MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

POZNÁMKA O F-TRIEDACH V KOMUTATÍVNYCH HAUSDORFFOVÝCH BIKOMPAKTNÝCH POLOGRUPÁCH

IMRICH FABRICI, Bratislava

Ako je známe z práce [1], každú Hausdorffovu bikompaktnú pologrupu S možno písať ako disjunktný súčet K-tried. Rovnako je známe z práce [3], že každú pologrupu možno napísať ako disjunktný súčet F-tried. Cieľom tejto poznámky je vyskúmať vzájomný vzťah K-tried a F-tried komutatívnej Hausdorffovej bikompaktnej pologrupy, najmä so zreteľom na operáciu uzáveru.

Aby sme sa v priebehu úvah nemuseli zvlášť odvolávať, uvedieme niektoré poznatky z prác [1], [2], [3], ktoré v ďalšom použijeme.

Nutná a postačujúca podmienka na to, aby dva prvky x, y komutatívnej pologrupy S patrili do tej istej F-triedy je, že buď $x = y$, alebo existujú také $a, b \in S$, že $x = ay$, $y = bx$. V komutatívnej pologrupe každá maximálna grupa G_α patriaca k idempotentu e_α je F-triedou a každá F-trieda obsahujúca idempotent je maximálnou grupou. Ak S je Hausdorffova bikompaktná pologrupa, budeme hovoriť, že prvok $a \in S$ patrí k idempotentu e_α, ak e_α je jediným idempotentom pologrupy $\bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$.* Každý prvok $a \in S$ patrí k jednému a len jednému idempotentu. Znakom K_α budeme označovať množinu všetkých prvkov patriacich k idempotentu e_α. Platí $S = \cup K_\alpha$. Množiny K_α sú disjunktné a každá z nich obsahuje ako podmnožinu istú maximálnu grupu G_α, ktorá je uzavretá a ktorá má e_α za jednotkový prvok. Ak $a \in K_\alpha$, potom $\bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}} \subset K_\alpha$. Ak S je komutatívna Hausdorffova bikompaktná pologrupa a ak $a \in S$ patrí k idempotentu e_1, $b \in S$ patrí k idempotentu e_2, potom ab patrí k idempotentu $e_1 e_2$. Z toho vyplýva, že K_α je (v komutatívnom prípade) pologrupou. Budeme ju volať maximálnou pologrupou patriacou k idempotentu e_α. K-triedy K_α nemusia byť uzavreté. To znamená, že $\bar{K}_\alpha$ môže obsahovať prvky patriace k inému idempotentu než e_α. Ak K_α nie je uzavretá, potom $\bar{K}_\alpha$ obsahuje aspoň jeden idempotent $\neq e_\alpha$. Ak $\bar{K}_\alpha \cap K_\beta \neq 0$, potom $e_\beta \in \bar{K}_\alpha$. Ak $\bar{K}_\alpha \cap K_\beta \neq 0$, potom v komutatívnom prípade pre maximálnu grupu G_β platí $G_\beta \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$. Ak $x \in S$, úplný systém okolí elementu x označíme $\mathcal{O}(x)$.

* Pruh nad znakom množiny značí uzáver.

Definícia 1 (podľa [3]). *Nech S je komutatívna pologrupa, nech $x \in S$. Potom množinu $I = \{x\} \cup Sx$ nazývame hlavným ideálom vytvoreným prvkom x.*

Hlavný ideál vytvorený prvkom x budeme označovať (x).

Definícia 2 (podľa [3]). *Množinu všetkých prvkov $x \in S$ vytvárajúcich ten istý hlavný ideál nazývame F-triedou.*

F-triedu obsahujúcu prvok x budeme označovať F_x. Každý prvok pologrupy S patrí do určitej F-triedy. Pologrupa S sa dá napísať ako súčet (disjunktných) F-tried.

Veta 1. *Každá F-trieda komutatívnej Hausdorffovej bikompaktnej pologrupy je uzavretá.*

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľnú F-triedu F. Chceme ukázať, že $\bar{F} = F$. Pretože $F \subset \bar{F}$, stačí ukázať, že $\bar{F}$ je tiež F-triedou. To znamená, treba dokázať, že pre ľubovolné $x, y \in \bar{F}$, $x \neq y$ existujú také $a, b \in S$, že platí

$$x = ay, \qquad y = bx.$$

Nech to nie je pravda. Potom buď rovnica $x = ay$, alebo $y = ax$ nemá riešenie $a \in S$.

Nech rovnica $x = ay$ nemá riešenie $a \in S$. Ku každému prvku $c \in S$, keď že S je Hausdorffov priestor, na základe spojitosti operácie násobenia vyplýva existencia takých okolí $O_c(x) \in \mathcal{O}(x)$, $O_c(y) \in \mathcal{O}(y)$ a $O(c) \in \mathcal{O}(c)$, že platí:

$$O_c(x) \cap [O(c) \,.\, O_c(y)] = \emptyset.$$

Uvažujme systém $\{O(c)\}$, $c \in S$. Zrejme $S \subset \bigcup_{c \in S} O(c)$. Pretože S je bikompaktná, existuje konečný systém $O(c_1)$, $O(c_2)$, ... $O(c_n)$, ktorý pokrýva S. Pre $i = 1, 2, \ldots n$, platí:

$$O_{c_i}(x) \cap [O(c_i) \,.\, O_{c_i}(y)] = \emptyset.$$

Zrejme existujú okolia $O(x) \in \mathcal{O}(x)$, $O(y) \in \mathcal{O}(y)$, že platí: $O(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_{c_i}(x)$ a $O(y) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_{c_i}(y)$. Potom zrejme platí:

$$O(x) \cap [O(c_i) \,.\, O(y)] = \emptyset,$$

pre $i = 1, 2, \ldots n$. Keďže $S = \bigcup_{i=1}^{n} O(c_i)$, na základe predchádzajúcich vzťahov dostávame:

$$O(x) \cap [S \,.\, O(y)] = \emptyset.$$

Ukážeme, že posledný vzťah nemôže byť splnený. Pretože $x \in \bar{F}$, $y \in \bar{F}$, odtiaľ vyplýva, že v každom okolí prvku x a prvku y existuje aspoň jeden prvok z F. Teda existujú také ξ, η, že $\xi \in F$, $\eta \in F$ a $\xi \in O(x)$, $\eta \in O(y)$. A keďže ξ, η patria do tej istej F-triedy F, existuje $z \in S$, že $\xi = z\eta$. Teda je $\xi \in O(x)$, $\xi \in S \,.\, O(y)$. To je spor.

Tým sme dokázali, že rovnica $x = ay$ má pre každé $x, y \in \bar{F}$ riešenie $a \in S$. Podobne sa dokáže, že aj rovnica $y = bx$ má riešenie $a \in S$ pri danom $x, y \in \bar{F}$. Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Nech S je komutatívna Hausdorffova bikompaktná pologrupa. Potom každá maximálna pologrupa K_α, patriaca k idempotentu e_α je súčtom F-tried pologrupy S.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že všetky prvky danej F-triedy patria k tomu istému idempotentu.

Uvažujme ľubovoľnú F-triedu F pologrupy S. Nech $x, y \in F$, $x \neq y$. Prvok x nech patrí k idempotentu e_1, prvok y nech patrí k idempotentu e_2. Našou úlohou je ukázať, že $e_1 = e_2$. Z predpokladu, že $x, y \in F$ a $x \neq y$, vyplýva existencia takých prvkov $a, b \in S$, že platí:

$$x = ay, \qquad y = bx. \tag{1}$$

Nech prvok a patrí k idempotentu e'_1, prvok b nech patrí k idempotentu e'_2. Prvok ay potom patrí k idempotentu $e'_1 e_2$. Prvok bx patrí k idempotentu $e'_2 e_1$. Ale z rovníc (1) vyplýva, že musí platiť:

$$e_1 = e'_1 e_2, \qquad e_2 = e'_2 e_1,$$

kde $e'_1, e'_2 \in S$. Vytvorme $Se_1 = Se'_1 e_2 \subset S^2 e_2 \subset Se_2$. Ale $Se_1 = Se_1 \cup \{e_1\} \subset Se_2 = \{e_2\} \cup Se_2$. Dostali sme, že platí:

$$(e_2) \supset (e_1). \tag{2}$$

Podobne dostaneme, že platí:

$$(e_1) \supset (e_2). \tag{3}$$

Zo vzťahov (2), (3) dostaneme rovnosť $(e_1) = (e_2)$. To znamená, že e_1, e_2 patria do tej istej F-triedy F', všeobecne rôznej od F. Ale podľa poznámok v úvode musí platiť, že $e_1 = e_2$. Čiže prvky $x, y \in F$ patria k tomu istému idempotentu. Tým je veta úplne dokázaná.

Veta 3. *Nech K_α je ľubovoľná K-trieda a F ľubovoľná F-trieda komutatívnej Hausdorffovej bikompaktnej pologrupy S. Potom nastáva práve jeden z nasledujúcich prípadov:*

(A) $F \subset K_\alpha$,

(B) $F \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$,

(C) $F \subset S - \bar{K}_\alpha$.

Dôkaz. Že nastáva najviac jeden z uvedených prípadov je zrejmé z toho, že množiny K_α, $\bar{K}_\alpha - K_\alpha$, $S - \bar{K}_\alpha$ sú disjunktné. Dokážeme, že nastáva aspoň jeden z prípadov (A), (B), (C). Ak $F \cap K_\alpha \neq \emptyset$, potom $F \subset K_\alpha$, ako to vyplýva z vety 2. Teda nastáva prípad (A).

Nech $F \cap K_\alpha = \emptyset$. Ak dokonca $F \cap \bar{K}_\alpha = \emptyset$, potom $F \subset S - \bar{K}_\alpha$, takže nastáva prípad (C).

Ostáva prípad $F \cap K_\alpha = \emptyset$, ale $F \cap \bar{K}_\alpha \neq \emptyset$. Dokážeme, že vtedy nastáva prípad (B), t. j. $F \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$. Vzhľadom na predpoklad $F \cap K_\alpha = \emptyset$ stačí dokázať, že $F \subset \bar{K}_\alpha$.

Vezmime ľubovoľné $x \in F$. Dokážeme, že $x \in \bar{K}_\alpha$.

Keďže $F \cap \bar{K}_\alpha \neq \emptyset$, existuje nejaké $y \in F \cap \bar{K}_\alpha$. Prvky x, y sú z tej istej F-triedy F, preto buď $x = y$, alebo $x = ay$ pre nejaké $a \in S$. V prvom prípade $x = y \in F \cap \bar{K}_\alpha \subset \bar{K}_\alpha$, t. j. $x \in \bar{K}_\alpha$ čo sme mali ukázať.

Ak však $x = ay$, zo spojitosti operácie násobenia vyplýva, že k ľubovoľnému okoliu $O(x)$ prvku x, existujú také okolia $O(a)$, $O(y)$ prvkov a, y, že $O(a) . O(y) \subset O(x)$. Prvky x, y sú z tej istej F-triedy a preto aj z tej istej K-triedy, teda patria k tomu istému idempotentu, ktorý označíme e_β. Idempotent, ku ktorému patria všetky prvky K-triedy K_α označme e_α. Idempotent, ku ktorému patrí prvok a, označme e_γ. Z rovnosti $x = ay$ vyplýva platnosť rovnosti: $e_\beta = e_\gamma . e_\beta$. Keďže $y \in \bar{K}_\alpha$, existuje $z \in O(y) \cap K_\alpha$. Zo vzťahu $O(a)'. O(y) \subset O(x)$ vyplýva potom vzťah $az \in O(x)$. Keďže $y \in \bar{K}_\alpha$, potom i $e_\beta \in \bar{K}_\alpha$ a podľa [1] platí: $e_\alpha = e_\beta e_\alpha$. Zistíme, k akému idempotentu patrí prvok $az \in O(x)$. No prvok az patrí k idempotentu $e_\gamma e_\alpha = e_\gamma(e_\beta e_\alpha) = (e_\gamma e_\beta) e_\alpha = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$. Teda $az \in K_\alpha$. Tým sme dokázali, že v ľubovoľnom okolí $O(x)$ prvku x existuje prvok z K_α, čo znamená, že $x \in \bar{K}_\alpha$, čo bolo treba dokázať.

Vzhľadom na poznámky, ktoré sme uviedli v úvode, mohla by vzniknúť otázka, či snáď každá F-trieda z $\bar{K}_\alpha - K_\alpha$ nie je maximálnou grupou. Na nasledujúcom jednoduchom príklade sa môžeme presvedčiť, že to tak nie je.

Príklad. Nech S je množina, ktorej prvky sú dvojice reálnych čísiel (a, b) také, že $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$. Keď ju uvažujeme ako množinu bodov v rovine, tak S je vnútro a hranice štvorca s vrcholmi: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Nech topológiou je obyčajná topológia v rovine. Potom S je Hausdorffov bikompaktný priestor. Násobenie v S definujeme takto: $(a_1, b_1) . (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$. Násobenie je zrejme asociatívne a komutatívne, nevyjdeme s ním z uvedeného štvorca a je spojité v danej topológii. Teda S je komutatívna Hausdorffova bikompaktná pologrupa. S má 4 idempotenty: $e_1 = (0,0)$, $e_2 = 0,1)$, $e_3 = (1,0)$, $e_4 = (1,1)$. Maximálne pologrupy, patriace k jednotlivým idempotentom sú:

$$K_1 = \{(a, b) : 0 \leqq a < 1,\ 0 \leqq b < 1\},$$
$$K_2 = \{(a, b) : 0 \leqq a < 1,\ b = 1\},$$
$$K_3 = \{(a, b) : a = 1,\ 0 \leqq b < 1\},$$
$$K_4 = \{(1,1)\}.$$

Maximálne grupy patriace k jednotlivým idempotentom sú: $G_1 = \{(0,0)\}$, $G_2 = \{(0,1)\}$, $G_3 = \{(1,0)\}$, $G_4 = \{(1,1)\}$. Ako ľahko sa môžeme presvedčiť, všetky F-triedy sú jednobodové množiny.

$\bar{K}_2 = K_2 \cup G_4$, $\bar{K}_3 = K_3 \cup G_4$. V obidvoch prípadoch pribudne uzáverom len maximálna grupa a teda jedna F-trieda. Ale keď urobíme uzáver $\bar{K}_1 = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = S$, tu pribudnú i ďalšie F-triedy, ktoré nie sú maximálnymi grupami.

Nakoniec urobíme poznámku o vzájomnom vzťahu F-tried z K_α k F-triedam z $\bar{K}_\alpha - K_\alpha$, vzhľadom na čiastočné usporiadanie medzi F-triedami, ktoré v ďalšom zavedieme. Nech $\mathscr{K}$ znamená množinu všetkých K-tried komutatívnej Hausdorffovej bikompaktnej pologrupy S. V tejto množine zavedieme čiastočné usporiadanie $\leqq$ týmto spôsobom: Budeme hovoriť, že $K_\alpha \leqq K_\beta$, platí vtedy a len vtedy, ak $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$.

Ďalej nech $\mathscr{F}$ znamená množinu všetkých F-tried tej istej pologrupy S. V tejto množine zavedieme čiastočné usporiadanie týmto spôsobom: Budeme hovoriť, že $F_x \prec F_y$ platí vtedy a len vtedy, ak $(x) \subset (y)$.

Budeme potrebovať nasledujúcu lemmu.

Lemma 1. *Nech $F_x, F_y \in \mathscr{F}$, $K_\alpha, K_\beta \in \mathscr{K}$, nech $F_x \subset K_\alpha$, $F_y \subset K_\beta$ a nech $K_\alpha \leqq K_\beta$ a $K_\alpha \neq K_\beta$. Potom buď $F_x \prec F_y$, alebo F_x, F_y sú neporovnateľné.*

Dôkaz. Budeme dokazovať nepriamo. Predpokladajme, že je $F_y \prec F_x$ a $F_y \neq F_x$, t. j. $(y) \subset (x)$ a $(y) \neq (x)$. Potom existuje element $a \in S$ taký, že $y = ax$. Ak a patrí k idempotentu e, máme $e_\beta = ee_\alpha$, t. j. $e_\beta e_\alpha = ee_\alpha^2 = ee_\alpha = e_\beta$, t. j. $e_\beta e_\alpha = e_\beta$. Podľa predpokladu je ale $K_\alpha \leqq K_\beta$ teda $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Teda je $e_\alpha = e_\beta$, čo je spor s predpokladom.

Veta 4. *Nech K_α je nejaká K-trieda komutatívnej Hausdorffovej bikompaktnej pologrupy, ktorá nie je uzavretá. Nech $F_x \subset K_\alpha$ a $F_y \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$. Potom buď $F_x \prec F_y$, alebo F_x, F_y sú neporovnateľné.*

Dôkaz. Každá F-trieda z $\bar{K}_\alpha - K_\alpha$ patrí do nejakej K-triedy. Teda i F-trieda F_y patrí do nejakej K-triedy $K_\gamma \in \mathscr{K}$. A podľa úvodných poznámok vieme, že pre idempotent e_γ platí: $e_\alpha e_\gamma = e_\alpha$. To pravda znamená, $K_\alpha \leqq K_\gamma$. Tým sú splnené predpoklady lemmy 1 a tvrdenie vety je už zrejmé.

LITERATÚRA

[1] Schwarz Š., *К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп*, Чех. мат. журнал 5 (80), (1955), 1—23.

[2] Schwarz Š., *К теории периодических полугрупп*, Чех. мат. журнал 3 (78), (1953), 7—21.

[3] Green J. A., *On the structure of semigroups*, Annals of Math. 54 (1951), 163—172.

[4] Kolibiarová B., *O komutatívnych periodických pologrupách*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 8 (1958), 127—133.

Došlo 27. 4. 1961.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА О F-КЛАССАХ В КОММУТАТИВНЫХ ХАУСДОРФОВЫХ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУППАХ

Имрих Фабрици

Резюме

Пусть S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Будем говорить, что элемент $x \in S$ принадлежит к идемпотенту e_α, если e_α является единственным идемпотентом полугруппы $\overline{\{x, x^2, \ldots\}}$ (черта означает замыкание). Множество всех элементов, принадлежащих к идемпотенту e_α, назовем K-классом и обозначим через K_α. Пусть S — коммутативная полугруппа. Пусть $x \in S$. Множество $(x) = \{x\} \cup Sx$ называем главным идеадом, порожденным элементом x. Множество всех элементов $x \in S$, порождающих один и тот же главный идеал, назовем F-классом. F-класс, содержащий элемент x, обозначим через Fx. В работе рассматриваются взаимоотношения K-классов и F-классов. Доказываются следующие теоремы:

1. Каждый F-класс коммутативной хаусдорфовой бикомпактной полугруппы замкнут.

2. Если S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, то всякий K-класс K_α, принадлежащий к идемпотенту e_α, является объединением F-классов полугруппы S.

3. Если K_α — произвольный K-класс и если F — произвольный F-класс коммутативной хаусдорфовой бикомпактной полугруппы S, то происходит один и только один из следующих случаев: A. $F \subset K_\alpha$, B. $F \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$, C. $F \subset S - \bar{K}_\alpha$.

4. Пусть $\mathscr{K}$ — множество всех K-классов коммутативной хаусдорфовой бикомпактной полугруппы. Пусть $\mathscr{F}$ означает множество всех F-классов той же полугруппы S. Пусть $F_x, F_y \in \mathscr{F}$. Будем говорить, что $F_x \prec F_y$ выполняется, если $(x) \subset (y)$.

Если $K_\alpha \in \mathscr{K}$, $F_x, F_y \in \mathscr{F}$ и если $F_x \subset K_\alpha$ и $F_y \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$, то либо $F_x \prec F_y$, либо F_x, F_y несравнимы.

A NOTE ON F-CLASSES IN COMMUTATIVE HAUSDORFF BICOMPACT SEMIGROUPS

Imrich Fabrici

Summary

Let S be commutative Hausdorff bicompact semigroup. We say that the element $x \in S$ belongs to the idempotent e_α, if e_α is the only idempotent of semigroup $\overline{\{x, x^2, x^3, \ldots\}}$ (the line means the closure). The set of all elements belonging to the idempotent e_α will be called K-class and denoted by K_α. Let S be commutative semigroup and $x \in S$. The set $(x) = \{x\} \cup Sx$ is called a principal ideal generated by an element x. The set of all elements $x \in S$, generating the same principal ideal is called an F-class. The F-class containing an element x is denoted F_x. In the paper the mutual relation of K-classes and F-classes is investigated. The following theorems are proved.

1. Every F-class of commutative Hausdorff bicompact semigroup is closed.

2. If S is commutative Hausdorff bicompact semigroup, then every K-class K_α belonging to an idempotent e_α is the sum of F-classes of S.

3. If K_α is arbitrary K-class and F arbitrary F-class of commutative Hausdorff bicompact semigroup S, then just one case of following can take place: A. $F \subset K_\alpha$, B. $F \subset \bar{K}_\alpha - K$, C. $F \subset S - \bar{K}_\alpha$.

4. Let $\mathscr{K}$ be the set of all K-classes of commutative Hausdorff bicompact semigroup S. Let $\mathscr{F}$ be the set of all F-classes of S. Let $F_x, F_y \in \mathscr{F}$. We say that $F_x \prec F_y$ is valid if $(x) \subset (y)$.

If $K_\alpha \in \mathscr{K}$, $F_x, F_y \in \mathscr{F}$ and if $F_x \subset K_\alpha$, $F_y \subset \bar{K}_\alpha - K_\alpha$, then either $F_x \prec F_y$, or F_x and F_y are incomparable.