K PROBLEMATICE ZÁKLADNÍ VĚTY CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

LADISLAV DRS, Praha

Mějme pravoúhlou souřadnicovou soustavu s osami x_1^*, x_2^*, x_3^* protínajícími se v bodě O^*. Jednotkové body os označme A_1^*, A_2^*, A_3^* a nevlastní body os B_1^*, B_2^*, B_3^*. Středový průmět této souřadnicové soustavy s body A_1^*, A_2^*, A_3^*, B_1^*, B_2^*, B_3^* je „axonometrická soustava“ $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$, kde středové průměty označujeme stejnými písmeny bez hvězdičky. V axonometrické soustavě je sedm bodů O, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 vázáno t. zv. základní větou [2], takže naopak při určování axonometrické soustavy lze jen pět bodů volit libovolně. Tím dostáváme devět různých typů úloh, jejichž analytické řešení je za určitých omezujících předpokladů provedeno v práci [3]. Některé z těchto devíti typů byly řešeny již dříve synteticky (typ 2, 4, 6) v pracích [1], [2]. Ukážeme zde řešení následujícího problému (typ 3):

„Určit body A_2, B_1 axonometrické soustavy $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$, jsou-li dány její body O, A_1, A_3, B_2, B_3.“

Z práce [2] je známo, že osa o perspektivních trojúhelníků $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ axonometrické soustavy protíná stranu B_iB_j v jednom ze dvou bodů P_{ij}, Q_{ij}, které mají tyto vlastnosti

$$(P_{ij}, Q_{ij}, B_i, B_j) = -1, \tag{1}$$

$$P_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{ij}Q_{ij}, \tag{2}$$

$$(V_{ij}, \sigma_{ij}, B_i, B_j) = -1, \tag{3}$$

kde V_{ij} je průsečík přímky B_iB_j s kolmicí z bodu B_k na přímku B_iB_j ($i \neq j \neq k \neq i$; $i, j, k = 1, 2, 3$), v případě, že body B_1, B_2, B_3 jsou vlastní. Trojúhelník $B_1B_2B_3$ je ostroúhlý.

Je-li bod B_k nevlastní, je určen směrem kolmým k B_iB_j a za bod V_{ij} lze volit libovolný vnitřní bod úsečky B_iB_j. Body P_{ij}, Q_{ij} mají pak opět vlastnosti (1), (2), (3) a body P_{ik}, Q_{ik}, P_{jk}, Q_{jk} splňují navíc podmínku

$$B_iP_{ik} = B_iQ_{ik} = \sqrt{B_iB_j \,.\, B_iV_{ij}}; \qquad B_jP_{jk} = B_jQ_{jk} = \sqrt{B_iB_j \,.\, B_jV_{ij}}.$$

Jsou-li body B_j, B_k nevlastní, určují je směry navzájem kolmé, body P_{jk}, Q_{jk} jsou nevlastní body těchto směrů a body P_{ij}, Q_{ij}, P_{ik}, Q_{ik} mají tuto vlastnost:

$$B_iP_{ij} = B_iQ_{ij} = B_iP_{ik} = B_iQ_{ik} = r,$$

kde r je libovolné.

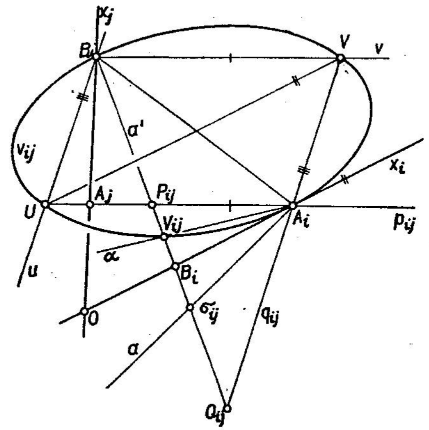
Určíme množiny bodů P_{ij}, Q_{ij}, σ_{ij}, V_{ij}, bude-li se bod B_i pohybovat po přímce $x_i = OA_i$. Bod B_k zatím neuvažujeme.

I. Předpokládejme nejprve, že body A_i, B_j jsou vlastní a přímky x_i, x_j různé (obr. 1).

1. *Body P_{ij} leží na přímce $A_iA_j = P_{ij}$.*

2. *Body Q_{ij} leží, vzhledem k podmínce* (1), *na přímce q_{ij}, určené podmínkou* $(p_{ij}, q_{ij}, x_i, A_iB_j) = -1$.

3. *Body σ_{ij}, středy úseček $P_{ij}Q_{ij}$ leží na hyperbole. Tato hyperbola má průměr A_iB_j, tečnu x_i v bodě A_i a směry asamptot p_{ij}, q_{ij}.*



Obr. 1.

Důkaz. Zvolme a',$(B_j \in a')$ a sestrojme přímky a'', a tak, aby platilo $A_i \in a''$, $a'' \parallel a'$, $(a, a'', p_{ij}, q_{ij}) = -1$. Pak je

$$B_j(a', \ldots) \barwedge A_i(a'', \ldots) \barwedge A_i(a, \ldots), \tag{4}$$

tedy svazky $B_j(a', \ldots)$, $A_i(a, \ldots)$ vytvoří kuželosečku jdoucí body B_j, A_i a označíme-li $a' \times p_{ij} = P_{ij}$, $a' \times q_{ij} = Q_{ij}$, je tato kuželosečka vytvořena středy σ_{ij} úseček $P_{ij}Q_{ij}$, což vyžaduje podmínka (2). Přímce A_iB_j odpovídá ve svazku A_i přímka x_i a ve svazku B_j přímka rovnoběžná. Přímce p_{ij} resp. q_{ij} odpovídá ve svazku B_j přímka rovnoběžná s p_{ij} resp. q_{ij}.

4. *Body V_{ij} leží na elipse. Body A_i, B_j jsou koncové body průměru, průměr sdružený je rovnoběžný s přímkou x_i a je omezen přímkami p_{ij}, q_{ij}.*

Důkaz. K přímce a svazku A_i sestrojme přímku α, $(A_i \in \alpha)$ tak, aby $(\alpha, a, x_i, A_iB_j) = -1$. Pak je $A_i(a, \ldots) \barwedge A_i(\alpha, \ldots)$ a z podmínky (4) plyne $B_j(a', \ldots) \barwedge A_i(\alpha, \ldots)$. Svazky B_j, A_i vytvářejí kuželosečku jdoucí body B_j, A_i na níž vzhledem k (3) leží body V_{ij}. Přímce A_iB_j odpovídá ve svazku A_i přímka x_i a ve svazku B_j přímka

rovnoběžná. Přímce p_{ij} resp. q_{ij} odpovídá ve svazku B_j přímka $u \parallel q_{ij}$ resp. $v \parallel p_{ij}$. Body $U = u \times p_{ij}$, $V = v \times q_{ij}$ jsou koncové body průměru sdruženého s A_iB_j.

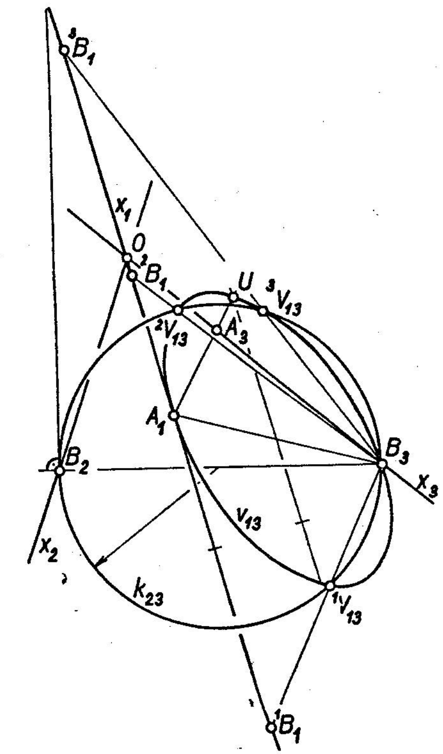
5. *Vezmeme-li v úvahu též daný bod B_k, leží body V_{ij} na kružnici k_{jk} nad průměrem B_jB_k, je-li bod B_k vlastní. Je-li bod B_k nevlastní, nastoupí místo kružnice k_{jk} přímka vedená bodem B_j kolmo k přímce B_jB_k.*

Snadno bychom dokázali, že konstrukce křivek σ_{ij} a v_{ij} se zjednoduší, je-li bod A_i nebo bod B_j nevlastní. Křivky σ_{ij} a v_{ij} jsou pak totiž přímkami.

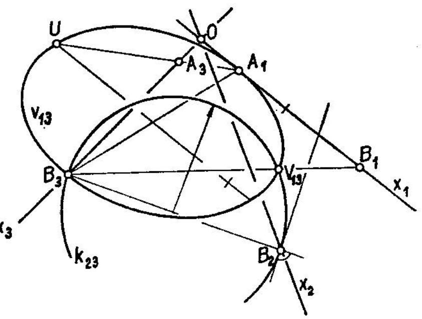
Jsou-li současně nevlastní body B_j i B_k, lze axonometrickou soustavu sestrojit pouze tehdy, jak už bylo vpředu řečeno, je-li $x_j \perp x_k$. Pak se bod A_j určí z podmínky $OA_j = OA_k$ a bod B_i lze volit na přímce x_i v libovolném jejím vlastním bodě. Axonometrických soustav existuje v tomto případě nekonečně mnoho.

Z toho plyne řešení naší úlohy.

Sestrojíme elipsu v_{13} a kružnici k_{23}. Protože obě křivky mají společný bod B_3, mají ještě další tři nebo jeden společný bod. Spojnice těchto společných bodů s bodem B_3 protnou přímku x_1 v bodech, z nichž každý může být hledaným vrcholem B_1 ostroúhlého úběžníkového trojúhelníka $B_1B_2B_3$. Označíme-li p jejich počet, pak platí $0 \leqq p \leqq 3$, jak ukazují příklady, obr. 2, $p = 3$, obr. 3, $p = 0$. Je-li určen úběž-



Obr. 2.



Obr. 3.

níkový trojúhelník, sestrojíme osu o perspektivity $o = P_{12}P_{13}$ a k bodu B_2 perspektivně sdružený A_2.

II. Budiž $x_i = x_j$, B_k vlastní, kolmice z B_k na x_i určí na x_i bod V_{ij}. Na přímce $x_i = x_j$ platí

$$(O, P_{ij}, A_i, B_i) = (O, P_{ij}, A_j, B_j). \tag{5}$$

Tato podmínka spolu s podmínkami (1), (2), (3) nám umožní konstrukci bodu B_i. Zvolme libovolný bod $B_i \in x_i$. Ze vztahu (5) se určí bod P_{ij}, z (1) bod Q_{ij} a bod $\sigma = \sigma_{ij}$ lze určit jednak z podmínky (2), jednak z podmínky (3). Označíme-li σ z podmínky (2) jako σ_{I} a σ z podmínky (3) jako σ_{II}, pak jsou σ_{I}, σ_{II} páry involuce J indukované na přímce x_i vztahy (1) – (5). Samodružný bod této involuce je hledaný bod B_i. Při určení této involuce můžeme postupovat následujícím způsobem: Zvolme B_i^1 tak, aby $B_i^1 V_{ij} = V_{ij} B_j$. Pak je σ_{II}^1 nevlastní, σ_{I}^1 je středem involuce J. Zvolme $B_i^2 = V_{ij}$, $\sigma_{\mathrm{II}}^2 = V_{ij}$, určíme σ_{I}^2. Středem σ_{I}^1 a párem σ_{I}^2, σ_{II}^2 je involuce určena. Každý její samodružný bod lze vzít za B_i, určují-li body B_1, B_2, B_3 ostroúhlý trojúhelník.

Je-li bod B_k nevlastní, musí být především přímka $x_i = x_j$ kolmá k přímce x_k. Bod B_i volíme libovolně. Soustav existuje nekonečně mnoho.

Konstrukci bodu A_j provedeme stejně jako v odst. I.

Z těchto úvah plyne tento souhrnný výsledek: *Existuje p axonometrických soustav, kde* $0 \leqq p \leqq 3$, *jsou-li body* B_2, B_3 *vlastní a nekonečně mnoho axonometrických soustav, je-li aspoň jeden z bodů* B_2, B_3 *nevlastní* (a jsou-li současně splněny další podmínky, které musí v tomto případě body B_2, B_3 mít, a které jsme vždy na příslušném místě vytknuli).

Tím jsou doplněny výsledky práce [3], kde nebyla zodpovězena otázka, zda je možné, aby řešení problému neexistovalo. Naše úvahy řeší otázku za obecnějších předpokladů. V práci [3] jsou osy x_1, x_2, x_3 navzájem různé, body A_1, B_3 vlastní.

LITERATURA

[1] Четверухин Н. Ф., *Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции*, Методы начертательной геометрии и ее приложения, Сборник статей (1955), 105—111.

[2] Drs L., *O základní větě centrální axonometrie*, Časopis pro pěst. mat., 82 (1957), 165—174.

[3] Палувер Н. В., *Аналитический метод для построения аксонометрических систем координат в центральной проекции*, Труды таллинского полит. инст., серия А, № 120, 1957.

Došlo 24. 7. 1961.

Katedra matematiky
Stavební fakulty
Českého vysokého učení technického
v Praze

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

Ладислав Дрс

Резюме

В настоящей работе решится следующая проблема:

Построение точек A_2, B_1 аксонометрической системы $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$ из данных точек O, A_1, A_3, B_2, B_3 этой системы.

Мы получаем максимально шесть центров проекции и к каждому из них две ортогональные системы координат с единственными точками A_2^*, A_2^*, A_3^* и несобственными точками B_1^*, B_2^*, B_3^*, которые проектируются из этих центров в аксонометрическую систему $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$ с данными точками O, A_1, A_3, B_2, B_3.

ZUR PROBLEMATIK DES HAUPTSATZES DER ZENTRALEN AXONOMETRIE

Ladislav Drs

Zusammenfassung

In dieser Arbeit löst man folgendes Problem:

Die Punkte A_2, B_1 des axonometrischen Achsenkreuzes $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$ zu konstruiren, wenn seine Punkte O, A_1, A_3, B_2, B_3 gegeben sind.

Es gibt höchstens sechs Zentren der Projektion und zu jedem Zentrum existieren zwei rechtwinklige Koordinatensysteme mit Einheitspunkten A_1, A_2, A_3 und Fernpunkten B_1, B_2, B_3 solcher Eigenschaft, daß ihre Projektion das axonometrische System $\{O, A_i, B_i\}_{i=1}^3$ mit gegebenen Punkten O, A_1, A_3, B_2, B_3 ist.