MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 1

4/6666 K

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ К-ПОЛИЭДРЫ

ЭРНЕСТ ЮЦОВИЧ (Ernest Jucovič), Прешов

Самосопряженные полиэдры (Брюкнер [1] называет их „autopolar", Штейниц [2] „zu sich selbst reziprok") не являлись в последние десятилетия предметом глубокого изучения. В настоящей работе приводятся некоторые новые сведения о них. В 1 части вводятся основные понятия. Во 2 части рассматриваются свойства самосопряженных К-полиэдров, главным образом комбинаторного характера. В 3 части дается метод построения всех отличных друг от друга типов самосопряженных К-полиэдров с девятью гранями и в 4 части дается их обзор.

1

Определение 1. *Пусть M — конечное множество элементов, каждый из которых принадлежит одному и только одному из трех видов: вершины, ребра и грани. Пусть о каждых двух элементах разного вида известно, инцидентны ли они; притом для соотношения инцидентности справедливо: Если вершина A инцидентна с ребром a, ребро a с гранью α, то вершина A инцидентна с гранью α.*

Множество M назовем К-полиэдром, если оно удовлетворяет условиям:

Ia) *Каждое ребро инцидентно с двумя и только двумя вершинами.*

Iб) *Каждое ребро инцидентно с двумя и только двумя гранями.*

IIa) *Для заданных двух вершин существует не более одного ребра, инцидентного с ними.*

IIб) *Для заданных двух граней существует не более одного ребра, инцидентного с ними.*

IIIa) *Каждая вершина инцидентна по меньшей мере с тремя гранями.*

IIIб) *Каждая грань инцидентна по меньшей мере с тремя вершинами.*

IV *Для числа s граней, v вершин и h ребер имеет место*

$$s + v = h + 2.$$

Под определение К-полиэдра подходит всякий выпуклый многогранник, определенный, например, как граница ограниченного непустого пересечения конечного числа полупространств, содержащего четверку точек, не лежащих на однойпрямой. Его грани — выпуклые многоугольники, ребра — отрезки, — вершины точки.

Дальнейшие примеры К-полиэдров получим следующим образом:

1. Построим центральную проекцию граней, ребер и вершин выпуклого полиэдра на его грань с наибольшим числом ребер таким образом, чтобы между выпуклым полиэдром и его проекцией было установлено взаимно однозначное соответствие; этого всегда можно добиться. Мы получим фигуру (см. рис. 1) — назовем ее фигурой Шлегеля (термин заимствован от Соммервиля [5]), — являющуюся К-полиэдром. Многоугольники – грани, их стороны — ребра и вершины — вершины нашего К-полиэдра. Дело в том, что при центральном проектировании сохраняется инцидентность.

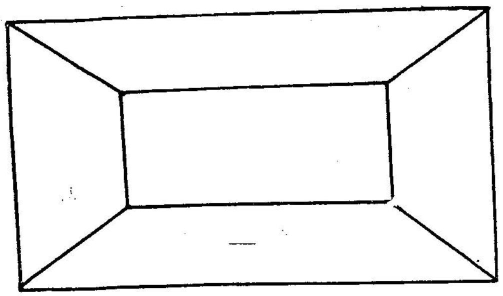

Рис. 1.

1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1

Рис. 2.

2. Пусть у нас имеется выпуклый полиэдр с s гранями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ и v вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_v$. Сопоставим ему прямоугольную матрицу M с s строками и v столбцами, состоящую из нулей и единиц — назовем ее матрицей полиэдра — следующим образом: Грани α_m $(m = 1, \ldots, s)$ полиэдра сопоставим m-тую строку, вершине $A_n (n = 1, \ldots, v)$ n-ный столбец матрицы. Если вершина A_n инцидентна с гранью α_m, то на пересечении n-ного стобца и m-той строки — единица, если же не инцидентна — нуль. — Каждому ребру данного полиэдра тогда будет соответствовать двухстрочечная субматрица матрицы полиэдра M, состоящая из одних только единиц. (На рис. 1 фигура Шлегеля сопоставлена параллелепипеду, на рис. 2 матрица полиэдра сопоставлена параллелепипеду).

Определение 2. *Два К-полиэдра назовем эквивалентными, если существует такое взаимно однозначное соответствие между их вершинами, ребрами и гранями, что сохраняется инцидентность.*

Определение 3. *Класс эквивалентных друг другу К-полиэдров назовем типом К-полиэдров.* (Другие употребляемые в литературе названия — „топологический тип“ и „комбинаторный тип“.)

В аналогичном смысле, как о типах К-полиэдров, можно тогда говорить о типах выпуклых полиэдров, о типах матриц полиэдра или же фигур Шлегела.

В качестве примера эквивалентности К-полиэдров приведем: Взаимно эквивалентны все параллелепипеды, ромбоэдры, усеченные четырехугольные пирамиды, фигура Шлегеля на рис. 1 и матрица полиэдра на рис. 2. Значит, все они принадлежат одному и тому же типу T_1; если нашей целью является лишь отличить этот тип от другого типа T_2, то достаточно рассматривать одного представителя типа T_1 (одного представителя типа T_2), одну интерпретацию.

Штейниц [2] (см. также Люстерник [3]) доказал теорему, имеющую для теории полиэдров основополагающее значение и мы ею будем в дальнейшем пользоваться.

Теорема 1. *Для всякого К-полиэдра существует эквивалентный ему выпуклый многогранник.*

Остановимся немного на матрицах полиэдра. Прежде всего, согласно Штейницу [2] справедливо, что сопоставленная указанным способом выпуклому полиэдру M (а значит, любому К-полиэдру) матрица полиэдра P полностью характеризирует тип полиэдра M;* значит, все К-полиэдры, которым можно сопоставить матрицу P, взаимно эквивалентны.

Далее, какой вид имеют взаимно эквивалентные матрицы полиэдра?

Когда мы записываем, с какими из вершин инцидентны грани $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ $\alpha_j, \ldots, \alpha_k, \ldots$ выпуклого полиэдра M, мы можем в j-тую строку записать грань α_j, в k-тую α_k; но ведь индексы при обозначениях граней мы можем поменять местами и грань, обозначенную первоначально через α_j, записать в k-тую строку, а другую в j-тую строку. Таким образом, мы получим две отличные друг от друга матрицы, причем обе они эквивалентны одному и тому же К-полиэдру. Значит, они также эквивалентны друг другу. Аналогично можно менять местами вершины — столбцы. Весь процесс можно выполнять в обратном порядке.

Итак, имеет место

Теорема 2. *Две матрицы полиэдра M_1, M_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда перестановкой строк и перестановкой столбцов матрицы M_1 можно прийти к матрице M_2.*

Например, взаимно эквивалентными будут матрицы полиэдра на рис. 3; обе они эквивалентны трехугольной призме.

Определение 4. *Пусть M_1 — матрица полиэдра со строками (гранями) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и столбцами (вершинами) $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Матрицу M_2, транспонированную к M_1, строками которой являются, таким образом, стобцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а столбцами — строки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ матрицы M_1, назовем сопряженной с матрицей полиэдра M_1.*

* Для невыпуклых полиэдров это в общем случае не имеет места.

Путем сравнения с определением 1 обнаруживается, что если M_1 — матрица полиэдра, то и M_2 — матрица полиэдра. — Соотношение сопряженности перенесем и на типы К-полиэдра, которым матрицы полиэдра M_1, M_2 принадлежат, а также на выпуклые полиэдры и фигуры Шлегеля, эквивалентные M_1, M_2.

Очевидно, справедлива

Теорема 3. *Соотношение сопряженности К-полиэдров симметрично.*

В качестве примера приведем матрицы полиэдра на рис. 3, 4а, которые взаимно сопряжены. Матрице полиэдра на рис. 4а эквивалентно тело на рис. 4б.

Далее, относительно взаимно сопряженных К-полиэдров P_1, P_2 справедливы:

1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1

0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0

Рис. 3.

1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
0	1	1	0	1

Рис. 4а.

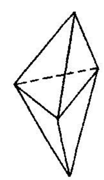

Рис. 4б.

Теорема 4. *К-полиэдры P_1, P_2 имеют одинаковое число ребер.*

Теорема 5. *Если полиэдр P_1 имеет p граней, каждая из которых инцидентна с q вершинами, то P_2 имеет p вершин, каждая из которых инцидентна с q гранями.*

Обе последние теоремы вытекают непосредственно из определения 4.

Теорема 6. *Если в полярном отображении относительно некоторой сферической поверхности образом выпуклого полиэдра P является полиэдр P', то типы полиэдров P, P' взаимно сопряжены.*

Эта теорема вытекает из свойств полярного отображения.

2

Определение 5. *Матрицу полиэдра P (а также всякий эквивалентный с нею К-полиэдр, и ее тип) назовем самосопряженной, если она эквивалентная матрице полиэдра P', сопряженной с P.*

Теорема 7. *Матрица полиэдра будет самосопряженной тогда и только тогда, когда она эквивалентна матрице, симметричной относительно диагонали.*

Доказательство. 1. Пусть матрице полиэдра M эквивалентен выпуклый полиэдр P с гранями α_i ($i = 1, 2, 3, 4 \ldots$); пусть в полярном отображении P' — образ полиэдра P, причем образом грани α_i является вершина A_i' полиэдра

P'. Согласно теореме 6 и определению 5 P и P' — эквивалентные полиэдры; соотнесенную вершине A_i' (согласно определению 2) вершину полиэдра P обозначим через A_i. Таким образом, для полиэдра P получаем взаимно однозначное соответствие граней α_i и вершин A_i, сохраняющее инцидентность. Это означает, что если грань α_i инцидентна с вершинами A_j, A_k, A_l, то вершина A_i инцидентна с гранями α_j, α_k, α_l. Сопоставленная выпуклому полиэдру P (с обозначенными указанным образом гранями и вершинами) матрица полиэдра M_1 имеет тогда единицами элементы a_{ij}, a_{ik}, a_{il}, но также a_{ji}, a_{ki}, a_{li}. Значит, матрица полиэдра M_1, эквивалентная M, симметрична.

2. Наоборот, пусть матрица полиэдра A симметрична относительно диагонали. Тогда сопряженная матрица совпадает с ней, поэтому матрица полиэдра A самосопряжена.

Примером самосопряженных К-полиэдров могут служить обе эквивалентные друг другу матрицы полиэдра на рис. 5 (одна из них симметрична относительно диагонали), далее, все пирамиды и пр.

1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1

0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1

Рис. 5.

Самосопряженные выпуклые полиэдры в половине прошлого века рассматривал Киркман в работе, результаты которой поданы у Брюкнера [1]. За последние десятилетия — поскольку нам известно — эта особая группа К-полиэдров более подробно не изучалась.

Из свойств взаимно сопряженных К-полиэдров следует, что у самосопряженных К-полиэдров грань и вершина — дуальные элементы. Следовательно, если в дальнейших утверждениях речь пойдет о гранях, то аналогичные утверждения будут иметь место также для вершин самосопряженных К-полиэдров.

Теорема 8. *Самосопряженный К-полиэдр с s гранями имеет $2(s-1)$ ребер.*

Доказательство. Если обозначить через h число ребер, то согласно определению 1

$$s + s = h + 2, \text{ т. е. } h = 2(s-1).$$

Примечание. Теоремы 7, 8 вместе с определением 1 позволяют характеризовать самосопряженную матрицу полиэдра: это будет s-строчечная симметричная матрица ($s \geqq 4$), состоящая из нулей и единиц, каждая строка которой содержит по меньшей мере три единицы и никакие две строки не имеют более одной общей квадратной двухстрочечной субматрицы, состоящей из единиц, причем во всей матрице таких квадратных двухстрочечных субматриц, состоящих из единиц, содержится $2(s-1)$.

Теорема 9. *В самосопряженной матрице полиэдра A с s гранями имеется $4(s-1)$ единиц.*

Доказательство. Единица будет в матрице полиэдра тогда и только тогда, когда некоторая вершина инцидентна с некоторой гранью; всего в ней столько единиц, сколько имеется в данном полиэдре инцидентных пар грань — вершина. Пусть K — выпуклый полиэдр, эквивалентный матрице полиэдра A. Если грань α_i полиэдра K имеет h_i ребер, то она имеет h_i инцидентных пар грань — вершина ($i = 1, 2, \ldots, s$). Тогда число всех таких пар равно $m = h_1 + h_2 + \ldots + h_s$. В этой сумме каждое ребро полиэдра K фигурирует два раза, поэтому $m = 2h$ (где h — число ребер полиэдра K, а также матрицы полиэдра A). Тогда, согласно теореме 8, инцидентных пар грань — вершина, т. е. единиц в матрице полиэдра A, будет $m = 2h = 4(s-1)$.

Теорема 10. *Существует единственный тип самосопряженных К-полиэдров, все грани которых инцидентны с тремя и только тремя вершинами — К-полиэдры, эквивалентные четырехграннику.*

Доказательство. Для числа s граней, h ребер такого самосопряженного К-полиэдра справедливо $3s = 2h = 4(s-1)$, т. е. $s = 4$. Тип К-полиэдров с четырьмя гранями — единственный тип.

Теорема 11. *Существует единственный тип самосопряженных К-полиэдров с $s > 4$ гранями, точно одна грань которых инцидентна с более чем тремя ребрами: К-полиэдры, эквивалентные $(s-1)$-угольной пирамиде.*

Доказательство. Существование следует из того, что $(s-1)$-угольная пирамида является самосопряженным выпуклым полиэдром и обладает указанным свойством.

Наоборот, если задан самосопряженный К-полиэдр с указанными свойствами, т. е. его $s-1$ граней инцидентны с тремя ребрами, то обозначим через x число ребер, инцидентных с остающейся гранью. Для числа h ребер рассматриваемого К-полиэдра и для числа x из теоремы 8 следует $(s-1)\,3 + x = 2h = 4(s-1)$, откуда $x = s-1$. Значит, одна грань (и одна вершина) инцидентна с $(s-1)$ ребрами, обозначим ее через $\alpha \equiv A_1A_2 \ldots A_{s-1}$. Она имеет тогда со всеми остальными гранями $A_1A_2B_1, A_2A_3B_2, \ldots, A_{s-1}A_1B_{s-1}$ общее как раз одно ребро $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{s-1}A_1$. Для вершины B_i $(i = 1, \ldots, s-1)$ имеем $B_i \not\equiv A_j$ $(j = 1, \ldots, s-1)$, так как в противном случае грань $A_jB_iA_{j+1}$ лежала бы в плоскости $A_1A_2A_3$ (имеется в виду интерпретация при помощи выпуклого полиэдра). Но тогда $B_1 \equiv B_2 \equiv B_3 \equiv \ldots \equiv B_{s-1}$, поскольку рассматриваемый К-полиэдр имеет s вершин. Значит, наш полиэдр принадлежит типу $(s-1)$-угольной пирамиды, что и требовалось доказать.

Теорема 12. *Самосопряженный К-полиэдр с s гранями имеет $k \leqq s-4$ граней, инцидентных с более чем тремя ребрами.*

Доказательство. Каждая из этих k граней инцидентна по меньшей мере с четырьмя ребрами. С тремя ребрами инцидентны $s-k$ граней. Тогда для числа h ребер данного самосопряженного К-полиэдра справедливо $(s-k)\,.\,3 + k\,.\,4 \leqq 2h = 4(s-1)$, т. е. $k \leqq s-4$.

Следствием теоремы 12 является

Теорема 13. *Самосопряженный К-полиэдр имеет по меньшей мере четыре грани, инцидентные с тремя ребрами.*

Теорема 14. *Если самосопряженный К-полиэдр имеет четыре грани, инцидентные только с тремя ребрами, то каждая из остальных его граней инцидентна с четырьмя ребрами.*

Доказательство. Пусть полиэдр имеет s граней и h ребер, тогда $s-4$ граней инцидентны более чем с тремя ребрами. Обозначим их через α_i и пусть $x_i \geqq 4$ $(i = 1, \ldots, s-4)$ — число ребер, с которыми инцидентна грань α_i. Тогда $4\,.\,3 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{s-4} = 2h = 4(s-1)$ и дальше

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{s-4} = 4(s-1) - 4\,.\,3 = 4(s-4).$$

Никакое x_i не может быть больше 4, ибо в таком случае некоторое x_j $(j \neq i = 1, 2, \ldots, s-4)$ необходимо было бы меньше 4, что невозможно.

Справедлива также обратная теорема:

Теорема 15. *Если самосопряженный К-полиэдр имеет только такие грани, которые инцидентны с тремя или четырьмя ребрами, то число граней с тремя ребрами равно четырем.*

Доказательство. Обозначим через s число граней рассматриваемого К-полиэдра и через x число граней, инцидентных только с тремя ребрами. Тогда для числа h ребер имеем $3x + 4(s-x) = 2h = 4(s-1)$, т. е. $x = 4$.

Теорема 16. *Если в самосопряженном К-полиэдре с s гранями инцидентны точно n граней с более чем тремя ребрами, то точно $n-1$ граней инциденты с четырьмя ребрами тогда и только тогда, когда одна грань инцидентна с $s-n$ ребрами.*

Доказательство. Пусть $x_i \geqq 4$ $(= 1, 2, \ldots, n)$ — число ребер, с которыми инцидентна грань α_i. Тогда для числа h ребер рассматриваемого К-полиэдра имеем $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (s-n)\,.\,3 = 2h = 4(s-1)$.

1. Пусть $x_1 = s-n$. Тогда $(s-n) + x_2 + \ldots + x_n = s-4+3n$,

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 4(n-1).$$

Никакая из граней $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ не может быть инцидентной с более чем четырьмя ребрами, ибо в таком случае другая из них была бы инцидентна не более чем с тремя, что противоречит допущению.

2. Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 4$. Тогда

$$x_n = 4(s-1) - (s-n) \cdot 3 - 4(n-1) = s - n.$$

Теорема 17. *Пусть A — самосопряженная матрица полиэдра с s гранями. Если к ней присоединить строку или столбец или строку и столбец, то получится матрица B, не являющаяся самосопряженной матрицей полиэдра.*

Доказательство. По теореме 9 в матрице A содержится $4(s-1)$ единиц. Если к ней присоединить одну строку и один столбец, то тем самым к ней будет присоединено — в силу того, что в строке и столбце содержится хотя бы по три единицы — по меньшей мере пять единиц (одна из них могла бы находиться на пересечении данной строки и столбца). Матрица B имеет тогда $p \geqq 5+4(s-$ $-1) = 1 + 4s > 4s$ единиц, т. е. она не будет самосопряженной. — Если к матрице A присоединить только строку или же только столбец, то получится не квадратная матрица, а значит, тем более не самосопряженная.

Из доказательства теоремы 17 следует

Теорема 18. *Никакая $(s-1)$-строчечная субматрица самосопряженной матрицы полиэдра с s строками не является самосопряженной матрицей полиэдра.*

Мы ставим себе целью доказать, что самосопряженные К-полиэдры из теорем 14—16 существуют. Сначала договоримся: Будем говорить, что между гранью α и вершиной A самосопряженного К-полиэдра M установлено соответствие, если в матрице полиэдра, эквивалентной полиэдру M, приведенной к симметричному виду, строка α и столбец A взаимно симметричны.

В общем случае такое взаимное соответствие грань — вершина не обязательно однозначно, т. е. существует такой самосопряженный К-полиэдр (пирамиды), что в одной эквивалентной ему симметричной матрице полиэдра с гранью (строкой) α симметрична вершина (столбец) A, а в другой с α симметричен столбец $B \neq A$. Однако, на результаты дальнейших рассуждений это влияния не оказывает; мы в дальнейшем будем всегда иметь в виду только одно из возможных соответствий.

Проделаем теперь такое построение: Пусть M — самосопряженный К-полиэдр с s гранями, в котором грани ω соотнесена вершина O. Грань ω инцидентна с вершинами $A, B, C, D, \ldots$, вершина O с гранями $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$; сразу же видно, что и эти вершины и грани должны находиться в соответствии; итак, пусть ими будут A и α, B и β, C и $\lambda, \ldots$ (см. рис. 6). Заменим грань ω на две грани ω_1, ω_2, которые обе инцидентны с новым ребром BD — иначе кроме B, D общих вершин у граней ω_1, ω_2, разумеется, нет („мы расщепляем грань ω диагональю BD“). Проделаем также дуальные действия с вершиной O, т. е.

заменим ее на две вершины O_1, O_2, причем новое ребро O_1O_2 инцидентно с гранями β, δ („мы расщепляем вершину O“). Если вершины A, B, $D, \ldots$ инцидентны с ω_1 (ω_2), то сопоставленные им грани α, β, δ инцидентны с O_1 (O_2). Мы получаем новый К-полиэдр M', который имеет $s+1$ граней и является также самосопряженным (см. Брюкнер [1]).

Заметим еще, каким образом после нашего расщепления грани диагонально и после дуального ему расщепления сопоставленной вершины изменилось

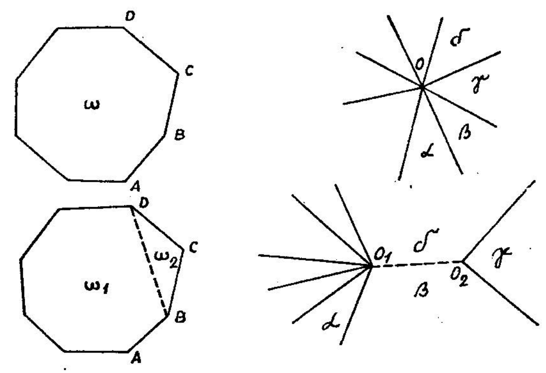

Рис. 6.

число ребер, с которыми инцидентны вершины B, D и грани β, δ. Если в К-полиэдре M вершина B (а значит, также грань β) была инцидентна с i ребрами, вершина D (а значит, также грань δ) с j ребрами, то в К-полиэдре M' инцидентны вершина B и грань β с $i+1$ ребрами, вершина D и грань δ с $j+1$ ребрами.

А теперь уже можно перейти к доказательству сужествования самосопряженных К-полиэдров из теорем 14—16. Мы построим их при помощи описанного только что построения из пирамид, которые, как нам известно, являются самосопряженными К-полиэдрами.

На рисунках мы будем изображать только их основания и расщепления оснований диагоналями; следовательно, если в некоторую вершину на рисунке будут стекаться три ребра, то этой вершине будет сопоставлена четырехугольная грань.

Теорема 19. *Для всякого натурального числа $s > 4$ существует самосопряженный К-полиэдр с s гранями, каждая из которых инцидентна с тремя или четырьмя ребрами.*

Доказательство. Для числа s имеет место либо а) $s-1 = 3k$, либо б) $s = 3k$, либо в) $s+1 = 3k$.

а) $s-1 = 3k$ (рис. 7а). Рассмотрим $(2k+1)$-угольную пирамиду. Ее основание $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1} \ldots A_{2k+1}$ расщепляем диагоналями A_iA_{2k+1-i} $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$

на один треугольник и $(k-1)$ четырехугольников. Проделаем также соответствующие расщепления вершин, находящихся с этими гранями в некотором выбранном соответствии. Мы получаем самосопряженный К-полиэдр, имеющий $1 + (k-1) + (2k+1) = 3k + 1 = s$ граней (а именно, из основания пирамиды один треугольник и $(k-1)$ четырехугольников, далее $(2k+1)$ граней, образованных из боковых граней пирамиды). Никакая из этих граней не инцидентна с более чем 4 вершинами.

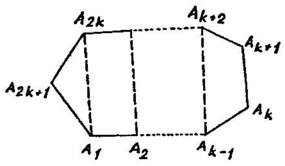

Рис. 7а.

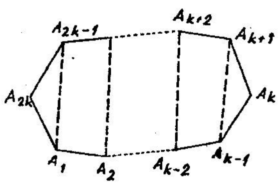

Рис. 7б.

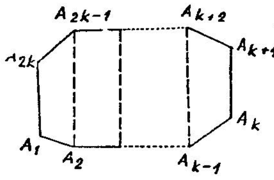

Рис. 7в.

б) $s = 3k$ (рис. 7б). Рассмотрим $2k$-угольную пирамиду. Ее основание $A_1A_2 \dots A_kA_{k+1} \dots A_{2k-1}A_{2k}$ расщепляем диагоналями A_iA_{2k-i} $(i = 1, \dots, k-1)$ на два треугольника и $(k-2)$ четырехугольников. Если произвести к этим расщеплениям дуальные расщепления сопоставленных вершин, то получится самосопряженный К-полиэдр, имеющий $2 + (k-2) + 2k = 3k = s$ граней. Все они — треугольники или четырехугольники.

в) $s + 1 = 3k$ (рис. 7в). Рассмотрим снова $2k$-угольную пирамиду. Ее основание расщепляем диагоналями A_iA_{2k+1-i}, $(i = 2, \dots, k-1)$ на одни только четырехугольники; число их равно $(2k/2) - 1 = k - 1$. Проделаем также соответствующие расщепления сопоставленных вершин. Мы получаем самосопряженный К-полиэдр, имеющий $(k+1) + 2k = 3k - 1 = s$ граней — треугольных и четырехугольных.

Теорема 20. *Для каждой пары натуральных чисел $s > 4$, $n \leqq s - 4$ существует самосопряженный К-полиэдр с s гранями, одна из которых инцидентна с $(s-n)$ ребрами, $(n-1)$ граней инцидентны с четырьмя ребрами и остальные $(s-n)$ граней инцидентны с тремя ребрами.*

Доказательство. $n = 1$. Утверждение выполнено для $(s-1)$-угольной пирамиды.

$n = 2$. Утверждение выполнено для матрицы полиэдра M_6 и эквивалентной ей фигуры Шлегеля S_6 на рис. 8, где $s = 6$. Для $s = 7$: Заменим в M_6 пятую строку на две строки r_1, r_2 (одну за другой), где в r_1 единицы — в первом, втором и седьмом столбцах, в r_2 — в первом, шестом и седьмом столбцах. Присоединим новый столбец с единицами в первой, пятой и шестой строке.

Этому преобразованию матрицы M_6 эквивалентно такое преобразование фигуры Шлегеля S_6 (а тем самым и соответствующего выпуклого полиэдра):

Грань BEC заменяем на две грани BEK, EKC, причем вершина К инцидентна также с гранью BAD. — Аналогично можно поступать для $s = 8, 9, \dots$ граней. Всегда расщепляем ту треугольную грань с ребром BE, третья вершина которой инцидентна с гранью BAD, что для эквивалентной матрицы полиэдра означает замену пятой строки на две строки и присоединение столбца; в этом новом столбце единицы стоят на первом, пятом и шестом местах, в первой новой строке на первом, втором и s-ом местах, во второй новой строке единицы — на первом, $(s-1)$-ом и s-ом местах. Новая матрица также симметрична. Так как этими расщеплениями граней фигур Шлегеля получаем снова фигуры Шлегеря, то и эквивалентные им матрицы будут матрицами полиэдра.

0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1

Рис. 8а.

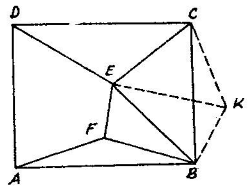

Рис. 8б.

$n > 2$. Из условий теоремы следует, что $m = s - n \geqq 4$. Обозначим через $p = n - 1$ число четырехугольных граней. При помощи чисел m, n, или, еще лучше, $m \geqq 4$, $p > 1$, число s определено.

Мы построим для всяких двух чисел $m \geqq 4$, $p > 1$ самосопряженный К-полиэдр, одна грань которого инцидентна с m ребрами, p граней инцидентны с четырьмя ребрами и остальные грани инцидентны с тремя ребрами; тем самым наша теорема будет доказана для всевозможных $n > 2$ и $s > 4$.

1. Пусть $m \geqq 4$ — произвольное натуральное число. Для числа p справедливо либо а) $p = 3r$ либо б) $p = 3r + 1$ либо в) $p = 3r + 2$.

а) $p = 3r$ $(r \geqq 1)$. Рассмотрим $(m + 2r)$-угольную пирамиду с основанием $A_1A_2 \dots A_{m+2r}$. Расщепляем это основание диагоналями $A_iA_{m+2r+1-i}$, $i = 2, 3, \dots, r+1$ (см. рис. 9а) и проделаем также расщепления (для некоторого соответствия) сопоставленных вершин. Мы получаем самосопряженный К-полиэдр, имеющий $p = 3r$ четырехугольных граней (r из основания и $2r$ соотне-

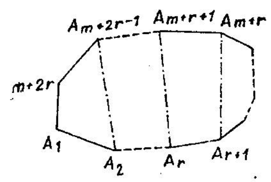

Рис. 9а.

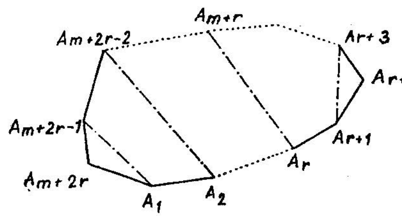

Рис. 9б.

сенных вершинам $A_2, \ldots, A_{r+1}, A_{m+r}, \ldots, A_{m+2r-1}$), одну m-угольную грань и остальные грани будут треугольными.

б) $p = 3r + 1$ ($r \geqq 1$). Рассмотрим, как и в предыдущем случае, $(m + 2r)$-у-гольную пирамиду. Но основание ее расщепляем диагоналями A_iA_{m+2r-i}, $i = 1, 2, \ldots, r$ и диагональю $A_{r+1}A_{r+3}$ (см. рис. 9б.) Проделаем также соответствующие расщепления сопоставленных вершин. Мыполучаем самосопряженный К-полиэдр, имеющий $r + 1 + 2(r + 1) = 3r + 1 = p$ четырехугольных, одну m-угольную грань и остальные грани будут треугольными.

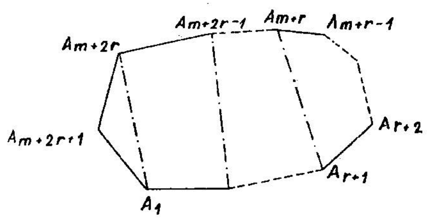

Рис. 10.

в) $p = 3r + 2$ ($r \geqq 0$). Возьмем $(m + 2r + 1)$-угольную пирамиду с основанием $A_1A_2 \ldots A_{m+2r+1}$ и расщепляем это основание диагоналями $A_iA_{m+2r+1-i}$, $i = 1, \ldots, r + 1$ (рис. 10). Если произвести также соответствующие расщепления сопоставленных вершин, то получится самосопряженный К-полиэдр с $r + + 2(r + 1) = 3r + 2 = p$ четырехугольными гранями, одной m-угольной гранью и остальные грани будут треугольными.

Теорема доказана. (Очевидно, метод доказательств теорем 18, 20 применим для построения иных типов самосопряженных К-полиэдров.)

3

Перейдем к отысканию всех типов самосопряженных К-полиэдров с 9 гранями. У Брюкнера [1] ~~даны~~ все типы самосопряженных выпуклых полиэдров с $n \leqq 8$ гранями. Другие перечисления типов самосопряженных К-полиэдров в литературе не упоминаются. Метод, который мы применим, отличается от метода, описанного у Брюкнера. Там делается одновременное расщепление граней, ребер и вершин (т. е. замена грани двумя гранями, ребра двумя ребрами, вершины двумя вершинами) самосопряженных выпуклых полиэдров с меньшим числом граней. (Смотри построение, использованное при доказательстве теорем 19, 20). Мы будем исходить из перечисления выпуклых полиэдров с восемью гранями Гермеса [4] и применим только расщепление ребер и граней К-полиэдров (Штейниц [2]).

Определение 6. *Пусть H — К-полиэдр, одна грань которого $\alpha \equiv A_1A_2 \ldots A_n$.*

I. *В полиэдре H заменим грань α на две грани α_1, α_2, которые обе инцидентны*

с новым ребром A_iA_j ($1 \leqq i < j - 1 \leqq n - 1$); грань α_1 инцидентна с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n$, грань α_2 с вершинами $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{j-1}, A_j$. Такую замену одной грани на две грани и новое ребро мы назовем расщеплением 1 вида (рис. 11).

II. *Пусть ребро A_iA_{i+1} инцидентно с гранью α, а также с гранью β. Заменим ребро A_iA_{i+1} на два ребра A_iB, BA_{i+1} и грань α на две грани α_1, α_2, которые обе инцидентны с новым ребром A_jB ($j < i$); грань α_1 инцидентна с вершинами $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, B$, грань α_2 с вершинами $B, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n, A_1, A_2, \ldots, A_j$. Грань β_1, образовавшаяся из грани β путем замены ребра A_iA_{i+1}, имеет с гранью α_1 общее ребро A_iB, с гранью α_2 ребро BA_{i+1} — расщепление 2 вида (рис. 12).*

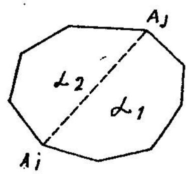

Рис. 11.

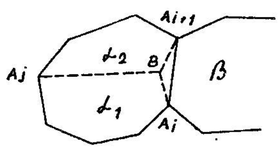

Рис. 12.

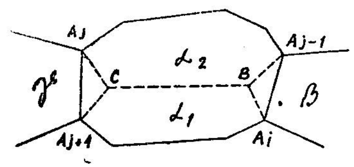

Рис. 13.

III. *Пусть, кроме α, инцидентно ребро A_iA_{i+1} с гранью β, ребро A_jA_{j+1} с гранью γ ($i > j$). Заменим ребро A_iA_{i+1} на два ребра A_iB, BA_{i+1}, а также ребро A_jA_{j+1} на два ребра A_jC, CA_{j+1}. Далее, заменим грань α на две грани α_1, α_2, которые обе инцидентны с новым ребром BC; грань α_1 инцидентна с вершинами B, C, $A_{j+1}, \ldots, A_n, A_1, A_2, \ldots, A_i$, грань α_2 инцидентна с вершинами $C, B, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_j$. Грань β_1, образовавшаяся из грани β, имеет с α_1 общее ребро A_iB, с α_2 ребро BA_{i+1}; грань γ_1 имеет с α_1 общее ребро CA_{j+1}, с α_2 — ребро A_jC — расщепление 3 вида (рис. 13).*

Простой проверкой убеждаемся, что множество вершин, ребер и граней, полученных расщеплениями 1, 2 и 3 видов ребер и граней К-полиэдра — К-полиэдр. Если первоначальный полиэдр имел s граней, h ребер и v вершин, то новый К-полиэдр имеет для всех видов расщеплений $(s + 1)$ граней и а) v вершин и $(h + 1)$ ребер после расщепления 1 вида, б) $(v + 1)$ вершин и $(h + 2)$ ребер после расщепления 2 вида, в) $(v + 2)$ вершин и $(h + 3)$ ребер после расщепления 3 вида.

Штейниц [2] доказал теорему:

Теорема 21. *Всякий К-полиэдр получается путем последовательных расщеплений 1, 2 и 3 видов из К-полиэдра с четырьмя гранями.*

Непосредственно из теоремы 21 вытекает

Теорема 22. *К-полиэдр с n гранями получается путем расщепления 1, 2 или 3 вида К-полиэдра с $(n - 1)$ гранями.*

Следовательно, если над всеми типами (собственно говоря, над их представителями) К-полиэдров с n гранями произвест ивсевозможные расщепления 1, 2 и 3 видов, то получатся все типы К-полиэдров с $(n + 1)$ гранями.

Конечно, все такие расщепления не нужно производить. Возможность уменьшить число необходимых расщеплений дают следующие теоремы:

Теорема 23. *Пусть A и A', B и B', C и C', D и D' — пары сопоставленных друг другу (в смысле определения 2) вершин двух эквивалентных К-полиэдров M_n и M'_n; пусть вершина B инцидентна с ребрами BA, BC, BD (а значит, B' с ребрами $B'A'$, $B'C'$, $B'D'$). Осуществим расщепление полиэдра M ребром AF, где F лежит между B, C (интерпретация при помощи фигуры Шлегеля) — получим полиэдр M_{n+1}. Дальше, проделаем расщепление полиэдра M'_n ребром $A'E$, где E лежит между B', D' — получаем полиэдр M'_{n+1}. Утверждается, что полиэдры M_{n+1}, M'_{n+1} эквивалентны.*

Доказательство. В полиэдрах M_{n+1}, M'_{n+1} установим соответмтвие $F \leftrightarrow B'$, $E \leftrightarrow B$; сопоставление остальных вершин оставим таким, каким оно было в M_n, M'_n, т. е. $A \leftrightarrow A'$, $C \leftrightarrow C'$, $D \leftrightarrow D'$, ... (см. рис. 14). Тогда мы можем

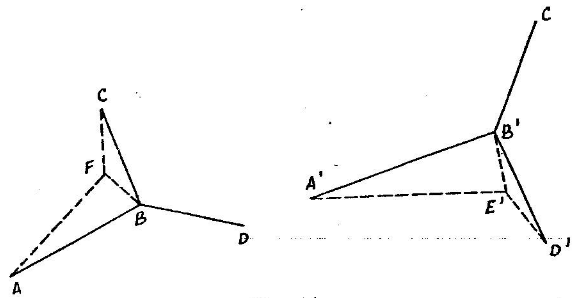

Рис. 14.

сопоставить друг другу также ребра $CF \leftrightarrow C'B'$, $BF \leftrightarrow B'E$, $BD \leftrightarrow D'E$, $AB \leftrightarrow A'E$, $AF \leftrightarrow A'B'$. Тогда сопоставлены друг другу также грани $CAF \leftrightarrow$ $\leftrightarrow C'B'A'$, $AFB \leftrightarrow AB'E$, $ABD \leftrightarrow A'ED'$, $BDFC \leftrightarrow D'EB'C'$. Грань AFC инцидентна с таким же числом вершин, что и грань ABC полиэдра M_n, а значит, с таким же числом, что и $A'B'C'$; то же самое относится и к паре граней $A'ED'$, ABD, Грани AFB, $A'B'F'$ имеют по три вершины. Число вершин, с которыми инцидентны грани $DBFC$, $D'EB'C'$, на единицу больше числа граней DBC, $D'B'C'$ полиэдров M_n, M'_n, т. е. оно для обоих одинаково. Следовательно, сопоставление остальных вершин рассматриваемых граней может остаться таким, каким оно было в полиэдрах M_n, M'_n. Описанным установлением соответствия между вершинами A, B, C, D, F, и вершинами A', B'; C', D', E установлено поэтому также взаимно однозначное соответствие ребер и граней, которые с ними инцидентны. Поскольку соответствие остальных вершин, ребер и граней полиэдров M_{n+1}, M'_{n+1} смогло остаться таким же, каким оно было в M_n, M'_n, то К-полиэдры M_{n+1}, M'_{n+1} эквивалентны.

Определение 7. *Тип К-полиэдра а также всякий полиэдр данного типа назовем симметричным, если среди фигур Шлегеля данного типа найдется такая, которая симметрична относительно хотя бы одной оси.*

Теорема 24. *Пусть G_n — симметричная фигура Шлегеля и в симметрии пусть сопоставлены вершины $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, ... граней $ABC \leftrightarrow A'B'C'$. Для всякого расщепления грани ABC фигуры G_n существует такое расщепление грани $A'B'C'$, что образовавшиеся две фигуры Шлегеля G_{n+1}, G'_{n+1} эквивалентны.*

Доказательство. Для каждого расщепления грани ABC, т. е. введения новых вершин и ребра, можно построить к этим вершинам и ребрам симметричные. Полученные две фигуры Шлегеля зеркально-равны, значит, они эквивалентны.

Если нас при нахождении типов К-полиэдров с $(n + 1)$ гранями интересуют только те, которые самосопряжены, то возможно еще уменьшить, причем существенно, число необходимых расщеплений.

Теорема 25. *Самосопряженный К-полиэдр с $(n + 1)$ гранями получается по меньшей мере одним из следующих расщеплений К-полиэдров с n гранями:*

1. *расщеплением 1 вида К-полиэдров с $(n + 1)$ вершинами*
2. *расщеплением 2 вида К-полиэдров с n вершинами*
3. *расщеплением 3 вида К-полиэдров с $(n - 1)$ вершинами.*

Доказательство. Поскольку самосопряженный К-полиэдр с $(n + 1)$ гранями имеет $(n + 1)$ вершин и при расщеплении I вида не прибавляется вершина, при расщеплении 2 вида прибавдяется одна и при расщеплении 3 вида прибавляются две вершины, то самосопряженный К-полиэдр может образоваться только путем хотя бы одного из видов расщепления, о которых говорится в теореме.

Однако обратное утверждение неверно. Например, не всяким расщеплением 2 вида К-полиэдра с 8 гранями и 8 вершинами образуется самосопряженный К-полиэдр. Прежде всего необходимо, чтобы образовавшийся К-полиэдр имел одинаковое число вершин и граней, инцидентных с i ребрами ($i = 3, 4 \ldots$). Только расщепления, которые приволят к таким К-полиэдрам и все такие расщепления мы осуществили при построении всех типов самосопряженных К- полиэдров с 9 гранями.

Но этого тоже недостаточно — не всякий К-полиэдр, одинаковое число граней и вершин которого инцидентно с i ребрами ($i = 3, 4, \ldots$), является самосопряженным. Для того, чтобы установить, являются ли такие К-полиэдры самосопряженными или нет, исследовались эквивалентные им матрицы полиэдра. Для каждой такой матрицы выяснялось, можно ли ее путем перестановок строк и перестановок столбцов привести к симметричному относительно диагонали виду. Притом очень полезной оказалась

Теорема 26. *Если матрица, состоящая из единиц и нулей, симметрична, то симметричной будет всякая ее субматрица, являющаяся пересечением ее столбцов и строк с одинаковым числом единиц.*

Доказательство следует из того, что указанная субматрица является главной субматрицей симметричной матрицы.

Девятистрочечные матрицы полиэдра, которые получались при расщеплениях, о которых говорится в теореме 25, мы записывали таким образом, что одна за другой следовали грани (вершины) по числу ребер, с которыми они инцидентны. После этого мы путем перестановок строк и столбцов привели к симметричному виду соответствующие двух-, трех-, четырех- и пятистрочеч-

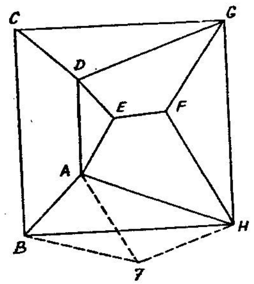

Рис. 15а.

0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0

Рис. 15б.

ные субматрицы, что в большинстве случаев оказалось простым. Быстро удавалось также установить, в каких случаях эти субматрицы, и тем самым вся матрица, не являются симметричными. Однако обратная теорема к теореме 26 неверна; при расщеплениях из теоремы 25 получаются и такие матрицы, в которых указанные субматрицы симметричны, а сама матрица — нет. Это показано, например, на рис. 15, где в б) матрица полиэдра эквивалентна К-полиэдру, получающемуся путем расщепления ребром $A7$ фигуры Шлегеля с восемью гранями на рис. 15а. В этой матрице обведенные жирной линией трехстрочечная и пятистрочечная матрицы симметричны, а сама матрица — нет. Это легко обнаружить, если учесть, что обведенная пятистрочечная субматрица будет симметричной только тогда, когда шестая строка нашей матрицы будет симметрична с шестым столбцом. Для этого необходимо, чтобы единица в третьей строке и шестом столбце и единица в шестоц строке и втом столбце были симметричными; путем перестановок строк и столбцов этого нельзя добиться без нарушения симметричности обведенной трехстрочечной квадратной субматрицы.

Для симметричных матриц полиэдра, полученных указанным способом, определялось далее, какие из них взаимно эквивалентны. Здесь снова посогла теорема 26. Никакие две матрицы полиэдра из следующего перечисления не являются эквивалентными.

Обзор типов самосопряженных К-полиэдров с 9 гранями.

Числа (n) m, при матрице полиэдра означают, что данная матрица получилась путем расщепления 1, 2 или 3 вида полиэдра, пронумерованного номером n на m-той странице Гермеса [4] (или же, возможно, и другого полиэдра).

$$\begin{matrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{matrix}$$

(319; 1)

$$\begin{matrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1 \end{matrix}$$

(325; 42)

$$\begin{matrix} 0&1&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0 \end{matrix}$$

(329; 87)

$$\begin{matrix} 1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0 \end{matrix}$$

(330; 33)

$$\begin{matrix} 0&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1 \end{matrix}$$

(330; 33)

$$\begin{matrix} 0&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{matrix}$$

(330; 35)

$$\begin{matrix} 1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{matrix}$$

(327; 75)

$$\begin{matrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1 \end{matrix}$$

(327; 78)

$$\begin{matrix} 0&1&0&1&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0 \end{matrix}$$

(325; 34)

0 1 1 0 1 1 0 1 1
1 0 0 0 0 1 1 1 0
1 0 1 1 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 1 1 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1

(325; 31)

0 1 1 1 0 1 0 1 1
1 1 0 0 1 1 0 0 0
1 0 0 1 1 0 0 1 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0
0 1 1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1

(330; 35)

0 1 1 1 1 1 0 1 0
1 1 0 0 0 0 1 0 1
1 0 0 0 0 1 1 1 0
1 0 0 0 1 1 0 0 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0 0 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 0 1 1 0

(319; 2)

0 1 1 0 1 0 1 1 1
1 0 0 0 1 1 0 1 0
1 0 0 0 0 1 1 0 1
0 0 0 0 1 1 1 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 1 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1

(330; 35)

0 1 1 0 1 1 1 1 0
1 0 0 0 0 0 1 1 1
1 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 1 0 0 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 1 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0

(325; 42)

0 1 1 0 0 1 1 1 0
1 0 0 1 1 1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 1 1 1
0 1 0 0 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 1

(327; 77)

1 0 1 0 0 1 1 1 0
0 1 0 0 1 1 0 1 1
1 0 0 0 1 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 1 1 1
0 1 1 0 0 1 0 0 0
1 1 0 0 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0

(330; 35)

1 0 0 0 1 0 1 1 1
0 0 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 0 0 1 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 1 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 1 1 0 0 1 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0

(330; 43)

0 1 0 1 0 1 1 1 1
1 0 0 0 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0

(325; 29)

1 0 0 1 1 1 0 0 1
0 0 1 1 0 0 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 0 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0
1 0 0 1 0 0 0 1 0
0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 1 0 0 0 1 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0

(330; 24)

0 1 0 1 0 0 1 1 1
1 0 1 1 0 0 1 0 0
0 1 0 1 1 1 0 0 0
1 1 1 0 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 1 0 1 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0

(332; 13)

0 0 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0 1 1
1 1 0 1 1 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0 1 0 0
1 0 1 0 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 1 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 1 0 0 0
0 1 0 0 0 1 1 0 0

(332; 7)

0 1 1 1 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 0
1 1 0 0 1 1 0 0 0
1 0 0 1 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0
0 0 1 0 1 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 0 0 1 1

(329; 20)

1 1 0 0 1 1 1 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 1
0 1 0 1 0 1 0 0 1
0 1 1 0 0 0 1 1 0
1 0 0 0 0 0 1 1 0
1 0 1 0 0 0 0 1 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0 0 1

(329; 16)

0 0 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0 1 1
1 1 1 0 0 0 0 1 0
1 1 0 0 0 1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 1 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 1 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 0 0

(324; 1)

0 0 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 1 0 0 1 1 0
1 0 0 1 1 0 0 0 1
1 1 1 0 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0 1 0
1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1

(330; 43)

0 1 1 0 1 0 1 1 0
1 0 1 1 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1 1 0 0
0 1 0 1 0 0 0 1 1
1 0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 1 0 0 0

(330; 29)

0 1 0 1 0 0 1 1 1
1 0 0 1 1 0 0 1 0
0 0 1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 0 0 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0
1 0 0 0 1 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1

(332; 11)

0 0 1 1 0 1 0 1 1
0 0 1 1 1 0 1 0 0
1 1 0 0 0 1 0 1 0
1 1 0 0 1 0 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 1 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1

(332; 19)

1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 0 0 0 0 1
0 1 1 0 1 0 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0 1 0
1 0 1 0 1 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 0 1 1 0

(330; 41)

1 1 0 0 0 1 1 0 1
1 0 0 1 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 0 1 1 1
0 1 1 1 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 1 1 1 0
1 1 0 0 1 0 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0

(330; 31)

1 0 1 0 1 0 0 1 1
0 1 1 1 0 1 0 0 0
1 1 0 0 0 1 1 0 0
0 1 0 0 1 0 1 1 0
1 0 0 1 0 1 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0

(326; 72)

0 0 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 0 1 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 0 0

(329; 19)

0 1 1 1 0 0 1 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 1 1 1
1 1 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 1

(325; 33)

```
0 1 1 1 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 1 1 1 0
1 0 0 1 1 0 1 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0 1
0 0 1 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 1 0 0 1 1 0
```
(332; 14)

```
0 1 0 1 0 1 1 1 0
1 0 0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 0 1 1 1 0 0
1 1 0 0 1 0 1 0 0
0 0 1 1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 0 0 1 1
```
(330; 21)

```
0 1 0 1 0 0 1 1 1
1 1 1 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 1 0 0
1 0 0 0 0 1 1 1 0
0 1 1 0 0 0 0 0 1
0 0 1 1 0 0 0 0 1
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 0 0 1 0
1 0 0 0 1 1 0 0 0
```
(331; 63)

```
0 1 0 0 1 1 1 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0 0
0 0 1 1 1 0 0 1 0
0 1 1 0 1 0 0 0 1
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1
0 0 0 1 0 0 1 1 0
```
(331; 54)

```
0 1 0 0 1 1 0 1 1
1 0 1 0 0 1 0 1 0
0 1 0 1 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 1 1 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1
```
(331; 55)

```
0 1 1 0 1 1 0 0 1
1 1 0 0 1 0 1 0 0
1 0 1 0 0 1 0 1 0
0 0 0 0 1 1 1 1 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 0 1
0 0 1 1 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0
```
(331; 66)

```
1 1 0 0 1 0 0 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 0
0 1 1 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 1 1 1 1 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0
```
(326; 72)

```
0 1 1 0 1 0 0 1 1
1 0 0 0 1 1 0 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0 0
0 0 1 0 1 1 1 0 0
1 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1
```
(329; 81)

```
0 1 0 0 0 1 1 1 1
1 0 0 0 1 0 1 1 0
0 0 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 1 0 0 1
0 1 1 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 1 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
```
(331; 55)

```
0 1 1 1 1 0 0 0 0
1 0 0 1 1 0 1 0 0
1 0 0 0 1 0 0 1 1
1 1 0 0 0 1 1 0 0
1 1 1 0 0 0 0 1 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 1
```
(332; 13)

```
0 1 1 1 0 0 0 0 1
1 0 0 1 1 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0 1 0
1 1 0 0 0 1 1 0 0
0 1 1 0 0 0 1 1 0
0 1 0 1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0 0 1
0 0 1 0 1 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 1 0
```
(329; 2)

```
1 1 0 0 1 1 0 0 0
1 0 1 1 0 0 1 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 1
0 1 1 0 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 1 1 1 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 1 0 0 0 1
0 0 1 0 0 0 1 1 0
```
(331; 60)


```
0 0 0 1 1 1 0 1 0
0 0 1 0 1 0 1 1 0
0 1 0 0 1 0 1 0 1
1 0 0 0 1 1 0 0 1
1 1 1 1 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 1 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 0 1 1 0 0 0 1 0
```
(332; 11)

```
1 1 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 1 0 1
1 0 0 0 1 0 1 1 0
0 1 0 0 1 1 0 1 0
0 0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 1 0 0
0 1 1 0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 1 0
```
(332; 10)

```
0 1 1 1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 1
1 1 0 0 0 1 0 1 0
1 0 0 0 1 0 0 1 1
0 0 0 1 1 0 1 0 1
1 0 1 0 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 0 0 1 0
0 0 1 1 0 0 1 0 0
0 1 0 1 1 0 0 0 0
```
(331; 57)

```
1 1 1 0 0 1 0 0 0
1 0 0 1 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 0 1 1 1
0 1 0 0 1 0 1 0 1
0 0 0 1 1 0 0 1 1
1 1 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 1 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0 0 0
```
(332; 20)

```
1 1 0 0 0 1 0 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 1 1 1 1
0 1 0 0 1 0 0 1 1
0 0 0 1 1 0 1 0 1
1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0 0 0
```
(332; 6)

Во время печатания статьи я обнаружил, что О. Гермес в заранее не объявленной 4 части работы Die Formen der Vielfläche, J. Reine angew. Math. 123 (1901), 312–342 приводит типы самосопряженных выпуклых полиэдров с 9 гранями. Мои результаты получены вполне независимо от этой работы; мой метод отличен от метода Гермеса. Следует заметить, что у Гермеса имеется ошибка: полиэдры № 46 и 51, считающиеся разными, на деле эквивалентны друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Brückner M., *Vielecke und Vielfläche*, Leipzig 1900.
[2] Steinitz E., Rademacher H., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[3] Люстерник Л. А., *Выпуклые фигуры и многогранники*, Москва 1956.
[4] Hermes O., *Die formen der Vielfläche*, J. Reine angew. Math. 120 (1891), 27—59, 305—353.
[5] Sommerville D. M. I., *An Introduction to the Geometry of n Dimensions*, London 1929.

Поступило 25. 2. 1961 г.

Katedra matematiky a fyziky
Pedagogického inštitútu
v Prešove

AUTOKONJUGIERTE K-POLYEDER

Ernest Jucovič

Zusammenfassung

Im Aufsatz werden K-Polyeder, Äquivalenz, Typus eines K-Polyeder im Sinne Steinitz [2] und Ljusternik [3] aufgefaßt, autokonjugierte Polyeder im Sinne „autopolare" bei Brückner [1], polyedrische Matrix im Sinne „Inzidenzmatrix" bei Steinitz [2].

U. a. werden folgende Sätze bewiesen:

Eine polyedrische Matrix ist autokonjugiert dann und nur dann, wenn sie äquivalent mit einer symmetrischen Matrix ist; in einer autokonjugierten polyedrischen Matrix mit s Zeilen sind $4(s-1)$ Einsen.

Alle Flächen eines autokonjugierten K-Polyeders sind nur Dreiecke oder Vierecke dann und nur dann, wenn die Dreiecke gerade 4 sind.

Zu einer jeden natürlichen Zahl $s \leqq 4$ existiert mindestens ein Typus eines autokonjugierten K-Polyeders, dessen Fläche ein Dreieck oder ein Viereck ist.

Wenn eine jede der n Flächen eines s-flächigen autokonjugierten K-Polyeders mit mehr als drei Kanten inzidiert, dann und nur dann inzidieren $n-1$ Flächen mit vier Kanten, wenn eine Fläche mit $s-n$ Kanten inzidiert.

Zu einem jeden Paar natürlicher Zahlen $s > 4$, $n \leqq s-4$ existiert mindestens ein Typus eines s-flächigen autokonjugierten K-Polyeders, dessen eine Fläche mit $s-n$ Kanten, $n-1$ Flächen mit vier Kanten und die übrigen $s-n$ Flächen mit drei Kanten inzidieren.

Keine $(s-1)$-zeilige Submatrix einer s-zeiligen autokonjugierten polyedrischen Matrix ist eine autokonjugierte polyedrische Matrix.

Im 3. Abschnitt wird die Metode zur Aufsuchung aller Typen der 9-flächigen autokonjugierten K-Polyeder beschrieben. Im 4. Abschnitt wird ihre Übersicht gebracht. Benützt wurden Steinitz's [2] reguläre Flächenspaltungen der K-Polyeder; dabei haben wir uns bemüht die Zahl der nötigen Spaltungen zu vermindern. Um entscheiden zu können, ob die konstruierten K-Polyeder autokonjugiert sind oder nicht, wurden die mit ihnen äquivalenten polyedrischen Matrizen untersucht.