MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

O KONGRUENCÍCH PŘÍMEK VYŤATÝCH V NADROVINÁCH PROJEKTIVNÍHO ČTYŘROZMĚRNÉHO PROSTORU P_4 TEČNÝMI ROVINAMI JEHO PLOCHY Φ

JOSEF VALA, Brno

Tečné roviny plochy Φ, náležející projektivnímu prostoru P_4, protínají jeho nadroviny H, $\bar{H}$ v dvojicích tvořicích přímek kongruencí Γ, $\bar{\Gamma}$ v korespondenci $\bar{\mathbf{R}}$, ve které si rozvinutelné plochy obou kongruencí korespondují. Jsou nalezeny podmínky, kdy tato korespondence je bodovou, resp. rovinovou deformací. Zvláště je studován ten případ, že Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W. Konečně nalezena obecnost řešení problému k dané kongruenci Γ v nadrovině $H \in P_4$ nalézti plochu Φ prostoru P_4 tak, aby její tečné roviny vytínaly na H právě kongruenci Γ.

I. a) Plocha Φ nechť leží v projektivním čtyřrozměrném prostoru P_4. Pak je známé, že na ní existuje síť konjugovaných čar nebo systém asymptotik. V dalším budeme vždy předpokládat první případ a čáry sítě nechť jsou parametrickými u-čarami, resp. v-čarami plochy Φ. Souřadnice x_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ jejího bodu x pak vyhovují diferenciální rovnici

$$x_{uv} = Ax + Qx_u + Px_v. \tag{1}$$

Uvažujme tečné roviny τ ve všech bodech plochy Φ a pevnou nadrovinu H prostoru P_4. Roviny τ protínají trojrozměrný prostor H v přímkách, které tvoří přímkovou kongruenci Γ. W. Blaschke [1] dokázal, že fokální plochy kongruence Γ vytvoří průsečíky A_1, A_2 tečen u-čar, resp. v-čar plochy Φ s prostorem H. Lze klást

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_0 x + \lambda_1 x_u, \\ A_2 &= \mu_0 x + \mu_2 x_v. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice nadroviny H nechť jsou $\sum_{j=1}^{5} s_j X_j = \langle sX \rangle = 0$, $s_j =$ konst. Podle (2) pak snadno dostaneme

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{-\langle sx_u \rangle}{\langle sx \rangle}, \quad \frac{\mu_0}{\mu_2} = \frac{-\langle sx_v \rangle}{\langle sx \rangle}, \tag{3}$$

předpokládáme-li $\lambda_1 \mu_2 \neq 0$, což znamená, že plocha Φ není plochou trojrozměrného prostoru H.

b) Zvolme pohyblivý repér o vrcholech v bodech $A_0 = x$, A_1, A_2, body A_3, A_4 pak zvolme v nadrovině H tak, aby repér A_1, A_2, A_3, A_4 byl polokanonickým repérem kongruence Γ (Švec [6], str. 7). Potom platí

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2,\\
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \beta_2\omega_2A_2 + \omega_1A_3,\\
dA_2 &= \beta_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4,\\
dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \alpha_1\omega_1A_4,\\
dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \alpha_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4,
\end{aligned} \tag{4}$$

kde $\omega_1, \omega_2, \omega_{ik}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou Pfaffovy formy, které obsahují diferenciály du, dv; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou funkce proměnných u a v. Dále předpokládejme, že plocha není rozvinutelnou (Lane [3], str. 111), tedy, že platí

$$(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}) \neq 0.$$

Body A_3, A_4 jsou pak lineárními kombinacemi bodů $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}$.

$$\begin{aligned}
A_3 &= \varrho_0x + \varrho_1x_u + \varrho_2x_v + \varrho_{11}x_{uu} + \varrho_{22}x_{vv},\\
A_4 &= \sigma_0x + \sigma_1x_u + \sigma_2x_v + \sigma_{11}x_{uu} + \sigma_{22}x_{vv},
\end{aligned} \tag{5}$$

podobně body x_{uuu}, x_{vvv}:

$$\begin{aligned}
x_{uuu} &= m_0x + m_1x_u + m_2x_v + m_{11}x_{uu} + m_{22}x_{vv},\\
x_{vvv} &= n_0x + n_1x_u + n_2x_v + n_{11}x_{uu} + n_{22}x_{vv}.
\end{aligned} \tag{5a}$$

Dosaďme v rovnicích (4) za $A_0 = x$ a za A_1, A_2, A_3, A_4 podle (2) a (5).

$$\begin{aligned}
dA_0 = x[\omega_{00} &+ \omega_{01}\lambda_0 + \omega_{02}\mu_0] +\\
&+ x_u[\omega_{01}\lambda_1] +\\
&+ x_v[\omega_{02}\mu_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dA_1 &= x[\omega_{11}\lambda_0 + \beta_2\omega_2\mu_0 + \omega_1\varrho_0] + & dA_2 &= x[\beta_1\omega_1\lambda_0 + \omega_{22}\mu_0 + \omega_2\sigma_0] +\\
&+ x_u[\omega_{11}\lambda_1 + \omega_1\varrho_1] + & &+ x_u[\beta_1\omega_1\lambda_1 + \omega_2\sigma_1] +\\
&+ x_v[\beta_2\omega_2\mu_2 + \omega_1\varrho_2] + & &+ x_v[\omega_{22}\mu_2 + \omega_2\sigma_2] +\\
&+ x_{uu}[\omega_1\varrho_{11}] + & &+ x_{uu}[\omega_2\sigma_{11}] +\\
&+ x_{vv}[\omega_1\varrho_{22}], & &+ x_{vv}[\omega_2\sigma_{22}],\\
dA_3 &= x[\omega_{31}\lambda_0 + \omega_{32}\mu_0 + \omega_{33}\varrho_0 + & dA_4 &= x[\omega_{41}\lambda_0 + \omega_{42}\mu_0 + \alpha_2\omega_2\varrho_0 +\\
&+ \alpha_1\omega_1\sigma_0] + x_u[\omega_{31}\lambda_1 + \omega_{33}\varrho_1 + & &+ \omega_{44}\sigma_0] + x_u[\omega_{41}\lambda_1 + \alpha_2\omega_2\varrho_1 +\\
&+ \alpha_1\omega_1\sigma_1] + x_v[\omega_{32}\mu_2 + \omega_{33}\varrho_2 + & &+ \omega_{44}\sigma_1] + x_v[\omega_{42}\mu_2 + \alpha_2\omega_2\varrho_2 +\\
&+ \alpha_1\omega_1\sigma_2] + x_{uu}[\omega_{33}\varrho_{11} + & &+ \omega_{44}\sigma_2] + x_{uu}[\alpha_2\omega_2\varrho_{11} +\\
&+ \alpha_1\omega_1\sigma_{11}] + x_{vv}[\omega_{33}\varrho_{22} + & &+ \omega_{44}\sigma_{11}] + x_{vv}[\alpha_2\omega_2\varrho_{22} +\\
&+ \alpha_1\omega_1\sigma_{22}], & &+ \omega_{44}\sigma_{22}].
\end{aligned} \tag{6}$$

Diferencujme rovnice (2); použijeme-li vztahu (1), snadno dostaneme

$$\begin{aligned}
dA_1 &= x[d\lambda_0 + \lambda_1A\,dv] + & dA_2 &= x[d\mu_0 + \mu_2A\,du] +\\
&+ x_u[\lambda_0\,du + d\lambda_1 + \lambda_1Q\,dv] + & &+ x_u[\mu_0\,du + \mu_2Q\,du] +\\
&+ x_v[\lambda_0\,dv + \lambda_1P\,dv] + & &+ x_v[\mu_0\,dv + d\mu_2 + \mu_2P\,du] +\\
&+ x_{uu}[\lambda_1\,du], & &+ x_{vv}[\mu_2\,dv].
\end{aligned} \tag{7}$$

Porovnáním koeficientů u $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}$ v rovnicích (6) a (7) pak vychází (předpokládáme, že body A_1, A_2 nevytvořují pouhé křivky) při variaci parametrů u a v:

$$\begin{gathered}
\varrho_2 = \sigma_1 = \varrho_{22} = \sigma_{11} = 0,\\
\lambda_1\varrho_0 = \varrho_{11}\lambda_{0u} - \left[\varrho_{11}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(\lambda_0 + \lambda_{1u} - \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\varrho_1\right)\right],\\
\mu_2\sigma_0 = \sigma_{22}\mu_{0v} - \left[\sigma_{22}\frac{\mu_0}{\mu_2}\left(\mu_0 + \mu_{2v} - \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\sigma_2\right)\right],
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)_v &= P\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right) + Q\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - A,\\
\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)_u &= P\left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right) + Q\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - A,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\,du, \qquad \omega_2 = \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\,dv,\\
\omega_{11} = \frac{1}{\lambda_1}\left[du\left(\lambda_0 + \lambda_{1u} - \frac{\lambda_1}{\varrho_{11}}\varrho_1\right) + dv(\lambda_{1v} + \lambda_1Q)\right],\\
\omega_{22} = \frac{1}{\mu_2}\left[du(\mu_{2u} + \mu_2P) + dv\left(\mu_0 + \mu_{2v} - \frac{\mu_2}{\sigma_{22}}\sigma_2\right)\right],
\end{gathered} \tag{10}$$

$$\beta_1 = \frac{(\mu_0 + \mu_2Q)\,\varrho_{11}}{\lambda_1^2}, \qquad \beta_2 = \frac{(\lambda_0 + \lambda_1P)\,\sigma_{22}}{\mu_2^2}. \tag{11}$$

Diferencujeme-li rovnice (5), užijeme vztahů (8) a (1), snadno dostaneme:

$$\begin{aligned}
dA_3 = x[d\varrho_0 &+ \varrho_1A\,dv + \varrho_{11}m_0\,du + \varrho_{11}\,dv(A_u + PA)] +\\
&+ x_u[\varrho_0\,du + d\varrho_1 + \varrho_1Q\,dv + \varrho_{11}m_1\,du + \varrho_{11}\,dv(A + Q_u + PQ)] +\\
&+ x_v[\varrho_0\,dv + \varrho_1P\,dv + \varrho_{11}m_2\,du + \varrho_{11}\,dv(Pu + P^2)] +\\
&+ x_{uu}[\varrho_1\,du + d\varrho_{11} + \varrho_{11}m_{11}\,du + \varrho_{11}\,dvQ] +\\
&+ x_{vv}[\varrho_{11}m_{22}\,du],\\
dA_4 = x[d\sigma_0 &+ \sigma_2A\,du + \sigma_{22}(A_v + QA)\,du + \sigma_{22}n_0\,dv] +\\
&+ x_u[\sigma_0\,du + \sigma_2Q\,du + \sigma_{22}(Q_v + Q^2)\,du + \sigma_{22}n_1\,dv] +\\
&+ x_v[\sigma_0\,dv + d\sigma_2 + \sigma_2P\,du + \sigma_{22}(A + PQ + P_v)\,du + \sigma_{22}n_2\,dv] +\\
&+ x_{uu}[\sigma_{22}n_{11}\,dv] +\\
&+ x_{vv}[\sigma_2\,dv + d\sigma_{22} + \sigma_{22}n_{22}\,dv + \sigma_{22}P\,du].
\end{aligned} \tag{12}$$

Porovnáme-li koeficienty u $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}$ v rovnicích (6) a (12), snadno nalezneme Pfaffovy formy $\omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33}, \omega_{41}, \omega_{42}, \omega_{44}$ a funkce α_1, α_2.

$$\alpha_1 = \frac{\varrho_{11}^2 m_{22}}{\lambda_1 \sigma_{22}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\sigma_{22}^2 n_{11}}{\mu_2 \varrho_{11}}. \tag{13}$$

Pro koeficienty, které určují polohu vrcholů A_3, A_4 dostaneme další relace:

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{\varrho_1}{\varrho_{11}}(\varrho_1 + \varrho_{11u} + \varrho_{11}m_{11}) + \varrho_0 + \varrho_{1u} + \varrho_{11}m_{11}\right] + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\varrho_{11}m_{22}}{\sigma_{22}}\sigma_2 + \varrho_{11}m_{22}\right] + \frac{\varrho_0}{\varrho_{11}}[\varrho_1 + \varrho_{11u} + \varrho_{11}m_{11}] + \\
&\quad + \frac{\varrho_{11}m_{22}\sigma_0}{\sigma_{22}} - \varrho_{0u} - \varrho_{11}m_0 = 0, \\
&\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{\varrho_1}{\varrho_{11}}(\varrho_{11v} + \varrho_{11}Q) + \varrho_{1v} + \varrho_1 Q + \varrho_{11}(A + Q_u + PQ)\right] + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{\mu_2}[\varrho_0 + \varrho_1 P + \varrho_{11}(P_u + P^2)] + \\
&\quad + \frac{\varrho_0}{\varrho_{11}}(\varrho_{11v} + \varrho_{11}Q) - \varrho_1 A - \varrho_{11}(A_u + PA) - \varrho_{0v} = 0, \\
&\frac{\lambda_0}{\lambda_1}[\sigma_0 + \sigma_2 Q + \sigma_{22}(Q_v + Q^2)] + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\sigma_2}{\sigma_{22}}(\sigma_{22u} + \sigma_{22}P) + \sigma_{2u} + \sigma_2 P + \sigma_{22}(A + PQ + P_v)\right] + \\
&\quad + \frac{\sigma_0}{\sigma_{22}}(\sigma_{22u} + \sigma_{22}P) - \sigma_{0u} - \sigma_2 A - \sigma_{22}(A_v + QA) = 0, \\
&\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[-\frac{n_{11}\varrho_1\sigma_{22}}{\varrho_{11}} + \sigma_{22}n_1\right] + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{\mu_2}\left[-\frac{\sigma_2}{\sigma_{22}}(\sigma_2 + \sigma_{22v} + \sigma_{22}n_{22}) + \sigma_0 + \sigma_{2v} + \sigma_{22}n_2\right] + \frac{\sigma_{22}n_{11}}{\varrho_{11}}\varrho_0 + \\
&\quad + \frac{\sigma_0}{\sigma_{22}}(\sigma_2 + \sigma_{22v} + \sigma_{22}n_2) - \sigma_{22}n_0 - \sigma_{0v} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Konečně ze vztahu $dA_0 = dx = x_u\,du + x_v\,dv$ a z první rovnice (4) lze vypočíst zbývající Pfaffovy formy

$$\omega_{00} = -\frac{\lambda_0}{\lambda_1}du - \frac{\mu_0}{\mu_2}dv, \qquad \omega_{01} = \frac{1}{\lambda_1}du, \qquad \omega_{02} = \frac{1}{\mu_2}dv.$$

c) Označme podle (3) $\langle sx \rangle = \lambda$, pak $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} = -\dfrac{\lambda_u}{\lambda}$, $\dfrac{\mu_0}{\mu_2} = -\dfrac{\lambda_v}{\lambda}$,

$$\lambda_0 = -K\lambda_u,\ \lambda_1 = K\lambda,\ \mu_0 = -\bar{K}\lambda_v,\ \mu_2 = \bar{K}\lambda,\ K = K(u, v),\ \bar{K} = \bar{K}(u, v),$$

a dosaďme do rovnice (9). Obě rovnice splynou v jedinou

$$\lambda_{uv} = A\lambda + Q\lambda_u + P\lambda_v. \tag{15}$$

Podle (3) je λ lineární kombinací s konstantními koeficienty souřadnic x plochy Φ. Tedy podle (5a) nutně platí

$$\begin{aligned}
\lambda_{uuu} &= m_0\lambda + m_1\lambda_u + m_2\lambda_v + m_{11}\lambda_{uu} + m_{22}\lambda_{vv}, \\
\lambda_{vvv} &= n_0\lambda + n_1\lambda_u + n_2\lambda_v + n_{11}\lambda_{uu} + n_{22}\lambda_{vv}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Specializujme nyní repér tak, že je

$$\varrho_{11} = \lambda_1 = K\lambda, \qquad \sigma_{22} = \mu_2 = \bar{K}\lambda, \tag{17}$$

pak pro koeficienty v relacích (5) platí podle (8) tyto vztahy:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \varrho_2 = \sigma_{11} = \varrho_{22} = 0, \\
\varrho_0 &= -K\lambda_{uu} - \frac{\lambda_u}{\lambda}\varrho_1, \\
\sigma_0 &= -\bar{K}\lambda_{vv} - \frac{\lambda_v}{\lambda}\sigma_2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Dosaďme z rovnic (17) a (18) do (14) a použijme relací (16). Rovnice (14) jsou pak splněny identicky, jak vychází snadným výpočtem. Koeficienty rovnic (5) jsou tedy vázány právě jen vztahy (18). Vhodnou volbou K, $\bar{K}$ je možno dosáhnout splnění relace $(A_1, A_2, A_3, A_4) = 1$. Z relací (10), (11), (13) snadno dostaneme podle (17)

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= du, & \omega_2 &= dv, \\
\alpha_1 &= \frac{\lambda_1 m_{22}}{\mu_2}, & \alpha_2 &= \frac{\mu_2 n_{11}}{\lambda_1}, \\
\beta_1 &= \frac{\mu_0 + \mu_2 Q}{\lambda_1}, & \beta_2 &= \frac{\lambda_0 + \lambda_1 P}{\mu_2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

d) Uvažujme další nadrovinu $\bar{H}$ v P_4. Tečné roviny τ plochy Φ protínají trojrozměrný prostor $\bar{H}$ v přímkové kongruenci $\bar{\Gamma}$ o fokálních plochách $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \bar{\lambda}_0 x + \bar{\lambda}_1 x_u = c_0 A_0 + c_1 A_1, \\
\bar{A}_2 &= \bar{\mu}_0 x + \bar{\mu}_2 x_u = d_0 A_0 + d_2 A_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Podle rovnic (2) vychází

$$\begin{aligned}
c_0 &= \bar{\lambda}_0 - \frac{\bar{\lambda}_1 \lambda_0}{\lambda_1}, & c_1 &= \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}, \\
d_0 &= \bar{\mu}_0 - \frac{\bar{\mu}_2 \mu_0}{\mu_2}, & d_2 &= \frac{\bar{\mu}_2}{\mu_2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Zvolme opět pohyblivý repér o vrcholech v bodech $A_0 = x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$, body $\bar{A}_3, \bar{A}_4$ jsou zvoleny tak, aby repér $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ byl polokanonickým repérem kongruence $\bar{\Gamma}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \overline{\omega}_{00}A_0 + \overline{\omega}_{01}\bar{A}_1 + \overline{\omega}_{02}\bar{A}_2,\\
\mathrm{d}\bar{A}_1 &= \overline{\omega}_{11}\bar{A}_1 + \bar{\beta}_2\overline{\omega}_2\bar{A}_2 + \overline{\omega}_1\bar{A}_3,\\
\mathrm{d}\bar{A}_2 &= \bar{\beta}_1\overline{\omega}_1\bar{A}_1 + \overline{\omega}_{22}\bar{A}_2 + \overline{\omega}_2\bar{A}_4,\\
\mathrm{d}\bar{A}_3 &= \overline{\omega}_{31}\bar{A}_1 + \overline{\omega}_{32}\bar{A}_2 + \overline{\omega}_{33}\bar{A}_3 + \bar{\alpha}_1\overline{\omega}_1\bar{A}_4,\\
\mathrm{d}\bar{A}_4 &= \overline{\omega}_{41}\bar{A}_1 + \overline{\omega}_{42}\bar{A}_2 + \bar{\alpha}_2\overline{\omega}_2\bar{A}_3 + \overline{\omega}_{44}\bar{A}_4.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Body $\bar{A}_3, \bar{A}_4$ se pak dají napsat v tomto tvaru:

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= \gamma_0 A_0 + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_{11} A_3 + \gamma_{22} A_4,\\
\bar{A}_4 &= \varphi_0 A_0 + \varphi_1 A_1 + \varphi_2 A_2 + \varphi_{11} A_3 + \varphi_{22} A_4.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Do rovnic (22) dosaďme za $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ podle (20) a (23). Diferencujme dále rovnice (20) a (23) a za $\mathrm{d}A_0, \mathrm{d}A_1, \mathrm{d}A_2, \mathrm{d}A_3, \mathrm{d}A_4$ dosaďme podle (4). Porovnejme pak koeficienty u obou výsledků pro $\mathrm{d}\bar{A}_1, \mathrm{d}\bar{A}_2, \mathrm{d}\bar{A}_3, \mathrm{d}\bar{A}_4$. Snadno nalezneme:

$$
\begin{gathered}
\overline{\omega}_1 = \frac{c_1\omega_1}{\gamma_{11}} = \frac{c_1\lambda_1}{\gamma_{11}\varrho_{11}}\,\mathrm{d}u, \qquad \overline{\omega}_2 = \frac{d_2\omega_2}{\varphi_{22}} = \frac{d_2\mu_2}{\varphi_{22}\sigma_{22}}\,\mathrm{d}v,\\
\frac{c_0}{\mu_2} + \frac{c_1\beta_2\mu_2}{\sigma_{22}} = \bar{\beta}_2\frac{d_2^2\mu_2}{\varphi_{22}\sigma_{22}},\\
\frac{d_0}{\lambda_1} + \frac{d_2\beta_1\lambda_1}{\varrho_{11}} = \bar{\beta}_1\frac{c_1^2\lambda_1}{\gamma_{11}\varrho_{11}},\\
\bar{\alpha}_1\frac{c_1}{\gamma_{11}}\varphi_{22} = \gamma_{11}\alpha_1,\\
\bar{\alpha}_2\frac{d_2}{\varphi_{22}}\gamma_{11} = \varphi_{22}\alpha_2.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Specializujme nyní repér kongruence $\bar{\Gamma}$ tak, aby platilo

$$\overline{\omega}_1 = \mathrm{d}u, \qquad \overline{\omega}_2 = \mathrm{d}v. \tag{25}$$

Podle (24) musí pak platit

$$c_1\lambda_1 = \gamma_{11}\varrho_{11}, \qquad d_2\mu_2 = \varphi_{22}\sigma_{22}. \tag{26}$$

Rovnice (23) se dají psát podle (5) a (8) ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= \bar{\varrho}_0 x + \bar{\varrho}_1 x_u + \bar{\varrho}_{11} x_{uu},\\
\bar{A}_4 &= \bar{\sigma}_0 x + \bar{\sigma}_2 x_v + \bar{\sigma}_{22} x_{vv}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Dokažme, že specializace repéru (26) je totožná se specializací $\bar{\varrho}_{11} = \bar{\lambda}_1$, $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\mu}_2$, tedy je to specializace analogická k specializaci (17). Dosaďme v rovnicích (23) za

A_1, A_2, A_3, A_4 podle (2) a (5) a porovnejme koeficienty ve výsledných rovnicích u x_{uu} resp. x_{vv} s příslušnými koeficienty v rovnicích (27).

$$\bar{\varrho}_{11} = \gamma_{11}\varrho_{11}, \qquad \bar{\sigma}_{22} = \varphi_{22}\sigma_{22}.$$

Podle (21) pak platí $c_1\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$, $d_2\mu_2 = \bar{\mu}_2$.
Při specializaci (26) lze psát rovnice (24) v tomto tvaru:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\omega}_1 = \mathrm{d}u, && \overline{\omega}_2 = \mathrm{d}v,\\
&\bar{\beta}_1 = \frac{d_0 + d_2(\mu_0 + \mu_2 Q)}{\lambda_1 c_1}, && \bar{\beta}_2 = \frac{c_0 + c_1(\lambda_0 + \lambda_1 P)}{\mu_2 d_2},\\
&\bar{\alpha}_1 = \frac{c_1\lambda_1 m_{22}}{d_2\mu_2}, && \bar{\alpha}_2 = \frac{d_2\mu_2 n_{11}}{c_1\lambda_1}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

e) A. Švec ve své publikaci [6] uvažuje dvě kongruence přímek $L, \bar{L}$ v trojrozměrném projektivním prostoru P_3, resp. $\bar{P}_3$, které jsou v torzální korespondenci, tj. takové korespondenci $\boldsymbol{K}$, že každé rozvinutelné ploše kongruence L odpovídá rozvinutelná plocha kongruence $\bar{L}$.

Předpokládejme, že obě kongruence jsou vztaženy na své polokanonické repéry, pak korespondence $\boldsymbol{K}$ se dá napsat ve tvaru

$$\overline{\omega}_1 = \varepsilon_1\omega_1, \qquad \overline{\omega}_2 = \varepsilon_4\omega_2. \tag{29}$$

Autor volí dále takové polokanonické repéry, že platí

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_4 = 1. \tag{29a}$$

Korespondence $\boldsymbol{K}$ doplněná kolineací $\boldsymbol{K}_1$

$$
\begin{aligned}
K_1 A_1 &= \overset{*}{\sigma}_1\bar{A}_1,\\
K_1 A_2 &= \overset{*}{\sigma}_2\bar{A}_2
\end{aligned}
$$

se nazývá bodovou deformací $\boldsymbol{R}$ kongruencí $L, \bar{L}$, lze-li kolineaci $\boldsymbol{K}_1$ rozšířiti na celé prostory $P_3, \bar{P}_3$ tak, že křivky

$$
\begin{aligned}
z &= x_1\overset{*}{\sigma}_1\bar{A}_1 + x_2\overset{*}{\sigma}_2\bar{A}_2,\\
\bar{z} &= K_1(x_1 A_1 + x_2 A_2)
\end{aligned}
$$

mají pro každá x_1, x_2 analytický styk 1. řádu.

A. Švec dokazuje, že nutná a postačující podmínka pro existenci bodové deformace je při specializaci (29a)

$$\beta_1\beta_2 = \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2. \tag{30}$$

Duálně lze definovat tzv. rovinovou deformaci. Nutná a postačující podmínka pro existenci rovinové deformace $\boldsymbol{R}^*$ je při (29a)

$$\alpha_1\alpha_2 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2. \tag{31}$$

f) Definice. *Korespondencí $\bar{R}$ nazývejme takovou korespondenci kongruencí Γ a $\bar{\Gamma}$, že odpovídající si přímky leží v jediné tečné rovině τ plochy Φ.*

Kongruence Γ a $\bar{\Gamma}$ uvažujeme v dalším vztažené na polokanonické repéry specializované podle (17) a (26). Pak podle (19) a (28) platí

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2,$$

tedy jsou ve tvaru, jak uvažuje A. Švec.

Věta 1. *Každá korespondence $\bar{R}$ se dá rozšířit na rovinovou deformaci.* Plyne z rovnic (31), (28), (19).

Věta 2. *Korespondence $\bar{R}$ se dá rozšířit na bodovou deformaci, platí-li*

$$\bar{\lambda} = U(u)\, V(v)\, \lambda.$$

Důkaz: Dosadíme-li do rovnice (30) podle (19) a (28), dostaneme po snadné úpravě tuto podmínku.

$$P\frac{\mu_0}{\mu_2} + Q\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\mu_0}{\mu_2} = P\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2} + Q\frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1}\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2}$$

a odtud podle (9)

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)_v = \left(\frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1}\right)_v, \qquad \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)_u = \left(\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2}\right)_u$$

nebo podle odst. c)

$$(\log \lambda)_{uv} = (\log \bar{\lambda})_{uv}$$

a odtud plyne již hledaný výsledek.

g) V dalším předpokládejme, že kongruence Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W.

Podmínkami, kdy Γ, je kongruence W se zabýval B. Segre [4], jeho práci pak doplnil O. Sorace [5].

Věta 3. *Jestliže kongruence Γ i $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W, pak korespondence $\bar{R}$ se dá vždy rozšířit na bodovou deformaci.*

Důkaz: Kongruence Γ, resp. $\bar{\Gamma}$ jsou kongruencemi W, platí-li

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \qquad \text{resp.} \qquad \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_1\bar{\beta}_2.$$

Dosazením z rovnic (19), resp. (28) snadno dostaneme

$$m_{22}n_{11} - PQ = P\frac{\mu_0}{\mu_2} + Q\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\mu_0}{\mu_2},$$

$$m_{22}n_{11} - PQ = P\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2} + Q\frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1}\frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_2}.$$

Další část důkazu je zřejmá podle věty 2.

II. Předpokládejme, že v nadrovině H projektivního čtyřrozměrného prostoru P_4 je dána neparabolická kongruence přímek Γ o ohniskových plochách A_1, A_2. V P_4 hledejme plochu Φ, jejíž tečné roviny vytínají v nadrovině H právě kongruenci Γ.

Věta 4. *Plocha Φ závisí na dvou libovolných funkcích jednoho argumentu a dvou libovolných konstantách.*

Důkaz: V P_4 zvolme pohyblivý repér o vrcholech v bodech A_1, A_2, A_3, A_4, M. Vrcholy A_3, A_4 nechť jsou voleny tak, aby ležely v nadrovině H a repér A_1, A_2, A_3, A_4 byl polokanonickým repérem kongruence Γ. Zbývající vrchol $M = M(u, v)$ nechť neleží v H. Pak nutně platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega_{00}M + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 + \omega_{03}A_3 + \omega_{04}A_4, \\ \mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \beta_2\omega_2A_2 + \omega_1A_3, \\ \mathrm{d}A_2 &= \beta_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \alpha_1\omega_1A_4, \\ \mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \alpha_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4. \end{aligned} \tag{32}$$

V rovnicích (32) jsou ω_{ik}, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, ω_1, ω_2 známé Pfaffovy formy v diferenciálech $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou známé funkce parametrů u, v. Lokální souřadnice l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 bodu A plochy Φ jsou koeficienty lineární kombinace

$$A = l_0M + l_1A_1 + l_2A_2 + l_3A_3 + l_4A_4. \tag{33}$$

Aby tečná rovina plochy Φ v bodě A procházela přímkou (A_1, A_2), je nutné a stačí, aby determinanty čtvrtého řádu matice

$$(A, \mathrm{d}A, A_1, A_2)$$

byly rovny nule. Tyto podmínky vycházejí ve tvaru:

$$l_0(l_1\omega_1 + \mathrm{d}l_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2) - l_3(\mathrm{d}l_0 + l_0\omega_{00}) + l_0^2\omega_{03} = 0, \tag{34a}$$

$$l_0(l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + \mathrm{d}l_4 + l_4\omega_{44}) - l_4(\mathrm{d}l_0 + l_0\omega_{00}) + l_0^2\omega_{04} = 0, \tag{34b}$$

$$\begin{aligned} &l_3(l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + \mathrm{d}l_4 + l_4\omega_{44} + l_0\omega_{04}) - \\ &- l_4(l_1\omega_1 + \mathrm{d}l_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2 + l_0\omega_{03}) = 0. \end{aligned} \tag{34c}$$

Rovnice (34c) je lineární kombinace rovnic (34a), (34b). Levé strany rovnic (34) jsou Pfaffovy formy v diferenciálech neznámých funkcí l_0, l_3, l_4 a parametrů u a v. Řešením těchto rovnic vycházejí souřadnice l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 bodů plochy Φ.

Derivujeme-li vnějšně rovnice (34a), (34b) a použijeme-li rovnic struktury projektivního čtyřrozměrného prostoru, snadno dostaneme:

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}l_0, l_1\omega_1 + \mathrm{d}l_3 + l_3\omega_{33} + l_4\alpha_2\omega_2] + l_0[\mathrm{d}l_1, \omega_1] + \\ &+ l_0l_1\{[\omega_{11}, \omega_1] + [\omega_1, \omega_{33}]\} + l_0[\mathrm{d}l_3, \omega_{33}] + l_0l_3\{[\omega_{31}, \omega_1] + \\ &+ \alpha_1\alpha_2[\omega_1, \omega_2]\} + l_0\alpha_2[\mathrm{d}l_4, \omega_2] + l_0l_4[\mathrm{d}\alpha_2, \omega_2] + \\ &+ l_0l_4\alpha_2\{[\omega_{22}, \omega_2] + [\omega_2, \omega_{44}]\} - [\mathrm{d}l_3, \mathrm{d}l_0] - [\mathrm{d}l_3, l_0\omega_{00}] - \\ &- l_3[\mathrm{d}l_0, \omega_{00}] + 2l_0[\mathrm{d}l_0, \omega_{03}] + l_0^2\{[\omega_{00}, \omega_{03}] + [\omega_{01}, \omega_1] + \\ &+ [\omega_{03}, \omega_{33}] + \alpha_2[\omega_{04}, \omega_2]\} = 0, \end{aligned} \tag{35a}$$

$$
\begin{aligned}
&[dl_0, l_2\omega_2 + l_3\alpha_1\omega_1 + dl_4 + l_4\omega_{44}] + l_0[dl_2, \omega_2] + l_0 l_2\{[\omega_{22}, \omega_2] + \\
&+ [\omega_2, \omega_{44}]\} + l_0 l_3[d\alpha_1, \omega_1] + l_0\alpha_1[dl_3, \omega_1] + l_0 l_3\alpha_1\{[\omega_{11}, \omega_1] + \\
&+ [\omega_1, \omega_{33}]\} + l_0[dl_4, \omega_{44}] + l_0 l_4\{[\omega_{42}, \omega_2] + \alpha_1\alpha_2[\omega_2, \omega_1]\} - \\
&- [dl_4, dl_0] - l_0[dl_4, \omega_{00}] - l_4[dl_0, \omega_{00}] + 2l_0[dl_0, \omega_{04}] + \\
&+ l_0^2\{[\omega_{00}, \omega_{04}] + [\omega_{02}, \omega_2] + \alpha_1[\omega_{03}, \omega_1] + [\omega_{04}, \omega_{44}]\} = 0.
\end{aligned} \tag{35b}
$$

Z rovnic (34a) lze vypočísti dl_3, z rovnic (34b) dl_4 a dosadit do rovnic (35). Rovnice (35) pišme pak takto:

$$
\begin{aligned}
-l_1[dl_0, \omega_1] + [dl_1, l_0\omega_1] + \ldots &= 0,\\
[dl_2, l_0\omega_2] - l_2[dl_0, \omega_2] + \ldots &= 0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Nenapsané členy v rovnicích (36) jsou kvadratické vnější formy, jejíž členy neobsahují již diferenciálů neznámých funkcí. Napíšeme-li bilineární relace příslušné k rovnicím (36), dostaneme:

$$
\begin{aligned}
l_0\{dl_1\omega_1(\delta) - \delta l_1\omega_1(d)\} - l_1\{dl_0\omega_1(\delta) - \delta l_0\omega_1(d)\} + \ldots &= 0,\\
l_0\{dl_2\omega_2(\delta) - \delta l_2\omega_2(d)\} - l_2\{dl_0\omega_2(\delta) - \delta l_0\omega_2(d)\} + \ldots &= 0.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Pokládáme-li v rovnicích (37) dl_0, dl_1, dl_2, du, dv, δu, δv za známé, dostaneme dvě rovnice pro tři neznámé δl_0, δl_1, δl_2. Poněvadž ω_1, ω_2 jsou lineárně nezávislé Pfaffovy formy, je řád rovnic (37) roven dvěma, uzavřený systém (34), (35) je v involuci s charakteristikami (Finikov [2], str. 80, 81)

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 1.$$

Jediná libovolná funkce dvou proměnných ($s_2 = 1$) je faktorem homogenity souřadnic bodu A. Jsou-li l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 výsledné souřadnice bodu A plochy Φ, pak $\varrho l_0, \varrho l_1, \varrho l_2, \varrho l_3, \varrho l_4$, kde $\varrho = \varrho(u, v)$, rovněž vyhovují rovnicím (34), (35), jak lze snadno zjistit. Uvažujeme-li, že l_0 je libovolně zvolená funkce parametrů u, v, pak uzavřený systém (34), (35) je v involuci s charakteristikami

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 0.$$

Tím je podle teorie ~~o~~ systémech v involuci důkaz proveden. Vylučuje se případ $l_0 = 0$, poněvadž pak plocha Φ by ležela v nadrovině H.

Pracováno v semináři dif. geometrie prof. dr. J. Klapky

LITERATURA

[1] Blaschke W., *Sulla geometria proiettivo delle superficie V_2 dello spazio P_4*, Rend. circ. Mat. Palermo (2), 3 (1954), 193—197.

[2] Фиников С. П., *Теория конгруэнций*, Москва 1950.

[3] Lane E. P., *A treatise on projective differential geometry*, Chicago 1942.

[4] Segre B., *Intorno ad un problema di Wilhelm Blaschke*. Abhandlungen Mat. Sem. Hamburg, Bd. 20 (1956), 28—40.

[5] Sorace O., *Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti*. Rend. Sc. fis. mat. e nat., Roma 1956, 452—456.

[6] Švec A., *Projektivní deformace kongruencí* (litogr.), Praha 1955.

Došlo 18. 2. 1961.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie Vysokého učení technického v Brně

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПРЯМЫХ ПЕРЕСЕЧЕННЫХ В ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ ПРОЕКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА P_4 КАСАТЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ Φ

Йосеф Вала

Резюме

Пусть поверхность Φ лежит в проективном четырехмерном пространстве P_4. Её касательные плоскости пересекают гиперплоскости H, $\bar{H}$ пространства P в конгруэнциях прямых Γ, $\bar{\Gamma}$. Мы обозначим их фокальные поверхности A_1, A_2 или $\bar{A}_1, \bar{A}_2$. Соответствие $\bar{R}$ является таким соответствием конгруэнций Γ, $\bar{\Gamma}$, в котором соответствующие прямые лежат в единственной касательной плоскости поверхности Φ. Соответствие $\bar{R}$ дополненное колинеацией K, $KA_1 = \sigma_1^*\bar{A}_1$, $KA_2 = \sigma_2^*\bar{A}_2$, называется точечным изгибанием конгруенций Γ, $\bar{\Gamma}$, если колинеацию K можно расширить на все пространства H, $\bar{H}$, так что кривые

$$z = x_1\sigma_1^*\bar{A}_1 + x_2\sigma_2^*\bar{A}_2 \quad \text{и} \quad \bar{z} = K(x_1A_1 + x_2A_2)$$

имеют аналитическое касание 1-ого порядка. Двойственно можно определить, когда соответствие $\bar{R}$ можно расширить на плоскостное изгибание. Если конгруэнции Γ и $\bar{\Gamma}$ являются конгруэнциями W, тогда можно $\bar{R}$ всегда расширить на точечное изгибание. Всякое соответствие $\bar{R}$ можно расширить на плоскостное изгибание. Наконец найдена общность решения проблемы; к заданной конгруэнции Γ в гиперплоскости H найти в P_4 поверхность Φ так, чтобы ее касательные плоскости пересекали H именно в заданной конгруэнции Γ.

ÜBER DIE GERADENKONGRUENZEN, DIE IN DEN HYPEREBENEN DES PROJEKTIVEN VIERDIMENSIONALEN RAUMES P_4 DURCH DIE TANGENTIALEBENEN DER FLÄCHE Φ, WELCHE IM RAUME P_4 LIEGT, DURCHGESCHNITTEN WERDEN

Josef Vala

Zusammenfassung

Die Fläche Φ sei im projektiven vierdimensionalen Raume P_4 liegen. Ihre Tangentialebenen schneiden die Hyperebenen H, $\bar{H}$ des Raumes P_4 in den Geradenkongruenzen Γ, $\bar{\Gamma}$ durch. Ihre Fokalflächen bezeichnen wir durch A_1, A_2, bzw. $\bar{A}_1, \bar{A}_2$. Die Korrespondenz $\bar{R}$ ist eine Korres-

pondenz der Kongruenzen Γ, $\bar{\Gamma}$ mit solcher Eigenschaft, daß die entsprechenden Geraden in einer Tangentialebenen der Fläche Φ liegen. Die Korrespondenz $\bar{\boldsymbol{R}}$, die durch die Kollineation $\boldsymbol{K}$

$$KA_1 = \sigma_1^* \bar{A}_1, \qquad KA_2 = \sigma_2^* \bar{A}_2$$

ergänzt ist, bezeichnen wir als Punktabwicklung der Kongruenzen Γ, $\bar{\Gamma}$ in dem Falle, wenn es möglich ist, die Kollineation $\boldsymbol{K}$ auf die ganzen Räume H, $\bar{H}$ so zu ergänzen, daß die Kurven

$$z = x_1 \sigma_1^* \bar{A}_1 + x_2 \sigma_2^* \bar{A}_2 \qquad \text{und} \qquad \bar{z} = K(x_1 A_1 + x_2 A_2)$$

für jedes x_1, x_2 eine analytische Berührung erster Ordnung haben. Im dualen Sinne kann man feststellen, in welchem Falle es möglich ist, die Korrespondenz $\bar{\boldsymbol{R}}$ zu der sogenannten Ebenenabwicklung zu ergänzen. Falls die beiden Kongruenzen Γ und $\bar{\Gamma}$ die Kongruenzen W sind, dann ist es immer möglich, jede Korrespondenz $\bar{\boldsymbol{R}}$ zu einer Punktabwicklung zu ergänzen. Es ist möglich, jede Korrespondenz $\bar{\boldsymbol{R}}$ zu einer Ebenenabwicklung zu ergänzen. Endlich wird die Allgemeinheit der Lösung dieses Problems gefunden; zu der gegebenen Kongruenz Γ, die in der Hyperebene H des Raumes P_4 liegt, die Fläche Φ des Raumes P_4 zu finden, so daß ihre Tangentialebenen die Hyperebene H gerade in der gegebenen Kongruenz durchschneiden.