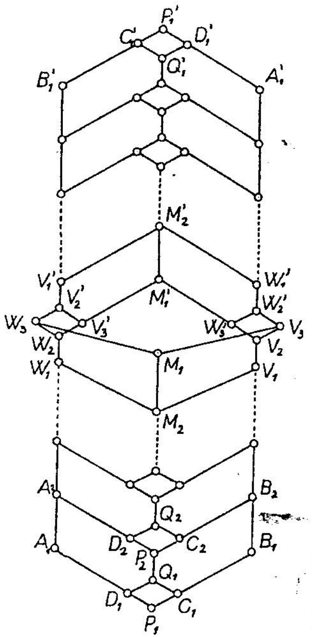
KONGRUENCIE NA VOĽNOM SVÄZE $FL\,(2+2)$

KATARÍNA MOLNÁROVÁ, Košice

Pojem voľného súčinu sväzov vyšetroval Sorkin v práci [2]. Nech sväz $S = FL(2+2)$ je voľný súčin dvoch reťazcov, z ktorých každý obsahuje dva prvky. Sväz S bol opísaný v práci [3]; jeho diagram je na obr. 1. Cieľom nasledujúcej úvahy je získať prehľad o množine všetkých kongruencií na sväze $FL(2+2)$. Výsledky chceme použiť v ďalšej práci na vyšetrovanie určitých identít na sväzoch. V § 1 odvodíme pomocné vety o kongruenciách na obecných sväzoch. V § 2 sú opísané – v istom zmysle explicitne – určité („minimálne") kongruencie na sväze S. V § 3 sa dokazuje, že každá kongruencia na sväze S je zjednotením niektorých „minimálnych" kongruencií.



Obr. 1.

§ 1

V tomto paragrafe znak S označuje ľubovoľný sväz, $a, b, x, y, \ldots$ sú prvky sväzu S (čiastočné usporiadanie a sväzové operácie v S označujeme $\leqq$, $\cap$, $\cup$; neporovnateľnosť prvkov x, y označujeme symbolom $x \mid y$. Pripomeňme najprv niektoré známe názvy a označenia, ktoré ďalej používame (väčšina z nich je uvedená v [1]).

Nech $a \leqq b$. Množinu všetkých prvkov $x \in S$, vyhovujúcich nerovnosti $a \leqq x \leqq b$, budeme nazývať intervalom a označovať $\langle a, b\rangle$. Interval $\langle a, b\rangle$ nazývame prvointervalom, ak obsahuje len prvky $a, b, a \neq b$. Intervaly $\langle x, y\rangle$, $\langle u, v\rangle$ sú transponované, ak platí alebo $y \cap u = x$, $y \cup u = v$, alebo $x \cap v = u$, $x \cup v = y$. Uvedený vzťah budeme označovať $\langle x, y\rangle\, T \langle u, v\rangle$. Intervaly i, i' sú projektívne, ak existujú intervaly $i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = i'$ také, že intervaly i_{k-1}, i_k sú transponované. Interval i je slabo projektívny s intervalom i', ak existujú intervaly $i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = i'$ také, že interval i_k je obsiahnutý v istom intervale i_k', transponovanom k intervalu i_{k-1} $(k = 1, \ldots, n)$. Uvedený vzťah budeme označovať $iSPi'$.

Binárna reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia R na S je reláciou kongruentnosti (kongruenciou) na S, ak pre ľubovoľné $x, y, c \in S$ platí:

ak $x \equiv y(R)$, potom $x \cup c \equiv y \cup c(R)$, $x \cap c \equiv y \cap c(R)$. Budeme hovoriť, že interval $\langle a, b\rangle$ sa anuluje pri danej kongruencii R, ak $a \equiv b(R)$. Nech R_1, R_2 sú kongruencie na S. Ak zo vzťahu $x \equiv y(R_1)$ $(x, y \in S)$ vyplýva $x \equiv y(R_2)$, potom budeme hovoriť, že kongruencia R_1 je menšia alebo rovná kongruencii R_2. Túto skutočnosť budeme zapisovať $R_1 \leqq R_2$. Nech M je množina intervalov vo sväze S. Znakom $R(M)$ označujeme najmenšiu z kongruencií na S, v ktorej sa anulujú všetky intervaly množiny M. Ak M obsahuje jediný interval v, píšeme $R(v)$ namiesto $R(\{v\})$.

Z predošlých definícií možno odvodiť jednoduchým postupom nasledujúce vety:

1.1. Veta. *Ak interval $\langle x, y\rangle$ SP $\langle u, v\rangle$, potom pre každú reláciu kongruentnosti R na S platí:*

ak $x \equiv y(R)$, potom $u \equiv v(R)$.

1.1.1. Veta. *Nech i, i' sú prvointervaly v S. Ak $i\,T\,i'$, potom $R(i) = R(i')$.*

1.1.2. Veta. *Nech R je ľubovoľná kongruencia na S. Potom $x \equiv y(R)$ vtedy a len vtedy ak $x \cap y \equiv x \cup y(R)$.*

1.2. Definícia. *Nech S je sväz, nech interval $I = \langle a, b\rangle \subset S$. Hovoríme, že interval I sa dá zložiť z intervalov $I_1, \ldots, I_n$, ak $I_i = \langle a_{i-1}, a_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $a_0 = a$, $a_n = b$.*

Nech M je množina intervalov sväzu S. Hovoríme, že sa interval $i = \langle c, d\rangle$ sväzu S dá složiť z intervalov množiny M, keď alebo a) $c = d$, alebo b) $c \neq d$ a existujú intervaly $i_1, \ldots, i_n \in M$ také, že i sa dá zložiť z intervalov $i_1, \ldots, i_n$.

Uvažujme o nasledujúcich podmienkach:

(V_1) *Ak $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, $c \in \langle a, b\rangle$, potom intervaly $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$ sa dajú zložiť z intervalov množiny M.*

(V_2) *Ak $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, $c > a$, $c \mid b$, potom interval $\langle c, c \cup b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Duálne k tejto podmienke:*

(V_3) *Ak $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, $c < b$, $c \mid a$, potom $\langle a \cap c, c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M.*

Poznámka. Podmienka (V_1) je zrejme ekvivalentná s podmienkou:

$(\bar{V}_1)$ Ak $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, potom $\langle c, d\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. V ďalšom bez odvolania sa na poznámku budeme niekde nahrádzať podmienku (V_1) podmienkou $(\bar{V}_1)$.

1.2.1. *Nech M je množina intervalov, splňujúca podmienky (V_1), (V_2), (V_3). Potom M spĺňa nasledujúcu podmienku:*

(V) *Ak $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, a ak c je ľubovoľný prvok sväzu S, potom intervaly $I_1 = \langle a \cup c, b \cup c\rangle$, $I_2 = \langle a \cap c, b \cap c\rangle$ sa dajú zložiť z intervalov množiny M:*

Dôkaz. Dokazujeme tvrdenie pre interval I_1; tvrdenie pre I_2 sa dokáže duálne.

a) Nech $c \leqq a$. Potom $a \cup c = a$, $b \cup c = b$; naše tvrdenie je už zrejmé.

b) Nech $c > a$. Ak $c \geqq b$, potom $c = a \cup c = b \cup c$. Tvrdenie pre interval $\langle c, c\rangle$ je triviálne. Ak $c < b$, potom $a \cup c = c$, $b \cup c = b$, interval $\langle c, b\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Z toho a z podmienky $(\bar{V}_1)$ vyplýva, že interval $\langle c, b\rangle = \langle a \cup c, b \cup c\rangle$ sa dá složiť z intervalov množiny M. Ak $c \mid b$, dokazované tvrdenie vyplýva z podmienky (V_2).

c) Nech $c \mid a$. Označme $a \cup c = c_1$; potom $c_1 > a$, $a \cup c = a \cup c_1$, $b \cup c = b \cup c_1$ a tvrdenie platí podľa b).

1.2.2. *Nech M je množina intervalov sväzu S. Definujme na S reláciu $\mathscr{R}(M)$ takto: $a\mathscr{R}(M)b$ vtedy a len vtedy, keď interval $\langle a \cap b, a \cup b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M.*

1.2.3. Veta. *Nech M je množina intervalov, spĺňajúca podmienky (V_1), (V). Potom relácia $\mathscr{R}(M)$ je reláciou kongruentnosti na S.*

Dôkaz. a) Reflektívnosť a symetričnosť relácie $\mathscr{R}(M)$ vyplýva bezprostredne z jej definície. Nech $a\mathscr{R}(M)b$, $b\mathscr{R}(M)c$. Potom intervaly $\langle a \cap b, a \cup b\rangle$, $\langle b \cap c, b \cup c\rangle$ sa dajú zložiť z intervalov množiny M. Označme $a \cap b \cap c = p$, $a \cup b \cup c = q$. Nech $c_1 = b \cap c$. Keďže $(a \cap b) \cap c_1 = p$, $(a \cup b) \cap c_1 = c_1$, z podmienky (V) vyplýva, že aj interval $\langle p, b \cap c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Duálnym postupom sa dokáže analogické tvrdenie pre interval $\langle b \cup c, q\rangle$. Interval $\langle p, q\rangle$ sa dá zložiť z intervalov $\langle p, b \cap c\rangle$, $\langle b \cap c, b \cup c\rangle$, $\langle b \cup c, q\rangle$, teda aj z intervalov množiny M. Zrejme je $p \leqq a \cap c \leqq a \cup c \leqq q$. Z toho a z podmienky $(\bar{V}_1)$ dostávame, že $\langle a \cap c, a \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M, teda $a\mathscr{R}(M)c$.

b) Nech $a\mathscr{R}(M)b$, nech c je ľubovoľný prvok sväzu S. Utvorme $u = a \cap b$, $v = a \cup b$. Z definície relácie $\mathscr{R}(M)$ vyplýva, že interval $\langle u, v\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Potom podľa podmienky (V) aj interval $\langle u \cup c, v \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Ďalej platí $u \cup c \leqq (a \cup c) \cap (b \cup c) \leqq (a \cup c) \cup (b \cup c) \leqq v \cup c$. Z podmienky $(\bar{V}_1)$ teda vyplýva, že $a \cup c\mathscr{R}(M)b \cup c$. Tvrdenie pre prienik sa dokáže duálne.

Nech M je množina intervalov sväzu S. Zaveďme nasledujúce podmienky:

(V_1') *Ak $\langle a, b\rangle \in M$, $x \in \langle a, b\rangle$, potom intervaly $\langle a, x\rangle$, $\langle x, b\rangle$ sa dajú zložiť z intervalov množiny M.*

(V_2') *Ak $\langle a, b\rangle \in M$, $c > a$, $c \mid b$, potom interval $\langle c, b \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M.*

(V_3') *Ak $\langle a, b\rangle \in M$, $c < b$, $c \mid a$, potom $\langle a \cap c, c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M.*

1.2.4. *Nech M je množina intervalov, splňujúca podmienky (V_1'), (V_2'), (V_3'). Potom M spĺňa podmienky (V_1), (V_2), (V_3).*

Dôkaz. a) Nech interval $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Nech $a \leqq c \leqq b$. Dokážeme, že interval $\langle c, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Ak $a = b$, je tvrdenie triviálne. Nech sa interval $\langle a, b\rangle$ dá zložiť z intervalov

$I_1, \ldots, I_n$, $I_i = \langle a_{i-1}, a_i\rangle \in M$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na číslo n. Ak $n = 1$, tvrdenie vyplýva z podmienky (V_1'). Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n - 1$. Nech $c \in \langle a, b\rangle$. Ak $c \geqq a_1$, t. j. $c \in \langle a_1, b\rangle$, vtedy tvrdenie vyplýva z indukčného predpokladu. Ak $c < a_1$, potom $c \in \langle a, a_1\rangle$ a podľa podmienky (V_1') interval $\langle c, a_1\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Zrejme potom aj $\langle c, b\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Ak $c \mid a_1$, potom podľa (V_2') interval $\langle c, c_1\rangle$, kde $c_1 = a_1 \cup c$, sa dá zložiť z intervalov množiny M. Prvok $c_1 \leqq b$, teda $c_1 \in \langle a_1, b\rangle$. Interval $\langle c_1, b\rangle$ (na základe indukčného predpokladu), a potom aj interval $\langle c, b\rangle$, sa dajú zložiť z intervalov množiny M. Tvrdenie pre interval $\langle a, c\rangle$ sa dokáže duálne.

b) Splnenie podmienky (V_2) dokážeme opäť indukciou. Prvý krok (ak $\langle a, b\rangle \in M$) je zrejmý z (V_2'). Predpokladajme, že podmienka (V_2) je splnená pre intervaly, ktoré sa dajú zložiť z m intervalov množiny M, $1 \leqq m \leqq n - 1$. Nech $\langle a, b\rangle$ sa dá zložiť z n intervalov množiny M, $c > a$, $c \mid b$. Zrejme alebo $a_1 < c$, alebo $a_1 \mid c$. Ak $a_1 < c$, tvrdenie je jasné z indukčného predpokladu. Ak $a_1 \mid c$, potom z podmienky (V_2') dostávame, že $\langle c, a_1 \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Uvažujme interval $\langle a_1, b\rangle$ a prvok $a_1 \cup c = c_1$. Keďže $b \mid c$, musí byť alebo $b \mid c_1$, alebo $b < c_1$. Platí $b \cup c_1 = b \cup (a_1 \cup c) = (b \cup a_1) \cup c = b \cup c$. Ak $c_1 \mid b$, z indukčného predpokladu vyplýva, že interval $\langle c_1, b \cup c_1\rangle = \langle c_1, b \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Ak $c_1 > b$, potom $c_1 = b \cup c_1 = b \cup c$. V oboch prípadoch $\langle c, b \cup c\rangle$ sa dá zložiť z intervalov množiny M. Splnenie podmienky (V_3) sa dokáže duálne.

1.2.5. Veta. *Nech S je ľubovoľný sväz, nech M je množina intervalov sväzu S spĺňajúca podmienky (V_1'), (V_2'), (V_3'). Potom relácia $\mathscr{R}(M)$ je kongruencia na S.*

Dôkaz vyplýva z 1.2.4, 1.2.1 a vety 1.2.3.

V nasledujúcej vete predpokladáme, že A je ľubovoľná (ale pevne vybraná) množina intervalov sväzu S. Nech $v \in A$. Nech $A(v)$ je množina tých intervalov z množiny A, ktoré sa anulujú v minimálnej kongruencii $R(v)$. V nasledujúcich úvahách použijeme vetu, ktorá určitým spôsobom popisuje množinu $A(v)$.

1.3. Veta. *Nech v je (pevne vybraný) interval sväzu S. Nech $B \subset A$ je množina intervalov sväzu S, pre ktorý platí*

(a) $\begin{cases} v \in B, \\ u \in B \Rightarrow vSPu, \end{cases}$

(b) B spĺňa podmienky (V_2'), (V_3'),

(c) B spĺňa podmienku (V_1'),

(d) ak sa interval $u \in A$ dá zložiť z intervalov množiny B, potom $u \in B$.

Potom je

a) $R(v) = \mathscr{R}(B)$,

b) $B = A(v)$.

Dôkaz. a) Zrejme $R(v) \leqq \mathscr{R}(B)$. Nech $x\mathscr{R}(B)y$. Potom $\langle x \cap y, x \cup y\rangle$ sa dá zložiť z intervalov $I_1, \ldots, I_n$, kde $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \in B$ $(i = 1, \ldots, n)$, teda podľa (a)

$vSP\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Z vety 1.1 vyplýva $x \cap y\ R(v)\ x \cup y$. Z toho na základe vety 1.1.2. dostávame $xR(v)\ y$.

b) Z podmienky (a) a vety 1.1 vyplýva, že $B \subset A(v)$. Nech $u \in A(v) \subset A$. Potom z rovnosti $R(v) = \mathscr{R}(B)$ vyplýva, že u sa anuluje aj v kongruencii $\mathscr{R}(B)$, teda u sa dá zložiť z intervalov množiny B. Podľa podmienky (d) je $u \in B$.

Poznámka 1. Z predošlej vety vyplýva: ak je daný interval v a množina A, potom je množina $B \subset A$, splňujúca podmienky (a), (b), (c), (d), jednoznačne určená.

Poznámka 2. Nech A je množina intervalov sväzu S. Nech sa každý interval sväzu S dá zložiť z intervalov množiny A. Nech R je kongruencia na S, nech $A(R)$ je množina všetkých intervalov patriacich do A, ktoré sa anulujú v kongruencii R. Zrejme je kongruencia R jednoznačne určená množinou $A(R)$.

§ 2

Symbol $S = FL(2 + 2)$ značí voľný súčin dvoch reťazcov, z ktorých každý obsahuje 2 prvky. V [3] bolo dokázané, že diagram sväzu S má tvar ako na obr. 1 (označenie je oproti práci [3] čiastočne pozmenené). Nech A je množina nasledujúcich intervalov sväzu S (index i prebieha množinu všetkých prirodzených čísel):

$\langle Q_i, P_{i+1}\rangle = p_i$,		
$\langle P_i, C_i\rangle = a_{1,i}$,	$\langle D_i, Q_i\rangle = a_{2,i}$,	$\langle A_i, A_{i+1}\rangle = a_{3,i}$,
$\langle P_i, D_i\rangle = b_{1,i}$,	$\langle C_i, Q_i\rangle = b_{2,i}$,	$\langle B_i, B_{i+1}\rangle = b_{3,i}$,
$\langle D_i, A_i\rangle = c_i$,	$\langle M_2, W_1\rangle = c_{L,2}$,	$\langle M_1, W_3\rangle = c_{L,1}$,
$\langle C_i, B_i\rangle = d_i$,	$\langle M_2, V_1\rangle = d_{L,2}$,	$\langle M_1, V_3\rangle = d_{L,1}$,
$\langle V_1, V_2\rangle = r_1$,	$\langle W_2', W_1'\rangle = r_2$,	
$\langle V_2, W_3'\rangle = m_1$,	$\langle V_3, W_2'\rangle = m_2$,	
$\langle M_2, M_1\rangle = h_1$,	$\langle V_2, V_3\rangle = h_2$,	$\langle W_3', W_2'\rangle = h_3$,
$\langle A_i W_1\rangle = x_{1,i}$,	$\langle D_i, M_2\rangle = x_{2,i}$,	
$\langle B_i, V_1\rangle = y_{1,i}$,	$\langle C_i, M_2\rangle = y_{2,i}$	

a duálne:

$$\langle P_{i+1}', Q_i'\rangle = p_i',^*$$
$$\langle V_1', B_i'\rangle = y_{1,i}', \qquad \langle M_2', C_i'\rangle = y_{2,i}'.$$

Intervaly množiny A, ktoré nie sú prvointervalmi, nazývame limitnými intervalmi. Zrejme každý interval sväzu S sa dá zložiť z intervalov množiny A.

V odeskoch tohto paragrafu volíme za v jednotlivé intervaly množiny A a chceme k nim nájsť príslušnú minimálnu kongruenciu $R(v)$. K tomu stačí určiť množinu $A(v)$, teda množinu tých intervalov z množiny A, ktoré sa anulujú v kongruencii $R(v)$.

---

* Ak $x = \langle E, F\rangle \in A$, potom duálnym intervalom ku x rozumieme interval $x' = \langle F', E'\rangle \in A$.

Vo všetkých odsekoch postupujeme tým spôsobom, že udáme množinu B a preverujeme, či sú splnené podminky (a), (b), (c), (d) z vety 1.3. Ak množina B obsahuje len prvointervaly, potom je pre B zrejme splnená podmienka (c). Na vyšetrenie toho, či je splnená podmienka (d) z vety 1.3, stačí sa obmedziť na limitné intervaly $u \in A$ zložené z intervalov množiny B, pretože ak $u \in A$, je prvointerval zložený z intervalov množiny B, potom zrejme $u \in B$. Ak má byť limitný interval u zložený z intervalov množiny B, musí množina B obsahovať aspoň jeden limitný interval. Kvôli zjednodušeniu pre $v = \langle X, Y\rangle$ zaveďme ešte označenia:

$$X(v) = \{C : C \in S, C > X, C \mid Y\},$$
$$X'(v) = \{C : C \in S, C < Y, C \mid X\},$$

nech ďalej $Y(v)$ značí množinu tých intervalov $t \in A$, pre ktoré platí $t \subset \langle C, C \cup Y\rangle$ alebo $t \subset \langle C' \cap X, C'\rangle$, kde $C \in X(v)$, $C' \in X'(v)$; $SP(v)$ značí množinu tých intervalov z množiny A, ktoré sú slabo projektívne k intervalu v.

Pre danú množinu B, pre ktorú bude vždy platiť $v \in B \subset A$, máme teda preveriť, či pre každé $u \in B$ platia vzťahy

(a_1) $u \in SP(v)$,

(b_1) $Y(u) \subset B$.

Ak B obsahuje aspoň jeden limitný interval, preveríme tiež podmienky (c) a (d) z vety 1.3.

2.1. *Nech $v = p_i$. Nech B je jednoprvková množina $\{p_i\}$. Potom $B = A(p_i)$.*

Dôkaz. Podmienka (a_1) je zrejme splnená. Ľahko sa preverí, že množiny $X(p_i)$, $X'(p_i)$ sú prázdne, takže

(2.1.1.) $Y(p_i) = \emptyset$,

teda $Y(p_i) \subset B$.

2.1.1. Duálne sa dokáže $A(p_i') = \{p_i'\}$.

2.2. Nech $v = a_{1,i}$. Platí (2.2.1.) $a_{1,i}Ta_{2,i}Ta_{3,i}$; z toho na základe vety 1.1.1 vyplýva $A(a_{1,i}) = A(a_{2,i}) = A(a_{3,i})$. Označme túto množinu $A(a_i)$.

2.2.1. *Nech $B = \{a_{k,i+2t}, b_{k,i+2t+1}, p_{i+2t}, p_{i+2t+1}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. Potom $B = A(a_i)$.*

Dôkaz. a) Nech $u \in B$. Máme dokázať tvrdenie: $u \in SP(a_{1,i})$. Postupujeme indukciou vzhľadom na číslo t, vystupujúce v „indexe" prvku u. Zo vzťahu (2.2.1) vyplýva $a_{k,i} \in SP(a_{1,i})$ $(k = 1, 2, 3)$. Intervaly $p_i, b_{1,i+1}$ sú podmnožinami intervalu $\langle D_i, D_{i+1}\rangle\ Ta_{3,i}$, takže $p_i, b_{1,i+1} \in SP(a_{1,i})$. Ďalej platí $b_{1,i+1}Tb_{2,i+1}Tb_{3,i+1}$, teda aj $b_{k,i+1} \in SP(a_{1,i})$ $(k = 2, 3)$. Intervaly $p_{i+1}, a_{1,i+2}$ sú podmnožinami intervalu $\langle C_{i+1}, C_{i+2}\rangle\ Tb_{3,i+1}$, preto tiež patria do $SP(a_{1,i})$. Tým je tvrdenie pre $t = 0$ dokázané. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre t. Potom $b_{3,i+2t+1} \in SP(a_{1,i})$. Interval $b_{3,i+2t+1}$ T $\langle C_{i+2t+1}, C_{i+2(t+1)}\rangle$. Z toho vyplýva $a_{1,i+2(t+1)} \in SP(a_{1,i})$. Ďalej pri dokazovaní tvrdenia pre $t + 1$ postupujeme analogickým spôsobom ako pri prvom kroku.

b) Nech $u = a_{1,j} = \langle P_j, C_j \rangle$ $(j = i + 2t, t = 0, 1, 2, \ldots)$. Potom $X(a_{1,j}) = \{D_j, A_j\}$. Platí $D_j \cup C_j = Q_j$, $\langle D_j, Q_j \rangle = a_{2,j}$, $A_j \cup C_j = A_{j+1}$, $\langle A_j, A_{j+1} \rangle = a_{3,j}$. Množina $X'(a_{1,j})$ je prázdna. Teda

$$Y(a_{1,j}) = \{a_{2,j}, a_{3,j}\}. \tag{2.2.2}$$

Nech $u = a_{2,j} = \langle D_j, Q_j \rangle$ $(j = i + 2t, t = 0, 1, 2, \ldots)$. Platí $X(a_{2,j}) = \{A_j\}$, $A_j \cup Q_j = A_{j+1}$, $\langle A_j, A_{j+1} \rangle = a_{3,j}$. Ďalej je $X'(a_{2,j}) = \{C_j\}$, pričom $C_j \cap D_j = P_j$, $\langle P_j, C_j \rangle = a_{1,j}$. Potom

$$Y(a_{2,j}) = \{a_{1,j}, a_{3,j}\}. \tag{2.23}$$

Nech $u = a_{3,j} = \langle A_j, A_{j+1} \rangle$ $(j = i + 2t,\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. Potom $X(a_{3,j}) = \emptyset$, $X'(a_{3,j}) = \{D_{j+1}, P_{j+1}, Q_j, C_j\}$. Ak $C' \in \{D_{j+1}, P_{j+1}, Q_j\}$, potom $C' \cap A_j = D_j$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle D_j, C' \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{a_{2,j}, p_j, b_{1,j+1}\}$. Ďalej platí $C_j \cap A_j = P_j$, $\langle P_j, C_j \rangle = a_{1,j}$. Teda

$$Y(a_{3,j}) = \{a_{1,j}, a_{2,j}, p_j, b_{1,j+1}\}. \tag{2.2.4}$$

Nech $u = b_{k,j}$ $(j = i + 2t + 1;\ t = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, 3)$. Analogicky ako pre $a_{k,j}$ sa dokáže

$$\begin{aligned} Y(b_{1,j}) &= \{b_{2,j}, b_{3,j}\}, \\ Y(b_{2,j}) &= \{b_{1,j}, b_{3,j}\}, \\ Y(b_{3,j}) &= \{b_{1,j}, b_{2,j}, p_j, a_{1,j+1}\}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Nech $u = p_j$ $(j = i + t,\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. Podľa (2.1.1) $Y(p_j) = \emptyset$. Z toho a z (2.2.2)–(2.2.5) sme dostali, že pre $u \in B$ je $Y(u) \subset B$.

2.2.2. Duálne pre $v = a'_{1,i}$ platí

$A(a'_i) = \{a'_{k,i+2t}, b'_{k,i+2t+1}, p'_{i+t}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$, (používame označenie $A(a'_i) = A(a'_{k,i})$, $k = 1, 2, 3$).

2.3. Nech $v = b_{1,i}$. Platí

$$b_{1,i} T b_{2,i} T b_{3,i}, \tag{2.3.1}$$

teda $A(b_{1,i}) = A(b_{2,i}) = A(b_{3,i})$. Označme túto množinu $A(b_i)$.

2.3.1. *Nech* $B = \{b_{k,i+2t}, a_{k,i+2t+1}, p_{i+t}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. *Potom* $B = A(b_i)$.

Dôkaz je analogický ako v 2.2.1. Taktiež duálne platí:

2.3.2. Ak $v = b'_{1,i}$, potom

$A(b'_i) = \{b'_{k,i+2t}, a'_{k,i+2t+1}, p'_{i+t}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$, [používame označenie $A(b'_i) = A(b'_{k,i})$, $k = 1, 2, 3$].

2.4. Nech $v = x_{1,i}$. Platí

$$x_{1,i} T x_{2,i}, \tag{2.4.1}$$

teda $A(x_{1,i}) = A(x_{2,i})$. Označme túto množinu $A(x_i)$.

2.4.1. *Nech* $B = \{x_{l,i+t}, y_{l,i+t+1}, a_{k,i+t}, b_{k,i+t+1}, p_{i+t}\}$ $(l = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. *Potom* $B = A(x_i)$.

Dôkaz. a) Zrejme $x_{l,i} \in SP(x_{1,i})$ $(l = 1, 2)$. Intervaly $x_{1,i+t}$, $a_{3,i+t}$ sú podmnožinami intervalu $x_{1,i}$, takže patria do $SP(x_{1,i})$. Intervaly $x_{2,i+t}$, p_{i+t}, $a_{2,i+}$, $a_{1,i+t+1}$, $b_{l,i+t+1}$, $y_{2,i+t+1}$ patria do $SP(x_{1,i})$, pretože sú podmnožinami intervalu $x_{2,i}$. Keďže $a_{2,i} \in SP(x_{1,i})$, potom podľa (2.2.1) $a_{1,i} \in SP(x_{1,i})$. Ďalej platí $y_{2,i+t} T y_{1,i+t}$, intervaly $y_{1,i+t+1}$, $b_{3,i+t+1}$ sú podmnožinami $y_{1,i+1}$, teda tiež patria do $SP(x_{1,i})$.

b) Nech $u = x_{1,j} = \langle A_j, W_1 \rangle$ $(j \geqq i)$. Potom $X(x_{1,j}) = \Phi$, $X'(x_{1,j}) = \{C_{j+t}, Q_{j+t}, P_{j+t+1}, D_{j+t+1}, M_2\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$. Nech $C' \in \{Q_{j+t}, P_{j+t+1}, D_{j+t+1}, C_{j+t+1}, M_2\}$. Potom $C' \cap A_j = D_j$. Ľahko sa presvedčíme, že každý interval $t \in A$, $t \subset \langle D_j, C' \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{a_{2,j+t}, p_{j+t}, a_{1,j+t+1}, b_{l,j+t+1}, x_{2,j+t}, y_{2,j+t+1}\}$ $(l = 1, 2;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. Pre prvok C_j platí $C_j \cap A_j = P_j$, $\langle P_j, C_j \rangle = a_{1,j}$. Úhrnom sme dostali

$$Y(x_{1,j}) = \{a_{k,j+t}, b_{l,j+t+1}, p_{j+t}, x_{2,j+t}, y_{2,j+t+1}\} \quad (l = 1, 2), \tag{2.4.2}$$

teda $Y(x_{1,j}) \subset B$. Nech $u = x_{2,j} = \langle D_j, M_2 \rangle$. Potom $X(x_{2,j}) = \{A_{j+t}, B_{j+t+1}\}$. Platí $A_{j+t} \cup M_2 = W_1$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle A_{j+t}, W_1 \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{x_{1,j+t}, a_{3,j+t}\}$; $B_{j+t+1} \cup M_2 = V_1$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle B_{j+t+1}, V_1 \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{y_{1,j+t+1}, b_{3,j+t+1}\}$. Platí $X'(x_{2,j}) = \{C_j\}$; $C_j \cap D_j = P_j$, $\langle P_j, C_j \rangle = a_{1,j}$. Teda

$$Y(x_{2,j}) = \{x_{1,j+t}, a_{3,j+t}, y_{1,j+t+1}, b_{3,j+t+1}, a_{1,j}\}. \tag{2.4.3}$$

Zrejme $Y(x_{2,j}) \subset B$.

Nech $u = y_{l,j}$ $(l = 1, 2;\ j \geqq i + 1)$. Analogicky ako pre $u = x_{l,j}$ by sme dostali

$$\begin{aligned} Y(y_{1,j}) &= \{b_{l,j+t}, a_{l,j+t+1}, p_{j+t}, y_{2,j+t}, x_{2,j+t+1}\}, \\ Y(y_{2,j}) &= \{y_{1,j+t}, b_{3,j+t}, x_{1,j+t+1}, a_{3,j+t+1}, b_{1,j}\}, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

teda $Y(y_{l,j}) \subset B$ $(l = 1, 2)$. Nech $u \in \{p_j, a_{k,j}, b_{k,j+1}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ j \geqq i)$. Zo vzťahov (2.1.1), (2.2.2)–(2.2.5) zisťujeme, že $Y(u) \subset B$.

c) Nech interval $u \in B$ je limitný, t. j. $u \in \{x_{l,i+t}, y_{l,i+t+1}\}$ $(l = 1, 2;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. Bezprostrednou previerkou ľahko zistíme, že ľubovoľný interval, ktorý je podmnožinou týchto limitných intervalov, dá sa zložiť z intervalov množiny B, teda podmienka (c) je splnená.

d) Nech $u \in A$ je limitný interval, ktorý sa dá zložiť z intervalov množiny B. Potom u musí obsahovať ako podmnožinu niektorý z intervalov $x_{l,j}$, $y_{l,j+1}$ $(l = 1, 2, j \geqq i)$. Dokážme, že $u \in B$. Ak u obsahuje $x_{1,j}$, potom interval u môže byť zložený z intervalov patriacich do množiny $\{a_{3,i+t}, x_{1,j}\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, teda $u = x_{1,i+t}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$. Zrejme $u \in B$. Ak $u \in A$ obsahuje $x_{2,j}$ $(j \geqq i)$, potom u môže byť zložený jedine z intervalov množiny $\{a_{k,i+t}, b_{k,i+t+1}, x_{2,j}\}$ $(k = 1, 2; j \geqq i, t = 0, 1, 2, \ldots)$. Z toho zrejme vyplýva $u \in \{x_{2,i+t}, y_{2,i+t+1}\} \subset B$. Ak $u \in A$ obsahuje interval $y_{1,j}$ (resp. $y_{2,j}$) $j \geqq i + 1$, tvrdenie sa dokáže analogicky.

Duálne platí:

2.4.2. Nech $v = x'_{1,i}$. Potom $A(x'_{1,i}) = A(x'_{2,i})$. Označme túto množinu $A(x'_i)$. Ďalej platí $A(x'_i) = \{x'_{l,i+t}, y'_{l,i+t+1}, p'_{i+t}, a'_{k,i+t}, b'_{k,i+t+1}\}$ $(l = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$.

2.5. Nech $v = y_{1,i}$. Potom $A(y_{1,i}) = A(y_{2,i})$. Ak označíme túto množinu $A(y_i)$, vtedy $A(y_i) = \{y_{l,i+t}, x_{l,i+t+1}, p_{i+t}, b_{k,i+t}, a_{k,i+t+1}\}$ $(l = 1, 2, 3;\ k = 1, 2;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$.

Dokáže sa analogicky ako pre $v = x_{1,i}$. Tiež duálne platí:

2.5.1. Ak $v = y'_{1,i}$, potom $A(y'_i) = \{y'_{l,i+t}, x'_{l,i+t+1}, p'_{i+t}, b'_{k,i+t}, a'_{k,i+t+1}\}$ $(l = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$. [Používame označenie $A(y'_i) = A(y'_{l,i})$, $l = 1, 2$.]

2.6. *Nech $v = r_1$, nech $B = \{r_1\}$. Potom $B = A(r_1)$.*

Dôkaz. Zrejme $r_1 \in SP(r_1)$. Množiny $X(r_1)$, $X'(r_1)$ sú prázdne, takže

$$Y(r_1) = \emptyset, \tag{2.6.1}$$

teda $Y(r_1) \subset B$.

Poznámka. Analogicky ako v (2.6.1) je

$$Y(r_2) = Y(r'_1) = Y(r'_2) = \emptyset. \tag{2.6.2}$$

Rovnakou úvahou ako v 2.6, dostávame pre intervaly r_2, r'_1, r'_2:

2.6.1. $A(r_2) = \{r_2\}$,

2.6.2. $A(r'_l) = \{r'_l\}$ $(l = 1, 2)$.

2.7. Nech $v = m_1$. Platí $m_1 T m_2$, takže $A(m_1) = A(m_2)$. Označme túto množinu $A(m)$.

2.7.1. *Nech $B = \{m_1, m_2\}$, potom $B = A(m)$.*

Dôkaz. Podmienka (a_1) je zrejme splnená. Nech $u = m_1 = \langle V_1, W'_3 \rangle$. Potom $X(m_1) = \{V_3\}$, $W'_3 \cup V_3 = W'_2$, $\langle V_3, W'_2 \rangle = m_2$. Množina $X'(m_1)$ je prázdna, takže

$$Y(m_1) = \{m_2\}, \tag{2.7.1}$$

teda $Y(m_1) \subset B$. Nech $u = m_2 = \langle V_3, W'_2 \rangle$. Potom $X(m_2) = \emptyset$, $X'(m_2) = \{W'_3\}$, pričom $W'_3 \cap V_3 = V_2$, $\langle V_2, W'_3 \rangle = m_1$, teda

$$Y(m_2) = \{m_1\}. \tag{2.7.2}$$

Zrejme $Y(m_2) \subset B$.

2.7.2. Rovnakým postupom ako v predošlom odseku sa dokáže:

$$A(m') = \{m'_1, m'_2\}$$

[pritom $A(m')$ má analogický význam ako v 2.7.1].

Dokáže sa analogicky ako 2.7.1.

2.8. Nech $v = h_1$. Ľahko sa presvedčíme, že platí

$$h_1 T h_2 T h_3 T h'_1 T h'_2 T h'_3, \tag{2.8.1}$$

takže $A(h_1) = A(h_2) = \ldots = A(h'_3)$. Označme túto množinu $A(h)$.

2.8.1. *Nech $B = \{h_i, h'_i, r_j, r'_j\}$ $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$. Platí $B = A(h)$.*

Dôkaz. a) Zrejme $h_i, h'_i \in SP(h_1)$. Ďalej platí $r_1 \subset \langle V_1, V_3 \rangle T h_1$, teda $r_1 \in SP(h_1)$. Podobným postupom sa presvedčíme, že je $r_2, r'_1, r'_2 \in SP(h_1)$.

b) Pre $u = h_1 = \langle M_2, M_1 \rangle$ je $X(h_1) = \{V_1, V_2, W'_3, M'_1, W_1, W_2, V'_3\}$. Ak $C \in \{V_1, V_2\}$, potom $C \cup M_1 = V_3$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, V_3 \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{r_1, h_2\}$. Pre prvok W'_3 platí $W'_3 \cup M_1 = W'_2$, $\langle W'_3, W'_2 \rangle = h_3$. Pre prvok M'_1 dostávame $M'_1 \cup M_1 = M'_2$, $\langle M'_1, M'_2 \rangle = h'_1$. Ak $C \in \{W_1, W_2\}$, potom $M_1 \cup C = W_3$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, W_3 \rangle$ je obsiahnutý v množine $\{r'_2, h'_3\}$. Ďalej $V'_3 \cup M_1 = V'_2$, $\langle V'_3, V'_2 \rangle = h'_2$. Množina $X'(h_1)$ je prázdna. Úhrnom sme dostali

$$Y(h_1) = \{r_1, h_j, h'_i, r'_2\} \subset B \qquad (j = 2, 3;\ i = 1, 2, 3).$$

Ak $u = h_2 = \langle V_2, V_3 \rangle$, potom $X(h_2) = \{W'_3, M'_1\}$. Platí $W'_3 \cup V_3 = W'_2$, $\langle W'_3, W'_2 \rangle = h_3$; $M'_1 \cup V_3 = M'_2$, $\langle M'_1, M'_2 \rangle = h'_1$. Množina $X'(h_2) = \{M_1\}$, $M_1 \cap V_2 = M_2$, $\langle M_2, M_1 \rangle = h_1$. Potom

$$Y(h_2) = \{h_3, h'_1, h_1\} \subset B.$$

Nech $u = h_3 = \langle W'_3, W'_2 \rangle$. Potom $X(h_3) = \{M'_1\}$; $M'_1 \cup W'_2 = M'_2$; $\langle M'_1, M'_2 \rangle = h'_1$. Ďalej je $X'(h_3) = \{V_3, M_1\}$. Platí $V_3 \cap W'_3 = V_2$, $\langle V_2, V_3 \rangle = h_2$; $M_1 \cap W'_3 = M_2$, $\langle M_2, M_1 \rangle = h_1$. Z toho

$$Y(h_3) = \{h'_1, h_2, h_1\} \subset B.$$

Nech $u \in \{h'_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Duálne ako pre $u \in \{h_i\}$ sa dokáže, že príslušné množiny intervalov $Y(u)$ sú podmnožinami množiny B.

2.9. Nech $v = c_{L,2}$. Platí

$$c_{L,2}\, T\, c_{L,1}\, T\, c_i\, T\, c'_{L,1}\, T\, c'_{L,2}\, T\, c'_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2.9.1}$$

teda $A(c_{L,2}) = A(c_{L,1}) = \ldots = A(c'_i)$. Označme túto množinu $A(c)$.

2.9.1. *Nech $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde*

$B_1 = \{c_{L,k}, c_i, c'_{L,k}, c'_i\}$,

$B_2 = \{p_i, b_{l,i+1}, a_{l,i+2}, y_{k,i+1}, x_{k,i+2}, r_k, m_k\}$,

$B_3 = \{x : x$ *duálne k intervalom množiny* $B_2\}$ $(l = 1, 2, 3;\ k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Potom $B = A(c)$.

Dôkaz. a) Tvrdenie $c_{L,2} \in SP(c_{L,2})$ je triviálne. Intervaly $u \in B_1$ patria do $SP(c_{L,2})$ podľa (2.9.1). Nech i je (pevne vybrané) prirodzené číslo. Pri dôkaze, že intervaly množiny B_2 patria do $SP(c_{L,2})$, vyjdeme z intervalu c_i. Keďže $c_i \in SP(c_{L,2})$ a keďže interval p_i je podmnožinou intervalu $\langle Q_i, A_{i+1}\rangle\ T\ c_i$, platí $p_i \in SP(c_{L,2})$. Intervaly $y_{1,i+1}, r_1, m_1$, sú podmnožinami intervalu $\langle B_{i+1}, M'_1\rangle\ Tc_i$, takže $y_{1,i+1}, r_1, m_1 \in SP(c_{L,2})$. Potom však do $SP(c_{L,2})$ musia patriť aj intervaly z množín $A(y_{i+1})$, $A(r_1)$, $A(m)$; teda podľa 2.5, 2.6, 2.7.1 aj intervaly $b_{l,i+1}, a_{l,i+2}, x_{k,i+2}, y_{k,i+1}, r_1, m_k$ $(k = 1, 2;\ l = 1, 2, 3)$ sú z množiny $SP(c_{L,2})$. Ďalej $r_2 \subset \langle V_3, M'_2\rangle\ Tc_i$ teda $r_2 \in SP(c_{L,2})$. Úhrnom sme dostali, že $B_2 \subset SP(c_{L,2})$. Ak vyjdeme z intervalu c'_i, rovnakou úvahou by sme dokázali, že $B_3 \subset SP(c_{L,2})$.

b) Nech $u = c_{L,2} = \langle M_2, W_1\rangle$. Ľahko sa presvedčíme, že $X(c_{L,2}) = \{M_1, V_1, V_2, W'_3, V_3, W'_2, W'_1, A'_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Pre prvok M_1 dostávame $W_1 \cup M_1 = W_3$, $\langle M_1, W_3\rangle = c_{L,1}$. Nech $C \in \{V_1, V_2, W'_3\}$. Potom $C \cup W_1 = M'_1$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, M'_1\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{r_1, m_1, c'_{L,1}\}$. Nech $C \in \{V_3, W'_2, W'_1\}$. Potom $C \cup W_1 = M'_2$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, M'_2\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{m_2, r_2, c'_{L,2}\}$. Ostávajú ešte prvky A'_i; pre tieto platí $A'_i \cup W_1 = D'_i$, $\langle A'_i, D'_i\rangle = c'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ďalej je $X'(c_{L,2}) = \{A_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Platí $A_i \cap M_2 = D_i$, $\langle D_i, A_i\rangle = c_i$. Úhrnom sme dostali

$$Y(c_{L,2}) = \{c_{L,1}, c'_{L,1}, c'_{L,2}, c_i, c'_i, r_1, r_2, m_1, m_2\} \subset B.$$

Nech $u = c_{L,1} = \langle M_1, W_3\rangle$. Potom $X(c_{L,1}) = \{V_3, W'_2, W'_1, A'_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ak $C \in \{V_3, W'_2, W'_1\}$, potom $C \cup W_3 = M'_2$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, M'_2\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{m_2, r_2, c'_{L,2}\}$. Pre A'_i platí $A'_i \cup W_3 = D'_i$, $\langle A'_i, D'_i\rangle = c'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ďalej je $X'(c_{L,1}) = \{W_2, W_1, A_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Pre $C' \in \{W_2, W_1\}$ platí $C' \cap M_1 = M_2$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle M_2, C'\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{c_{L,2}, r'_2\}$. Pre A_i platí $A_i \cap M_1 = D_i$, $\langle D_i, A_i\rangle = c_i$. Úhrnom sme dostali

$$Y(c_{L,1}) = \{c_i, c_{L,2}, c'_{L,2}, c'_i, m_2, r_2, r'_2\} \subset B.$$

Nech $u = c_i = \langle D_i, A_i\rangle$. Potom $X(c_{L,1}) = \{Q_{i+t}, P_{i+t+1}, D_{i+t+1}, C_{i+t+1}, M_2, M_1, B_{i+t+1}, V_1, V_2, W'_3, V_3, W'_2, W'_1, A'_j\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots; j = 1, 2, 3, \ldots)$. Nech $C \in \{Q_{i+t}, P_{i+t+1}, D_{i+t+1}\}$, potom $C \cup A_i = A_{i+t+1}$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, A_{i+t+1}\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{p_{i+t}, b_{1,i+t+1}, c_{i+t+1}\}$. Pre prvok C_{i+t+1} dostávame $C_{i+t+1} \cup A_i = A_{i+t+2}$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C_{i+t+1}, A_{i+t+2}\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{b_{2,i+t+1}, p_{i+t+1}, b_{1,i+t+2}, c_{i+t+2}\}$. Ďalej $M_2 \cup A_i = W_1$, $\langle M_2, W_1\rangle = c_{L,2}$; $M_1 \cup A_i = W_3$, $\langle M_1, W_3\rangle = c_{L,1}$. Ak $C \in \{B_{i+t+1}, V_1, V_2, W'_3\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, potom $C \cup A_i = M'_1$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, M'_1\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{y_{1,i+t+1}, b_{3,i+t+1}, r_1, m_1, c'_{L,1}\}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$. Ak $C \in \{V_3, W'_2, W'_1\}$, potom $C \cup A_i = M'_2$ a každý interval $t \in A$, $t \subset \langle C, M'_2\rangle$ je obsiahnutý v množine $\{m_2, r_2, c'_{L,2}\}$. Pre prvky A'_j platí $A'_j \cup A_i = D'_j$, $\langle A'_j, D'_j\rangle = c'_j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. Ďalej $X'(c_i) = \{A_l\}$ $(l = 1, \ldots, i-1)$. Platí $A_l \cap D_i = D_l$, $\langle D_l, A_l\rangle = c_l$. Úhrnom sme dostali

$$Y(c_i) = \{c_l, c_{i+t+1}, c_{L,k}, c'_{L,k}, c'_j, p_{i+t}, b_{m,i+t+1}, y_{1,i+t+1}, r_k, m_k\}$$ $(l = 1, \ldots, i-1;\ t = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2;\ j = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, 3)$.

Množina $Y(c_i)$ je podmnožinou množiny B. Duálne by sme dokázali, že množiny $Y(c'_{L,1})$, $Y(c'_{L,2})$, $Y(c'_i)$ sú podmnožinami množiny B.

Pre $u \in B_2$ podľa (2.1.1), (2.2.2)–(2.2.5) (2.4.2)–(2.4.4), (2.6.1), (2.6.2), (2.7.1), (2.7.2) dostávame $Y(u) \subset B$. Analogické tvrdenie platí pre intervaly z množiny B_3.

c) Nech interval $u \in B$ je limitný, teda

$$u \in \{x_{k,i+2}, y_{k,i+1}, x'_{k,i+2}, y'_{k,i+1}\}\ (k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bezprostrednou previerkou nahliadneme, že ľubovoľný interval t, ktorý je podmnožinou intervalu u, dá sa zložiť z intervalov množiny B.

d) Nech $u \in A$ je limitný interval zložený z intervalov množiny B. Dokážeme, že $u \in B$. Zrejme limitný interval u musí obsahovať niektorý interval množiny

$$\{x_{k,i+2}, y_{k,i+1}, x'_{k,i+2}, y'_{k,i+1}\}\ (k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ak u obsahuje interval $x_{1,j}$ $(j \geqq i+2)$, potom môže byť zložený jedine z intervalov množiny $\{a_{3,i+2}, x_{1,j}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, teda $u = x_{1,i+2}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Zrejme $u \in B$. Ak u obsahuje interval $x_{2,j}$ $(j \geqq i+2)$, potom interval u môže byť zložený jedine z intervalov množiny $\{a_{k,i+2}, b_{k,i+1}, x_{2,j}\}$ $(k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$, teda $u \in \{x_{2,i+2}, y_{2,i+1}\} \subset B$. Analogicky sa dokáže splnenie podmienok (*d*), ak $u \in A$ obsahuje limitný interval $y_{k,j}$ $(k = 1, 2; j \geqq i+1)$, alebo duálne intervaly k predchádzajúcim $x_{k,j+1}, y'_{k,j}$ $(k = 1, 2; j \geqq i+1)$.

2.10. Nech $v = d_{L,2}$. Platí $d_{L,2}Td_{L,1}Td_iTd'_{L,2}Td'_{L,1}Td'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, teda $A(d_{L,2}) = A(d_{L,1}) = \ldots = A(d'_i)$. Označme túto množinu $A(d)$.

2.10.1. *Nech $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde $B_1 = \{d_{L,k}, d_i, d'_{L,k}, d'_i\}$, $B_2 = \{p_i, a_{l,i+1}, b_{l,i+2}, x_{k,i+1}, y_{k,i+2}, r_k, m_k\}$. $B_3 = \{x : x$ duálne k intervalom množiny $B_2\}$ $(l = 1, 2, 3;\ K = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$. Potom $B = A(d)$.*

Dôkaz je analogický ako pre $v = c_{L,2}$.

§ 3

Používame rovnaké označenia ako v § 2. Výsledky § 2 zhrnieme do nasledujúcej vety:

3.1. Veta. *Platí:*

a) $A(p_i) = \{p_i\}$,

$A(a_i) = \{a_{j,i+2t}, b_{j,i+2t+1}, p_{i+t}\}$ $(k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$A(b_i) = \{b_{k,i+2t}, a_{k,i+2t+1}, p_{i+t}\} \quad (k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$A(x_i) = \{x_{l,i+t}, y_{l,i+t+1}, p_{i+t}, a_{k,i+t}, b_{k,i+t+1}\}$$
$(l = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$,
$$A(y_i) = \{y_{l,i+t}, x_{l,i+t+1}, p_{i+t}, b_{k,i+t}, a_{k,i+t+1}\}$$
$(l = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$,
$$A(r_l) = \{r_l\} \quad (l = 1, 2),$$
$$A(m) = \{m_l\} \quad (l = 1, 2).$$

b) Pre množiny $A(p_i')$, …, $A(m')$ platia analogické rovnosti,

c) $A(h) = \{h_k, h_k', r_l, r_l'\}$ $(k = 1, 2, 3;\ l = 1, 2)$,

$A(c) = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde $B_1 = \{c_{L,k}, c_i, c_{L,k}', c_i'\}$, $B_2 = \{p_i, b_{l,i+1}, a_{l,i+2}, y_{k,i+2}, x_{k,i+2}, r_k, m_k\}$, $B_3 = \{x : x$ *duálne k intervalom množiny* $B_2\}$ $(l = 1, 2, 3;\ k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$.

$A(d) = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde $B_1 = \{d_{L,k}, d_i, d_{L,k}', d_i'\}$, $B_2 = \{p_i, a_{l,i+1}, b_{l,i+2}, x_{k,i+1}, y_{k,i+2}, r_k, m_k\}$, $B_3 = \{x : x$ *duálne k intervalom množiny* $B_2\}$ $(l = 1, 2, 3;\ k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$.

3.2. Nech R_1, R_2 sú ľubovoľné kongruencie na S. Potom $R_1 < R_2$ vtedy a len vtedy, keď $A(R_1) \subset A(R_2)$, $A(R_1) \neq A(R_2)$.

Tvrdenie je zrejmé.

3.3. Medzi kongruenciami $R(v)$, $v \in A$ platia tieto vzťahy (index i prebieha množinu všetkých prirodzených čísel):

$$R(p_i) < R(a_i),^* \quad R(p_i) < R(b_i), \tag{3.3.1}$$
$$R(b_{i+1}) < R(a_i), \quad R(a_{i+1}) < R(b_i), \tag{3.3.2}$$
$$R(x_{i+1}) < R(x_i), \quad R(y_{i+1}) < R(y_i), \tag{3.3.3}$$
$$R(y_{i+1}) < R(x_i), \quad R(x_{i+1}) < R(y_i), \tag{3.3.4}$$
$$R(a_i) < R(x_i), \quad R(b_i) < R(y_i), \tag{3.3.5}$$
$$R(r_l) < R(h), \quad l = 1, 2, \tag{3.3.6}$$
$$R(p_1) < R(c), \quad R(y_2) < R(c),\ R(r_l) < R(c), \tag{3.3.7}$$
$$R(p_1) < R(d), \quad R(x_2) < R(d),\ R(r_l) < R(d). \tag{3.3.8}$$

Ak $v_1, v_2 \in A$, $R(v_1) < R(v_2)$, potom tento vzťah môžeme dostať zo vzťahov (3.3.1) až (3.3.8), alebo z analogických vzťahov týkajúcich sa duálnych intervalov, pomocou tranzitívnosti relácie kongruentnosti.

Dôkaz vyplýva z 3.2 a 3.1.

Zaveďme nasledujúce označenia:

$$\bar{R}_1 = \{R(a_i), R(b_{i+1})\} \quad (i = 1, 3, 5, \ldots),$$
$$\bar{R}_2 = \{R(b_i), R(a_{i+1})\} \quad (i = 1, 3, 5, \ldots),$$
$$\bar{R}_3 = \{R(x_i)\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\bar{R}_4 = \{R(y_i)\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pre príslušné duálne intervaly používame označenie $\bar{R}_1'$, $\bar{R}_2'$, $\bar{R}_3'$, $\bar{R}_4'$.

Nech $\bar{R}$ je množina všetkých kongruencií tvaru $R(v)$, $v \in A$, $v \neq p_i$, $v \neq p_i'$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, nech $\bar{R}^1$ je množinový súčet množín $\bar{R}_i$, $\bar{R}_i'$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{R}^2 = \bar{R} - \bar{R}^1$.

3.4. Nech $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Nech $N \subset \bar{R}_j$, $N \neq \emptyset$. Potom N obsahuje najväčší prvok.

Tvrdenie platí podľa (3.3.2), (3.3.3).

Analogické tvrdenie platí, ak $N \subset \bar{R}_j'$, $N \neq \emptyset$.

3.5. Veta. *Ak $R = \cup R_i$, kde $\{R_i\} \subset \bar{R}$, potom R je zjednotením konečného počtu kongruencií z množiny $\{R_i\}$.*

Dôkaz. Keďže $R = \bar{R}^1 \cup \bar{R}^2$ a keďže $\bar{R}^2$ je konečná množina, všetky prvky z $\{R_i\}$, s výnimkou konečného počtu patria do $\bar{R}^1$, t. j. do niektorej z množín $N_j = \bar{R}_j \cap \{R_i\}$, $N_j' = \bar{R}_j' \cap \{R_i\}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Tvrdenie vyplýva teraz z 3.4.

3.6. Veta. *Nech R je ľubovoľná kongruencia na S. Potom $R = R_1 \cup R_2$, pričom R_1 je zjednotením konečného počtu kongruencií patriacich do $\bar{R}$ a R_2 je zjednotením určitých kongruencií tvaru $R(p_i)$, $R(p_j')$.*

Dôkaz. Nech A_2 je množina všetkých intervalov p_i, p_i', $i = 1, 2, 3, \ldots$, ktoré sa anulujú v kongruencii R, nech $A_1 = (A(R) \cap A) - A_2$. Zrejme platí $R = R_1 \cup R_2$, kde $R_1 = \cup R_i(v)$, $R_2 = \cup R_j(u)$, pričom v prebieha množinu A_1 a u prebieha množinu A_2. Keďže $\{R_i(v)\} \subset \bar{R}$, je podľa 3.5 R_1 zjednotením konečného počtu kongruencií z množiny $\{R_i(v)\}$. Tým je naše tvrdenie dokázané.

V nasledujúcej vete používame rovnaké označenia a predpoklady ako v odseku 3.6.

3.6.1. *Nech $A_3 = \{h_i, h_i', m_l, m_l', r_l, r_l'\}$ $(i = 1, 2, 3;\ l = 1, 2)$. Ak $A_1 - A_3$ je neprázdna množina, potom môžeme voliť R_1, R_2 tak, že R_2 je zjednotením konečného počtu kongruencií $R_j(u)$, $u \in A_2$.*

Tvrdenie vyplýva zo vzťahov (3.3.1), (3.3.2), (3.3.5), (3.3.7), (3.3.8).

LITERATÚRA

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948.

[2] Соркин И. Ю., *Свободные обьединения структур*, *Мат. сб.* 30 (1952), 677—694.

[3] Rolf H. L., *The free lattice generated by a set of chains*, Pacif. J. Math. 8 (1958), 585—595.

Došlo 23. 12. 1961.

Katedra matematiky
Vysokej školy technickej
v Košiciach

---

* Píšeme $R(a_i)$ namiesto $R(a_{k,i})$, $k = 1, 2, 3$; analogicky v ďalších prípadoch.

ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЕНТНОСТИ В СВОБОДНОЙ СТРУКТУРЕ

Катарина Молнарова

Резюме

Пусть структура $S = FL(2 + 2)$ — свободное произведение двух цепей из которых каждая содержит два элемента. Структура S была описана в [3]. В статье исследуются отношения конгруэнтности в структуре S.

В § 1 доказаны вспомогательные теоремы об отношениях конгруэнтности в общих структурах. Пусть P_1 (соотв. P_2) — множество всех простых интервалов (соотв. интервалов $x_{k,i}$, $y_{k,i}$, $x'_{k,i}$, $y'_{k,i}$, $k = 1, 2$; $i = 1, 2, 3, \ldots$) структуры S (смысл этих обозначений приведен в начале § 2, стр. 112; там также приводятся обозначения для простых интервалов струкуры S которыми пользуемся в дальнейшем). Обозначим $A = P_1 \cup P_2$. Пусть $R(v)$ будет для $v = \langle x, y \rangle \in A$ наименьшим из отношений конгруэнтности R на S, в которых аннулируется интервал v, т. е. в которых $x \equiv y(R)$. Пусть $A(v)$ — множество тех интервалов из множества A которые аннулированы в отношении конгруэнтности $R(v)$. Каждое отношение конгруентности на S однозначно определено множеством всех интервалов $u \in A$, аннулированных в R; в частности каждое отношение конгруентности $R(v)$ однозначно определеио множеством $A(v)$ (если интервал $I = \langle a, b \rangle$ структуры S аннулирован в отношении конгруэнтности $R(v)$ потом или а) $a = b$, или б) $a \neq b$ и существуют интервалы $I_1, \ldots, I_n \in A(v)$ такие, что $I_i = \langle a_{i-1}, a_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $a_0 = a$, $a_n = b$.

В теореме 3.1 описаны все множества $A(v)$. Пусть $A_1 = A - A_2$, где $A_2 = \{p_i, p'_i\}_{i=1}^{\infty}$. Далее доказаны теоремы:

Пусть R — произвольное отношение конгруэнтности на S. Тогда $R = R_1 \cup R_2$, где R_1 является объединением конечного числа отношений конгруентности $R(v_i)$, $\{v_i\} \subset A$ и R_2 — объединение отношений конгруэнтности $R(u_j)$, $\{u_j\} \subset A_2$.

Пусть $A_3 = \{h_i, h'_i, m_l, m'_l, r_l, r'_l\}$ $(i = 1, 2, 3; l = 1, 2)$, пусть $A' = A_1 - A_3$. Если $A' \neq \emptyset$, то R_1, R_2 можно подобрать так, чтобы R_2 было объединением конечного числа отношений конгруэнтности $R(u_j)$, $\{u_j\} \subset A_2$.