 - 4c_n(1-x) = 0,$$

так что $0 < x_0 < 1$. Покажем, что по крайней мере одно из уравнений $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ имеет корень в интервале $\langle x_0, 1)$. Функция $f_1(x)$ положительна в левой окрестности единицы, так как $f_1(1) = 0$, $f_1'(1) = 4(c_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i) < 0$, и далее, $f_2(1) = -2 < 0$, $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Если $f_1(x_0) \geqq 0$, то $f_2(x) = 0$ имеет корень в $\langle x_0, 1)$, если $f_1(x_0) \leqq 0$, то $f_1(x) = 0$ имеет корень в том же интервале. Обозначим этот конень через ξ. Нетрудно проверить, что значения

$$x_i = \frac{1}{2}[\xi - \sqrt{\xi^2 - 4c_i(1-\xi)}], \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}[\xi - \varepsilon\sqrt{\xi^2 - 4c_n(1-\xi)}], \qquad x = \xi,$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn} f_1(x_0)$, являются решением системы, удовлетворяющим данным условиям.

В заключении настоящего параграфа мы вводим некоторые обозначения: Пусть $A = (a_{ik})$, $i, k \in N = \{1, \ldots, n\}$, некоторая матрица. Если $i \in N$, то через $N(i;\ A)$ обозначим подмножество N, составленное из i и всех элементов $j \in N$ таких, что существует последовательность $k_1, \ldots, k_r$ $(r \geqq 0)$ элементов из N, для которой $a_{ik_1}a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\ldots a_{k_rj} \neq 0$, и одновременно последовательность $l_1, \ldots, l_s (s \geqq 0,\ l_k \in N)$, для которой $a_{jl_1}a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_si} \neq 0$. Если теперь $N(i;\ A) = N$ (для некоторого $i \in N$, и тогда для всех $i \in N$), то матрица A неразложима,** и обратно. Если $N(i;\ A) \neq N$, то $N(i;\ A)$ соответствует множеству строк и столбцов, входящих в эту диагональную клетку нормальной формы*** разложимой матрицы A, которая содержит элемент a_{ii}.

---

* Мы не будем заниматься вопросом об единственности решения, так как нам это в дальнейшем не нужно.

** См. [2], стр. 321.

*** См. [2], стр. 341.

Далее, произведением Адамара $A \bigcirc B$ для матриц $A = (a_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$ и $B = (b_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$, будем называть матрицу

$$A \bigcirc B = (a_{ik}b_{ik}),\ i, k = 1, \ldots, n.$$

Матрицу транспонированную к матрице A будем обозначать через A'.

2. Результаты

В настоящем параграфе доказываются две теоремы об M-матрицах.

(2,1) Теорема. *Пусть* $A = (a_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, n$, *является* M-*матрицей*, $A^{-1} = (\alpha_{ik})$. *Тогда произведение Адамара* $A \bigcirc A'^{-1} = (a_{ik}\alpha_{ki})$ *снова* M-*матрица. При этом, если* A *неразложима, то* $A \bigcirc A'^{-1}$ *неразложима и имеет ту же структуру ненулевых элементов. Если* A *разложима и*

$$(1) \qquad A = \begin{pmatrix} A_1, & 0, & \ldots, 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & A_2, & \ldots, 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, A_g, & 0, & \ldots, & 0 \\ A_{g+1,1}, & A_{g+1,2}, & \ldots, A_{g+1,g}, & A_{g+1}, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1}, & A_{s2}, & \ldots, A_{sg}, & A_{s,g+1}, & \ldots, & A_s \end{pmatrix}$$

— *нормальная форма матрицы* A, *то*

$$(2) \qquad A \bigcirc A'^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 \bigcirc A_1'^{-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & A_2 \bigcirc A_2'^{-1}, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & A_s \bigcirc A_s'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Далее, 1 *является собственным значением матрицы* $A \bigcirc A'^{-1}$ *о наименьшем модуле; его кратность равна числу* s *диагональных клеток в* (1) *и ему соответствует собственный (столбцевой как и строчный) вектор о координатах* 1, 1, …, 1.

Доказательство. Очевидно, что $A \bigcirc A'^{-1} \in Z$, так как $A'^{-1} \geqq 0$ в силу (1,1). Но из соотношений

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ki} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ki} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

следует, что столбцевой и строчный векторы о координатах 1, 1, …, 1 собственны с собственным значением 1. Из 3° в (1,1) следует, что $A \bigcirc A'^{-1}$ является

M-матрицей. Если A неразложима, то в силу (1,2) $A'^{-1} > 0$ и $A \bigcirc A'^{-1}$ имеет нулевые элементы на одинаковых местах как A и, следовательно, неразложима; при этом, 1 является простым собственным значением матрицы $A \bigcirc A'^{-1}$. Если A разложима и если она приведена некоторой перестановкой строк и столбцов к виду (1), то A^{-1} является матрицей того же вида, так что $A \bigcirc A'^{-1}$ имеет вид (2). Остальные утверждения следуют из предыдущих и из того, что A_i являются неразложимыми M-матрицами. Теорема доказана.

(2,2) Теорема. *Пусть* $A = (a_{ik})$, $i, k \in N = \{1, \ldots, n\}$, *$M$-матрица*, $A^{-1} = (\alpha_{ik})$. *Потом имеют место неравенства*

(5) $$a_{ii} > 0, \quad \alpha_{ii} > 0 \; (i \in N),$$

(6) $$a_{ii}\alpha_{ii} - 1 \geqq 0 \; (i \in N),$$

и

(7) $$a_{ii}\alpha_{ii} - 1 \leqq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_{jj}\alpha_{jj} - 1) \qquad (i \in N),$$

Обратно, если для $2n$ чисел a_{ii}, $\alpha_{ii} (i \in N)$ выполнены неравенства (5), (6) *и* (7), *то существует M-матрица (даже симметрическая) A, диагональные элементы которой a_{ii} и диагональные элементы обратной матрицы α_{ii}.*

При этом, в (6) *будет знак равенства тогда и только тогда, если $N(i; A) = \{i\}$. В* (7) *будет знак равенства тогда и только тогда, если имеют место импликации*

(8) $$j, k \in N(i; A),\ i \neq j \neq k \neq i \Rightarrow a_{jk} = 0,$$
$$l \notin N(i; A) \Rightarrow N(l; A) = \{l\}.$$

Доказательство. Так как неравенства (5) следуют из определения M-матрицы, будем доказывать (6) и (7). Но из формул (3) и (4) следует, так как $A^{-1} \geqq 0$,

$$a_{ii}\alpha_{ii} - 1 = -\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} \geqq 0,$$

и

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_{jj}\alpha_{jj} - 1) = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} a_{jk}\alpha_{kj} \geqq -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} a_{ji}\alpha_{ij} = a_{ii}\alpha_{ii} - 1.$$

Обратно, пусть имеют место неравенства (5), (6) и (7) для $2n$ чисел a_{ii}, α_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$c_i = a_{ii}\alpha_{ii} - 1,$$

$$c_i \geqq 0 \quad \text{и} \quad c_i \leqq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_j \qquad (i \in N).$$

Построим M-матрицу A, удовлетворяющую условиям теоремы. Если некоторое $C_k = 0$, то положим $a_{kl} = 0$ и $a_{lk} = 0$ для всех $l \neq k$, $l \in N$, и диагональный элемент будет a_{kk}. Ясно, что потом $\alpha_{kl} = \alpha_{lk} = 0$ для $l \neq k$ и диагональный элемент обратной матрицы будет $a_{kk}^{-1} = \alpha_{kk}$. Таким образом, мы можем ограничиться случаем, когда $c_i > 0$ для всех $i \in N$ и когда

$$c_n = \max_{j \in N} c_j.$$

Рассмотрим отдельно случай равенства

$$c_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j.$$

Положим $A = DBD$, где D — диагональна с диагональными элементами $\sqrt{a_{11}c_1}$, $\sqrt{a_{22}c_2}$, …, $\sqrt{a_{n-1,n-1}c_{n-1}}$, $\sqrt{a_{nn}/1 + c_n}$ и

$$B = \begin{pmatrix} c_1^{-1}, & 0, & \ldots, & 0, & -1 \\ 0, & c_2^{-1}, & \ldots, & 0, & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & c_{n-1}^{-1}, & -1 \\ -1, & -1, & \ldots, & -1, & 1 + c_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что A является M-матрицей, удовлетворяющей условиям теоремы.

Пусть теперь

$$c_n < \sum_{j=1}^{n-1} c_j.$$

Из (1,3) следует существование положительного решения системы

$$x_i^2 - xx_i + c_i(1 - x) = 0, \quad i \in \mathrm{N},$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x = 0,$$

для которого $x < 1$.

Положим $A = D_1(D_2 - J)D_1$, где D_1 – диагональная матрица с диагональными элементами $\sqrt{a_{ii}/(x_i^{-1} - 1)}$, $i \in N$, D_2 — диагональна с диагональными элементами x_i^{-1} и J — матрица, все элементы которой равны единице. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x < 1, \qquad (D_2 - J)^{-1} = D_2^{-1} + \frac{1}{1 - x} D_2^{-1} J D_2^{-1} \geqq 0,$$

то A является M-матрицей, удовлетворяющей условиям теоремы.

Заметим еще, что в обеих случаях матрица A симметрическая.

Остается проверить, когда в (6) и (7) имеет место знак равенства. Из доказательства этих неравенств следует, что в (6) знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$a_{ik}\alpha_{ki} = 0 \quad \text{для всех} \quad k \neq i,$$

т. е., в силу (2) из (2,1), будет-ли $N(i; A) = \{i\}$.

В (7) имеет место знак равенства тогда и только тогда, если все недиагональные элементы матрицы $A \bigcirc A'^{-1}$ находятся в i-том столбце или в i-той строке. Но это будет в силу (2) из (2,1) в том и только в том случае, будут-ли справедливы импликации (8).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ky Fan, *Topological proofs for certain theorems on matrices*, Monatsh. f. Math. 62 (1958, 219—237.

[2] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Москва 1953.

Поступило 17. 1. 1962 г.

Matematický ústav
Československé akademie věd
v Praze

RELATIONS BETWEEN THE DIAGONAL ELEMENTS OF AN M-MATRIX AND ITS INVERSE MATRIX

Miroslav Fiedler

Summary

As usually, an M-matrix is a real square matrix whose off-diagonal elements are non-positive and all principal minors positive. If $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ are square matrices of the same order, $A \bigcirc B = (a_{ik}b_{ik})$ denotes the Hadamard product of A and B. The transpose matrix of A is denoted by A'.

The following two theorems are proved:

If A is an M-matrix, then $A \bigcirc A'^{-1}$ is an M-matrix as well.

If a_{ii}, α_{ii} resp. $(i = 1, \ldots, n)$ are diagonal elements of an M-matrix A and of A^{-1} resp., then

$$a_{ii} > 0,\ \alpha_{ii} > 0,\ a_{ii}\alpha_{ii} - 1 \geqq 0,\ a_{ii}\alpha_{ii} - 1 \leqq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{jj}\alpha_{jj} - 1)$$

for $i = 1, \ldots, n$. Conversely, if $2n$ numbers a_{ii}, α_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ fulfil these inequalities, then there exists an M-matrix A (even symmetric) whose diagonal elements are a_{ii} while α_{ii} are diagonal elements of A^{-1}.

In the first theorem, the combinatorial structure of non-zero elements in $A \bigcirc A'^{-1}$ is determined by means of the structure of A. In the second theorem, the cases are completely discussed when equality is attained in some of the described inequalities.