MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 1, 1962

POZNÁMKA KU KONŠTRUKCII MIERY

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

Cieľom tejto poznámky je ukázať spôsoby, ktorými je možné rozšíriť množinovú funkciu, ktorej oborom sú gule na mieru definovanú na všetkých borelovských množinách. Na riešenie tejto úlohy nie je možné aplikovať známu metódu na rozšírenie miery z okruhu na σ-okruh.

V tomto príspevku sa študujú dve konštrukcie miery. Prvou konštrukciou je Caratheodoryho rozšírenie do vonkajšej miery. Od danej funkcie μ, ktorá je definovaná na guliach, žiadame, aby bola nezáporná, σ-subaditívna a spĺňala podmienku (P) (pozri def. 1). Podmienka (P) je silnejšia ako σ-aditívnosť. Niektoré miery, ktoré ju spĺňajú, sú ukázané v lemme 1 (pozri tiež poznámky 1 a 2).

Hlavný výsledok týkajúci sa spomínanej konštrukcie je sformulovaný vo vete 1. Opísanou metódou možno rozšíriť funkciu μ, definovanú na ľubovoľnom systéme $\boldsymbol{K}$ podmnožín metrického priestoru X a spĺňajúcu na $\boldsymbol{K}$ patričné podmienky, na mieru definovanú na všetkých borelovských podmnožinách X. Ak vezmeme za $\boldsymbol{K}$ najmenší okruh nad systémom všetkých polouzavretých intervalov v E_n, podmienky, ktoré žiadame od funkcie μ vo vete 1, sú ekvivalentné s podmienkami, ktoré obyčajne vyžadujeme (nezápornosť, σ-aditívnosť, $\mu(\emptyset) = 0$). Ako dôsledok je uvedená jedna veta Mickle a Rado z práce [2] (poznámka 4).*

Druhá konštrukcia, ktorú uvádzame, spočíva v rozšírení danej funkcie najprv cez suprémum na otvorené množiny a potom v rozšírení takto získanej funkcie pomocou infíma na všetky podmnožiny X. Presne je táto konštrukcia opísaná v def. 6 a v def. 7, patričný výsledok je sformulovaný vo vete 3. Od pôvodnej funkcie žiadame okrem splnenia nutných podmienok (nezápornosť, σ-aditívnosť, $\mu(\emptyset) = 0$ tiež splnenie podmienky (V) (pozri def. 4). Podmienku (V) spĺňajú napríklad všetky borelovské miery, pre ktoré platí Vitaliho veta (pozn. 5).

Aj túto konštrukciu možno použiť na rozšírenie funkcie na mieru nielen z gúľ, ale aj z niektorých systémov otvorených množín, ktoré spĺňajú požiadavky stanovené v def. 5.

V závere článku je dokázaný vzťah medzi oboma konštrukciami navzájom, ako aj vzťah medzi nimi a hausdorffovským rozšírením (pozri def. 2). Vo vete 4 sú uvedené podmienky postačujúce na to, aby všetky tri rozšírenia boli zhodné.

Najprv uvedieme niektoré definície. Názvy a základné pojmy budeme používať

* Znenie vety je uvedené za definíciou 3.

tak, ako sú zavedené v knihe [1]. Trocha odlišne budeme chápať σ-aditívnosť a σ-subaditívnosť. Množinovú funkciu μ definovanú na systéme $\mathbf{K}$ podmnožín X budeme nazývať σ-aditívnou na $\mathbf{K}$, ak pre ľubovoľné $A \in \mathbf{K}$ a ľubovoľnú postupnosť množín $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ $A_i \subset A$, $A_i \in \mathbf{K}$ pre $i = 1,2,\ldots$ platí $\mu(A) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Podobne budeme hovoriť, že μ je σ-subaditívna na $\mathbf{K}$, ak pre ľubovoľné $A \in \mathbf{K}$ a ľubovoľnú postupnosť množín $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$, $A_i \in \mathbf{K}$, $i = 1,2,\ldots$ platí $\mu(A) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Poznamenajme ešte, že každá miera (vonkajšia miera) je σ-aditívna (σ-subaditívna) aj v tomto chápaní.

V celom článku bude X značiť metrický priestor, $\varrho(x, y)$ metriku v X, $\varrho(A, B) = \inf \{\varrho(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Otvorenou guľou v X budeme rozumieť každú množinu tvaru $\{x : \varrho(x, x_0) < r\}$, kde x_0 je nejaký prvok z X a r je nezáporné číslo. Podľa tejto definície aj prázdna množina je otvorenou guľou ($r = 0$).

Vonkajšiu mieru μ definovanú na systéme všetkých podmnožín X nazveme Caratheodoryho vonkajšou mierou, ak platí implikácia $\varrho(A, B) > 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Ak je μ Caratheodoryho vonkajšia miera, potom všetky borelovské množiny sú μ-merateľné.*

Budeme hovoriť, že systém $\mathbf{K}$ podmnožín X pokrýva množinu $A \subset X$ v zmysle Vitaliho, ak k ľubovoľnému bodu $x \in A$ a k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje množina $C \in \mathbf{K}$ tak, že $x \in C$ a diam $C < \varepsilon$.**

Ďalej nech $\mathbf{K}$ je ľubovoľný systém podmnožín X, $\emptyset \in \mathbf{K}$, μ reálna nezáporná funkcia na $\mathbf{K}$, $\mu(\emptyset) = 0$. Pre $A \subset X$ kladieme

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A, \quad A_i \in \mathbf{K}, \quad i = 1,2,\ldots\}.$$

Ľahko zistíme, že μ^* je vonkajšia miera. Okrem toho ak μ je σ-subaditívna, potom $\mu^*(K) = \mu(K)$ pre $K \in \mathbf{K}$.

Okrem uvedenej vonkajšej miery zásadný význam pre naše úvahy bude mať podmienka definovaná v nasledujúcej definícii.

Definícia 1. *Nech* $\mathbf{K}$ *je neprázdny systém podmnožín* X. *Hovoríme, že množinová funkcia* μ *definovaná na* $\mathbf{K}$ *spĺňa podmienku* (P), *ak k ľubovoľným číslam* $\varepsilon > 0$ *a* $\eta > 0$ *a k ľubovoľnému* $K \in \mathbf{K}$, *takému, že* $\mu(K) < \infty$ *existuje postupnosť množín* $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset K$, $K_i \in \mathbf{K}$, diam $K_i < \eta$ *pre* $i = 1,2\ldots$ *a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) < \mu(K) + \varepsilon.$$

* Pozri napr. [4], 52.

** diam $C = \sup \varrho(x, y) : (x, y)$.

Ak je μ σ-subaditívna, môžme sformulovať podmienku (P) takto: Pre každé $K \in \mathbf{K}$, také že $\mu(K) < \infty$ a každé $\eta > 0$ platí

$$\mu(K)) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset K, \quad K_i \in \mathbf{K}, \text{diam } K_i < \eta, \quad i = 1,2,\ldots\}.$$

Poznámka 1. Nech X je eukleidovský priestor, μ Lebesguova miera, $\mathbf{K}$ systém uzavretých gúľ v X. Je známe, že μ spĺňa podmienku (P). Ľahko sa ďalej presvedčíme o tom, že podmienku (P) spĺňajú všetky miery, pre ktoré platí Vitaliho veta* a nasledujúca implikácia: $\mu(A) = 0 \Rightarrow$ k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť gúľ $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, taká, že diam $A_i < \varepsilon$ pre $i = 1,2,\ldots,$ $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ a $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \varepsilon$. Niektoré miery spĺňajúce podmienku (P) sú spomenuté tiež v lemme 1.

Poznámka 2. X nech je opäť eukleidovský priestor, $\mathbf{K}$ najmenší okruh nad intervalmi tvaru $\langle a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2) \times \ldots \times \langle a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ľahko nahliadneme, že každá miera na borelovských množinách spĺňa podmienku (P) na $\mathbf{K}$. Z nasledujúcej vety vyplýva, že každá nezáporná, σ-subaditívna funkcia na $\mathbf{K}$ spĺňajúca podmienku (P) je σ-aditívna.

Veta 1. *Nech* $\mathbf{K}$ *je neprázdny systém podmnožín* X, $\emptyset \in \mathbf{K}$. *Nech* μ *je nezáporná, σ-subaditívna funkcia na* $\mathbf{K}$ *spĺňajúca na* $\mathbf{K}$ *podmienku* (P). *Nech* $\mu(\emptyset) = 0$.

Potom μ^* *indukuje na systéme* $\mathbf{B}$ *borelovských podmnožín* X *istú mieru (označme ju tým istým znakom* μ^**);* $\mu^*(K) = \mu(K)$ *pre* $K \in \mathbf{K}$.

Dôkaz. Rovnosť $\mu^*(K) = \mu(K)$ pre $K \in \mathbf{K}$ je zrejmá. K dôkazu vety nám stačí dokázať, že μ^* je Caratheodoryho vonkajšia miera.

Nech A, B sú ľubovoľné podmnožiny X, $\varrho(A, B) > 0$. Ak má aspoň jedna z množín A, B nekonečnú mieru, platí $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Predpokladajme teraz, že $\mu^*(A \cup B) < \infty$. Podľa definície μ^*, k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť množín $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset A \cup B$, $K_i \in \mathbf{K}$ pre $i = 1,2,\ldots$ tak, že platí

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i). \tag{1}$$

Ke každej množine $K_i \in \mathbf{K}$ existuje podľa podmienky (P) postupnosť množín $\{K_i^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^n \subset K_i$, diam $K_i^n < 2^{-1}\varrho(A, B)$ pre $n = 1,2,\ldots$ tak, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_i^n) < \mu(K_i) + 2^{-i}\varepsilon. \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplýva

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_i^n) - \varepsilon. \tag{3}$$

* Pozri napr. [3], 211.

Označme znakom α množinu tých dvojíc (i, n), pre ktoré $K_i^n \cap A \neq \emptyset$, znakom β množinu tých dvojíc (i, n), pre ktoré je $K_i^n \cap B \neq 0$. Pretože diam $K_i^n < 2^{-1}\varrho(A, B)$ sú α, β disjunktné, $\bigcup_{(i,n)\in\alpha} K_i^n \supset A$, $\bigcup_{(i,n)\in\beta} K_i^n \supset B$. Z posledných vzťahov a z (3) vyplýva

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_i^n) - \varepsilon \geqq$$
$$\geqq \sum_{(i,n)\in\alpha} \mu(K_i^n) + \sum_{(i,n)\in\beta} \mu(K_i^n) - \varepsilon \geqq$$
$$\geqq \mu^*(A) + \mu^*(B) - \varepsilon,$$

teda $\mu^*(A \cup B) \geqq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Pretože opačná nerovnosť platí vždy, je dôkaz vety skončený.

V ďalšej časti článku všimneme si vzťah práve dokázanej vety k jednému výsledku práce [2]. V záujme stručnejšieho vyjadrovania sa zavedieme tieto definície:

Definícia 2. *Nech* **K** *je systém podmnožín X. Nech μ je reálna funkcia, ktorej obor obsahuje množinu* **K**. *Potom definujeme pre ľubovoľnú $A \subset X$*

$$H_\varepsilon[\mu, \mathbf{K}](A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset A, \ \text{diam}\, K_i < \varepsilon, \ K_i \in \mathbf{K}\},$$
$$H[\mu, \mathbf{K}](A) = \sup\{H_\varepsilon[\mu, \mathbf{K}](A) : \varepsilon > 0\}.$$

Definícia 3. *Nech* **K** *je systém uzavretých gúľ, μ množinová funkcia na systéme* **L** *podmnožín X. Nech* **K** $\subset$ **L**. *Budeme hovoriť, že μ spĺňa 5r podmienku na systéme* **L**, *ak k ľubovoľnej množine $A \in L$ existujú konštanty $k(A)$, $K(A) < 1 < K(A)$ také, že pre ľubovoľné $K \in$* **K**, *$K = \{x : \varrho(x, x_0) \leqq r\}$, $r < k(A)$, $K \cap A \neq \emptyset$ je*

$$\mu(\hat{K}) = \mu(\{x : \varrho(x, x_0) \leqq 5r\}) < K(A) \,.\, \mu(K).*$$

E. J. Mickle a T. Rado dokázali ([2] 15) túto vetu:

Nech μ je Caratheodoryho vonkajšia miera definovaná na všetkých podmnožinách X. Nech X je separabilný metrický priestor, **K** systém uzavretých gúľ v X. Nech k ľubovoľnej množine $A \subset X$ existuje taká borelovská množina B, že platí $A \subset B$ a $\mu(A) = \mu(B)$. Nech μ spĺňa 5r podmienku na všetkých podmnožinách X.**
Tvrdenie: $H[\mu, \mathbf{K}](A) = \mu(A)$ pre všetky $A \subset X$.

Tento výsledok nás upozorňuje na možnosť použitia hausdorfovského rozšírenia (definovaného v def. 2) na riešenie daného problému. Skutočne. Malou modifikáciou dôkazu Mickle a Rado dostaneme toto tvrdenie:

Veta 2. *Nech* **K** *je systém uzavretých gúľ v X. Nech μ je nezáporná, σ-aditívna, σ-subaditívna funkcia spĺňajúca 5r podmienku na systéme* **K**. *Nech $\mu(\emptyset) = 0$.*

Potom $H[\mu, \mathbf{K}]$ je vonkajšia miera, ktorá indukuje na borelovských množinách mieru, ktorá je rozšírením μ t. j. $\mu(K) = H[\mu, \mathbf{K}](K)$ pre všetky $K \in \mathbf{K}$.

* Znakom $\hat{K}$ značíme množinu $\{x_2\ \varrho(x, x_0) < 5r\}$.
** Z 5r podmienky vyplýva, že μ je konečná na guliach, teda σ-konečná (X je separabilný).

Ako však ukážeme v ďalších lemmách, sú vety 2 a uvedený výsledok z práce [2] dôsledkom vety 1.

Lemma 1. *Nech* **K** *je systém uzavretých gúľ v X. Nech μ je nezáporná, σ-aditívna funkcia na* **K** *spĺňajúca 5r podmienku na systéme* **K**. *Nech $\mu(\emptyset) = 0$. Potom μ spĺňa podmienku* (P).

Dôkaz. Nech ε, η sú ľubovoľné kladné čísla. K ľubovoľnému $K \in \mathbf{K}$, $K = \{x : \varrho(x, x_0) < r\}$ označme znakom $\hat{K}$ množinu $\{x : \varrho(x, x_0) \leqq 5r\}$. Vezmime teraz K pevné a konštanty $k(K)$, $K(K)$ z 5r podmienky. Označme znakom $\mathbf{K}_1$ systém všetkých $L \in \mathbf{K}$ takých, že

$$\text{diam}\, L < \frac{1}{5}\eta, \ \text{diam}\, L < k(K), \ L \subset K.$$

Systém $\mathbf{K}_1$ pokrýva množinu K v zmysle Vitaliho, $\sup_{L\in \mathbf{K}_1} \text{diam}\, L < \infty$. Podľa jednej vety A. P. Morsa ([3] veta 3.10) existuje disjunktná postupnosť množín $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, $K_i \in \mathbf{K}_1$, $i = 1,2,\ldots$ tak, že

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \hat{K}_i,$$

pre každé n. Potom platí

$$H_\eta[\mu, \mathbf{K}](K) \leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(\hat{K}_i) \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) + K(K) \sum_{i=n+1}^{\infty} (\mu K_i). \tag{4}$$

Pretože μ je σ-aditívna, platí $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) \leqq \mu(K)$, teda $\lim \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(K_i) = 0$. Zo (4) vyplýva

$$H_\eta[\mu, \mathbf{K}](K) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) \leqq \mu(K) \tag{5}$$

a odtiaľ bezprostredne žiadané tvrdenie.

Lemma 2. *Nech* **K** *je systém podmnožín X, $\emptyset \in \mathbf{K}$. Nech μ je nezáporná, množinová funkcia, $\mu(\emptyset) = 0$. Nech μ spĺňa na* **K** *podmienku* (P).

Potom $\mu^*(A) = H[\mu, \mathbf{K}](A)$ pre ľubovoľnú množinu $A \subset X$.

Dôkaz. Píšme $H = H[\mu, \mathbf{K}]$. Z definície μ^* a H vyplýva, že platí $\mu^*(A) \leqq H(A)$ pre každé $A \subset X$. Ak $\mu^*(A) = \infty$ rovnosť $\mu^*(A) = H(A)$ je zrejmá. Predpokladajme, že $\mu^*(A) < \infty$. Z definície μ^* vyplýva, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť množín $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, $K_i \in \mathbf{K}$, $i = 1,2,\ldots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset A$ tak, že

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i). \tag{6}$$

Podľa podmienky (P) existujú k ľubovoľnému $\eta > 0$ a k množinám K_i postupnosti množín $\{K_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_i^n \supset K_i$, $K_i^n \in \mathbf{K}$. $\operatorname{diam} K_i^n < \eta$ pre $n = 1,2,\ldots$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_i^n) < \mu(K_i) + 2^{-i}\varepsilon. \tag{7}$$

Vezmime teraz $\{K_i^n\}_{i,n=1}^{\infty}$. Platí $\bigcup_{i,n=1}^{\infty} K_i^n \supset A$, $\operatorname{diam} K_i^n < \eta$, $i, n = 1,2,\ldots$, teda

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_i^n) \geqq H_\eta(A) = H_\eta[\mu, \mathbf{K}](A). \tag{8}$$

Zo vzťahov (6), (7) a (8) vyplýva nerovnosť

$$\mu^*(A) + \varepsilon > H_\eta(A) - \varepsilon,$$

pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Odtiaľ už bezprostredne vyplýva nerovnosť $\mu^*(A) \geqq H(A)$, čím je veta dokázaná.

Poznámka 3. Vo vete 2 nie je nutné obmedziť sa na systém uzavretých gúľ. Veta 2 platí aj vtedy, ak za $\mathbf{K}$ vezmeme ľubovoľný systém uzavretých množín pokrývajúci X v zmysle Vitaliho. Iba v definícii 3 a v dôkaze lemmy 1 treba interpretovať množinu $\hat{K}$ v zmysle [3] definície 2.7.

Poznámka 4. Z vety 1 vyplýva uvedená veta E. J. Mickle a T. Rado.

Dôkaz. Z predpokladov spomínanej vety vyplývajú predpoklady vety 1 ($\mathbf{K}$ je systém uzavretých gúľ). Odtiaľ podľa lemmy 2 platí $H[\mu, \mathbf{K}](K) = \mu^*(K) = \mu(K)$, pre $K \in \mathbf{K}$. Okrem toho $H(\mu, \mathbf{K}](A) \geqq \mu(A)$ pre všetky $A \subset X$. Pretože $H[\mu, \mathbf{K}]$ a μ sú σ-konečné Caratheodoryho vonkajšie miery, zhodujú sa na guliach a X je separabilný, platí $H[\mu, \mathbf{K}](B) = \mu(B)$ pre všetky B borelovské. Nech A je teraz ľubovoľná množina. Vezmime B borelovskú tak, aby $B \supset A$, $\mu(B) = \mu(A)$. Potom $H[\mu, \mathbf{K}](A) \geqq \mu(A) = \mu(B) = H[\mu, \mathbf{K}](B) \geqq H[\mu, \mathbf{K}](A)$.

Pristúpme teraz k opisu inej konštrukcie, vhodnej pre riešenie danej úlohy. Za tým účelom uvedieme najprv niektoré definície.

Definícia 4. *Nech $\mathbf{K}$ je systém podmnožín X, ktorý pokrýva X v zmysle Vitaliho. Budeme hovoriť, že množinová funkcia μ spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienku (V), ak k ľubovoľnému $K \in \mathbf{K}$, k ľubovoľnému systému $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ podmnožín K, ktorý pokrýva množinu K v zmysle Vitaliho a k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť množín $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$, $L_i \in \mathbf{L}$, $i = 1,2,\ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(L_i) > \mu(K) - \varepsilon.^*$$

* Špeciálne je teda μ konečná na $\mathbf{K}$.

Poznámka 5. Nech $\mathbf{K}$ je systém gúľ, v X, μ borelovská miera, pre ktorú platí Vitaliho veta. Potom μ spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienku (V).

Dôkaz. Nech K je ľubovoľná guľa, $\mathbf{L}$ systém podmožín K, ktorý pokrýva K v zmysle Vitaliho, $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Podľa Vitaliho vety existuje postupnosť množín $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$, $L_i \cap L_j = 0$ pre $i \neq j$, $L_i \in \mathbf{L}$ pre $i = 1,2,\ldots$ tak že $\mu(K - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$. Odtiaľ vyplýva

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(L_i) \geqq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = \mu(K) > \mu(K) - \varepsilon.$$

Lemma 3. *Nech $\mathbf{K}$ je systém uzavretých gúľ v X. Nech μ je nezáporná, σ-aditívna, σ-subaditívna množinová funkcia na $\mathbf{K}$, $\mu(\emptyset) = 0$. Nech μ na $\mathbf{K}$ spĺňa 5r podmienku. Potom μ spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienku (V).*

Dôkaz. Vezmime množinu $K \in \mathbf{K}$ pevne a vyberme postupnosť množín $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ tak, ako v dôkaze lemmy 1. Potom $K_i \cap K_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, $K_i \in \mathbf{K}$, $K_i \subset K$, pre $i = 1,2,\ldots$ Z (5) a zo σ-subaditívnosti μ vyplýva

$$\mu(K) \leqq H[\mu, \mathbf{K}](K) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) + \varepsilon.$$

Definícia 5. *V ďalšom budeme predpokladať, že $\mathbf{K}$ je systém otvorených podmnožín v X, ktorý obsahuje prázdnu množinu a pokrýva X v zmysle Vitaliho.*

Definícia 6. *Nech μ je funkcia definovaná na $\mathbf{K}$ (systém $\mathbf{K}$ má tu aj všade v ďalšom vlastnosti požadované definíciou 5). Pre ľubovoľnú otvorenú množinu $U \subset X$ kladieme*

$$\lambda(U) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) : K_i \cap K_j = \emptyset \text{ pre } i \neq j,\ K_i \subset U,\ K_i \in \mathbf{K}\right\}.$$

V nasledujúcej lemme dokážeme niektoré vlastnosti funkcie λ.

Lemma 4. *Nech μ je množinová funkcia definovaná na $\mathbf{K}$, nezáporná, σ-aditívna, $\mu(\emptyset) = 0$. Nech μ spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienku (V) (to znamená okrem iného, že μ je konečná na $\mathbf{K}$).*

Potom je λ nezáporná, monotónna, σ-aditívna, σ-subaditívna množinová funkcia, definovaná na systém všetkých otvorených množín v X. Pre každú $U \in \mathbf{K}$ je $\mu(U) = \lambda(U)$.

Dôkaz. Pretože $\emptyset \in \mathbf{K}$ je $\lambda(U) \geqq 0$. Z toho istého dôvodu a zo σ-aditívnosti μ vyplýva $\mu(U) = \lambda(U)$ pre $U \in \mathbf{K}$. Funkcia λ je okrem toho zrejme monotónna.

Nech $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť otvorených množín. Dokážeme, že $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(U_k)$. Predpokladajme najprv, že $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) < \infty$. Podľa definície λ existuje postupnosť množín $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ $A_i \in \mathbf{K}$, $A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, $i = 1,2,\ldots$ tak, že

$$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{9}$$

Uvažujme ľubovoľnú A_i. Vezmime $x \in A_i$. Ak $x \in U_k$, existuje množina $U_k(x) \in \mathbf{K}$, $x \in U_k(x)$ tak, že $U_k(x) \subset U_k \cap A_i$. Označme znakom $\mathbf{U}_k(x)$ systém všetkých $K \in \mathbf{K}$ takých, že $x \in K \subset U_k(x)$.

Položme

$$\mathbf{L}_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{x \in A_i} \mathbf{U}_k(x). \tag{10}$$

Pretože $\mathbf{L}_i$ je systém podmnožín A_i, ktorý pokrýva množinu A_i v zmysle Vitaliho a μ spĺňa podmienku (V), existuje postupnosť množín $\{L_i^n\}_{i=1}^{\infty}$, $L_i^n \in \mathbf{L}_i$, $L_i^n \subset A_i$, $n = 1,2,\ldots$, $L_i^n \cap L_i^m = \emptyset$ pre $m \neq n$ tak, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(L_i^n) > \mu(A_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{11}$$

Označme znakom $\alpha_i^k = \{n : L_i^n \subset U_k\}$. Pretože $\bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_i^k \supset \{1,2,\ldots\}$, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(L_i^n) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \alpha^k_i} \mu(L_i^n). \tag{12}$$

Z nerovností (9) až (12) vyplýva

$$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \alpha^k_i} \mu(L_i^n) + \varepsilon = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in \alpha^k_i} \mu(L_i^n) + \varepsilon \leqq \\ \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(U_k) + \varepsilon \tag{13}$$

a odtiaľ

$$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(U_k). \tag{14}$$

Ak $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_k) = \infty$, potom k ľubovoľnému číslu N existuje postupnosť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \cap A_j = 0$ pre $i \neq j$, $A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_k$, $A_i \in \mathbf{K}$ pre $i = 1,2,\ldots$ tak, že

$$N < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{9'}$$

Zvoľme opäť systém L_i podľa (10), postupnosť $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ ako v predchádzajúcom

prípade. Potom platí tiež (11) a (12) (α_i^k má ten istý význam čo predtým). Keby $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U_k) < \infty$, vyplývalo by z (9'), (11) a (12)

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(U_k) + \varepsilon \tag{13'}$$

pre každé N, čo je v spore s predpokladom. Preto $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U_k) = \infty$, čiže nerovnosť (14) platí aj v tom prípade, že $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_k) = \infty$.

Zostáva nám ešte dokázať σ-aditívnosť λ. Nech U, V sú ľubovoľné disjunktné otvorené množiny. Vezmime postupnosti množín z $\mathbf{K}\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, resp. $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ tak, že $U_i \cap U_j = V_i \cap V_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, $U_i \subset U$, $V_i \subset V$ pre $i = 1,2,\ldots$

$$\lambda(U) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i), \qquad \lambda(V) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i).$$

Odtiaľ

$$\lambda(U) + \lambda(V) - 2\varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leqq \lambda(U \cup V),$$

teda $\lambda(U) + \lambda(V) \leqq \lambda(U \cup V)$.

Indukciou dokážeme, že λ je konečne aditívna. Nech konečne $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ľubovoľná disjunktná postupnosť otvorených množín. Z konečnej aditívnosti a monotónnosti λ vyplýva

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geqq \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \lambda(U_i)$$

pre každé n. Teda $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U_i)$ a dôkaz je ukončený.

Definícia 7. *Nech μ je množinová funkcia definovaná na $\mathbf{K}$, λ rozšírenie μ na všetky otvorené množiny definované v definícii 6. Nech $A \subset X$ je ľubovoľná množina. Potom kladieme*

$$\bar{\mu}(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U,\ U \textit{ otvorená}\}.$$

Ľahko možno dokázať nasledujúcu lemmu opisujúcu niektoré vlastnosti $\bar{\mu}$.

Lemma 5. *Nech μ je množinová funkcia definovaná na $\mathbf{K}$, spĺňujúca predpoklady lemmy 4. Potom množinová funkcia $\bar{\mu}$ definovaná v definícii 7 je vonkajšia miera definovaná na všetkých podmnožinách X. Pre ľubovoľnú otvorenú množinu $U \subset X$ je $\bar{\mu}(U) = \lambda(U)$.*

Veta 3. *Nech μ je množinová funkcia definovaná na $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ spĺňa predpoklady definície 5). Nech μ je na $\mathbf{K}$ nezáporná, σ-aditívna, $\mu(\emptyset) = 0$ a nech spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienku (V).*

Potom vonkajšia miera $\bar{\mu}$ (definovaná v definícii 7) indukuje na borelovských množinách X borelovskú regulárnu mieru (označme ju tým istým znakom); $\bar{\mu}(K) = \mu(K)$ pre $K \in \mathbf{K}$.

Dôkaz. Stačí nám ukázať, že $\bar{\mu}$ je Caratheodoryho vonkajšia miera. Nech sú A, B ľubovoľné podmnožiny X, $\varrho(A, B) > 0$. Vezmime U, V otvorené tak, aby $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Podľa definície μ existuje k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ otvorená množina $W \supset A \cup B$ tak, že

$$\bar{\mu}(A \cup B) + \varepsilon > \lambda(W) \geqq \lambda((U \cup W) \cap (V \cap W)) =$$
$$= \lambda(U \cap W) + \lambda(V \cap W) \geqq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B).$$

Nasledujúca veta nám dáva čiastočnú odpoveď na otázku, ako súvisia rôzne rozšírenia definované v tomto článku.

Veta 4. *Nech $\mathbf{K}$ je systém otvorených gúľ v X. Nech X je separabilný metrický priestor. Nech μ je nezáporná, σ-aditívna, σ-subaditívna množinová funkcia definovaná na $\mathbf{K}$, taká, že $\mu(\emptyset) = 0$. Nech μ spĺňa na $\mathbf{K}$ podmienky (P) a (V).*

Potom pre ľubovoľnú množinu $A \subset X$ platí

$$\mu^*(A) = H[\mu, \mathbf{K}](A) = \bar{\mu}(A).$$

Dôkaz. V lemme 2 bolo dokázané, že pri daných predpokladoch platí $\mu^*(A) = H[\mu, \mathbf{K}](A)$ pre ľubovoľnú množinu $A \subset X$. Ukážeme teraz, že $\mu^*(A) = \bar{\mu}(A)$. Pretože μ^* a $\bar{\mu}$ indukujú miery na borelovských množinách, ktoré se zhodujú na guliach, a X je separabilný, platí rovnosť $\mu^*(B) = \bar{\mu}(B)$ pre B borelovské, špeciálne teda pre B otvorené. Nech $A \subset X$ je ľubovoľná množina. Podľa definície $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset A,\ B_i \in \mathbf{K}\}$. Ale $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_i) \geqq \bar{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \geqq \bar{\mu}(A)$, teda $\mu^*(A) \geqq \bar{\mu}(A)$. Ak $\bar{\mu}(A) = \infty$ platí rovnosť $\mu^*(A) = \bar{\mu}(A)$. Predpokladajme, že $\bar{\mu}(A) < \infty$. Podľa definície $\bar{\mu}$ existuje U otvorená tak, že $U \supset A$ a

$$\bar{\mu}(A) + \varepsilon > \lambda(U) = \bar{\mu}(U) = \mu^*(U) \geqq \mu^*(A)$$

pre každé $\varepsilon > 0$, teda $\bar{\mu}(A) \geqq \mu^*(A)$. Opačnú nerovnosť sme dokázali o niekoľko riadkov vyššie.

LITERATÚRA

[1] Halmos P. R., *Measure theory*, New York 1950.

[2] Mickle E. J., Rado T., *On density theorems for outer measures*, Rozprawy matematyczne XXI, Warszawa 1960.

[3] Morse A. P., *A theory of covering and differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc., 55 (1944), 205—235.

[4] Saks S., *Theory of the Integral*, New York 1937.

Došlo 26. 10. 1961.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА К КОНСТРУКЦИИ МЕРЫ

Белослав Риечан

Выводы

Пусть $\mathbf{K}$ класс подмножеств некоторого пространства X и μ действительная множественная функция на $\mathbf{K}$. Мы будем говорить, что μ счетно-аддитивная на $\mathbf{K}$, если для любой последовательности множеств $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и $K_i \in \mathbf{K}$ для $i = 1, 2, \ldots$ и для любого $K \in \mathbf{K}$ такого, что $K_i \subset K$, $i = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\mu(K) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i)$.

Мы будем говорить, что μ счетно полуаддитивная, если для любой последовательности $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ множеств из $\mathbf{K}$ и любово $K \in \mathbf{K}$ такого, что $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, выполняется неравенство $\mu(K) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i)$.

Пусть теперь X является метрическим пространством. Мы скажем что μ выполняет условие (P) на $\mathbf{K}$ если для всякого $K \in \mathbf{K}$ такого, что $\mu(K) < \infty$ и всякого положительного числа ε существует последовательность множеств $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset K$, diam $K_i < \varepsilon$, $K_i \in \mathbf{K}$, $i = 1, 2, \ldots$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) < \mu(K) + \varepsilon.$$

Пусть $\mathbf{K}$ является покрытием пространства X в смысле Витали. Мы скажем, что μ выполняет условие (V) на $\mathbf{K}$, если справедливо следующее: Пусть K любое множество принадлежащее $\mathbf{K}$, $\varepsilon > 0$ любое число и $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ какой-нибудь класс подмножеств множества K покрывающий K в смысле Витали. Тогда существует последовательность множеств $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $K_i \in \mathbf{L}$ для $i = 1, 2, \ldots, K_i \cap K_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) > \mu(K) - \varepsilon.$$

В настоящей заметке строятся меры на борелевских множествах являющиеся продолжением какой-нибудь множественной функции заданной на классе всех сфер в X. Эти меры описаны в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{K}$ класс подмножеств метрического пространства X содержащий пустое множество $\emptyset$ и покрывающий X в смысле Витали. Пусть μ неотрицательная, счетно-полуаддитивная, множественная функция, выполняющая условие (P) на $\mathbf{K}$. Пусть $\mu(\emptyset) = 0$.

Для любого множества $A \subset X$ положим

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathbf{K},\ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Тогда μ^* является внешней мерой, все борелевские множества μ^*-измеримые и $\mu^*(K) = \mu(K)$ для всех $K \in \mathbf{K}$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{K}$ некоторый класс открытых подмножеств метрического пространства X, содержающий пустое множество и покрывающий X в смысле Витали. Пусть μ действительная, счетно-аддитивная, неотрицательная множественная функция выполняющая на $\mathbf{K}$ условие (V). Пусть $\mu(\emptyset) = 0$.

Мы определим для U открытого

$$\lambda(U) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) : K_i \cap K_j = \emptyset,\ K_i \in \mathbf{K},\ K \subset U,\ i = 1, 2, \ldots \}$$

и для произвольного $A \subset X$

$$\bar{\mu}(A) = \inf \{ \lambda(U) : A \subset U,\ U \text{ открытое} \}.$$

Тогда $\bar{\mu}$ является внешней мерой, все бореловские множества $\bar{\mu}$ — измеримые и $\bar{\mu}(K) = \mu(K)$ для $K \in \mathbf{K}$.

Дальше мы приводим некоторые следствия теоремы 1, а именно теорему 2 и одну теорему Э. Й. Миклэ и Т. Радо (см. [2], 15). В теореме 2 использовано для конструкции меры расширение Хаусдорфа S^{μ} (см. [2], 14) множественной функции μ. Наконец мы приводим некоторые достаточные условия для согласования функций μ^*, S^{μ}, $\bar{\mu}$ (лемма 2, теорема 4).

A NOTE ON THE CONSTRUCTION OF MEASURE

Beloslav Riečan

Summary

Let $\mathbf{K}$ be a non empty family of sets in some space X. Let μ be a real-valued set-function on $\mathbf{K}$. We shall say that μ is σ-aditive on $\mathbf{K}$ if the inequality $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) \leqq \mu\, K)$ holds for any sequence $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ of pairwise disjoint sets in $\mathbf{K}$ and any set $K \in \mathbf{K}$ such that $K_i \subset K$ for $i = 1, 2, \ldots$ We shall say that μ is σ-subaditive on $\mathbf{K}$ if the inequality $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) \geqq \mu(K)$ holds for any sequence $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ of sets in $\mathbf{K}$ and any $K \in \mathbf{K}$ such that $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset K$.

Let X be a metric space now. We shall say that μ satisfies the (P) condition on $\mathbf{K}$, if for every number $\varepsilon > 0$ and every set $K \in \mathbf{K}$ such that $\mu(K) < \infty$ there exists a sequence $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ of sets in $\mathbf{K}$ such that $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \supset K$, diam $K_i < \varepsilon$ for $i = 1, 2, \ldots$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) < \mu(K) + \varepsilon$.

Furthermore let $\mathbf{K}$ covers ~~a~~ space X in the Vitali sens. We shall say that μ satisfies the (V) condition on $\mathbf{K}$ if the following proposition holds: Let K be any set in $\mathbf{K}$, μ be any positive number and $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ be any family of sets covering K in the Vitali sens such that $L \subset K$ for every $L \in \mathbf{L}$. Then there exists a sequence $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ of pairwise disjoint sets such that $K_i \in \mathbf{L}$ for $i = 1, 2, \ldots$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) > \mu(K) - \varepsilon$.

In this paper some measures on the family of Borel sets are constructed by extension set functions defined for all the open spheres in any metric space. Constructions of these measures are writen in the following theorems.

Theorem 1. Let $\mathbf{K}$ be a family of sets in a metric space X, which inculds the empty set 0. Let μ be a non-negative, σ-subaditive set-function which satisfies the (P) condition on $\mathbf{K}$. Let $\mu(0) = 0$. For any $A \subset X$ we define

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A,\ A_i \in \mathbf{K},\ i = 1, 2, \ldots \}.$$

Then μ^* is an outer measure for which all the Borel sets are μ^*-measurable and $\mu(K) = \mu^*(K)$ for $K \in \mathbf{K}$.

Theorem 3. Let $\mathbf{K}$ be a family of some open sets in a metric space X which inculds 0 and covers X in the Vitali sens. Let μ be real valued, non-negative, σ-aditive set-function on $\mathbf{K}$ which satisfies the (V) condition on $\mathbf{K}$. Let $\mu(0) = 0$. We define for any U open

$$\lambda(U) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i) : K_i \cap K_j = 0,\ K_i \in \mathbf{K},\ K_i \subset U,\ i = 1, 2, \ldots \}.$$

Further, for any set $A \subset X$ we define

$$\bar{\mu}(A) = \inf \{ \lambda(U) : A \subset U,\ U\ \mathit{open} \}.$$

Then $\bar{\mu}$ is an outer measure such that all the Borel sets are $\bar{\mu}$-measurable and $\mu(K) = \bar{\mu}(K)$ for $K \in \mathbf{K}$.

Some corollaries of the theorem 1 are given. A theorem of E. J. Mickle and T. Rado (see [2], 15) and the theorem 2 of this paper are shown to be such corrollaries. In the theorem 2 the Hausdorff extension S^{μ} (see [2], 14) of a set-function μ on $\mathbf{K}$ is used for a construction of measure ($\mathbf{K}$ is the family of all the open spheres in X). Finally some sufficient conditions are given for equality of set-functions μ^*, S^{μ}, $\bar{\mu}$ (lemma 2, theorem 4).