MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

O RACIONÁLNÍCH BODECH V ROVINĚ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

V tomto příspěvku vyšetřujeme racionální body na kuželosečkách a na obvodu některých pravidelných mnohoúhelníků. Užívá se zde jen zcela elementárních metod.

1. Úvod a pomocné pojmy

Všechny úvahy v tomto článku budeme provádět v euklidovské rovině, ve které je pevně zvolená pravoúhlá soustava souřadnic. Každý bod, jehož obě souřadnice jsou racionální čísla, nazýváme *racionálním bodem;* speciálním případem racionálního bodu je *bod mřížový* (obě jeho souřadnice jsou celá čísla).

V poslední době bylo publikováno několik prací, které řešily různé elementární otázky o racionálních (resp. mřížových) bodech v rovině. Patří sem např. známá otázka o tom, kolik mřížových bodů může ležet uvnitř nějaké kružnice nebo otázka, kolika racionálními body může procházet daná kružnice. Souhrnnou informaci o této problematice podává kniha W. Sierpińského *O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z pogranicza geometrii i arytmetyki*, která vyšla ve Varšavě r. 1959. V ní je možno najít i další literární odkazy.*

Pro stručnost vyjadřování zaveďme toto označení: Nechť M_0 značí množinu všech přímek, na kterých neleží žádný racionální bod, nechť M_1 je množina všech přímek, z nichž každá prochází právě jedním racionálním bodem a konečně nechť M_∞ je množina všech přímek, z nichž každá obsahuje nekonečně mnoho racionálních bodů. Je známo, že každá z množin M_0, M_1, M_∞ je neprázdná a že každá přímka patří právě do jedné z množin M_0, M_1, M_∞. Je-li $p \in M_\infty$, pak množina racionálních bodů ležících na přímce p je hustá v této přímce. Je-li $p \in M_\infty$, $q \in M_\infty$, pak průsečík přímek p, q je racionální bod (existuje-li ovšem tento průsečík). Spojnice libovolných dvou různých racionálních bodů patří do množiny M_∞.

* U nás se racionálními body v rovině zabýval nedávno V. Polák v práci *O jistém pokrytí racionálních bodů v rovině nekonečnou jednoduchou lomenou čarou,* Časopis pro pěstování matematiky 85, 141—145.

2. Racionální body na kuželosečkách

Ve výše citované knize W. Sierpińského je na str. 48 a 49 podán důkaz, že existuje kružnice se středem v racionálním bodě, která neprochází žádným racionálním bodem, je uveden příklad kružnice procházející právě jedním racionálním bodem a kružnice procházející právě dvěma racionálními body. Prochází-li kružnice k třemi různými racionálními body, pak na k leží už nekonečně mnoho racionálních bodů a tyto body vyplňují k hustě (str. 49). Uvedené výsledky doplníme nyní touto větou:

Věta 1: *Buďiž dán racionální bod R_1 a libovolná oblast Ω. Potom existuje kružnice k, která má střed $S \in \Omega$, prochází bodem R_1 a na níž už neleží žádný další racionální bod.*

Důkaz. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že platí $R_1 \equiv [0, 0]$. Sestrojme dvojrozměrný interval $(a, b) \times (c, d) \subset \Omega$ a vyhledejme racionální čísla x_0, y_0 taková, že $a < x_0 \sqrt{2} < b$, $c < y_0 \sqrt{2} < d$, $x_0 \neq 0 \neq y_0$. Rovnice $(x - x_0\sqrt{2})^2 + (y - y_0\sqrt{2})^2 = 2(x_0^2 + y_0^2)$ značí kružnici se středem v bodě $[x_0\sqrt{2}, y_0\sqrt{2}] \in \Omega$ a (kladným) poloměrem $\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}$. Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$x^2 + y^2 = 2(x_0x + y_0y) \cdot \sqrt{2}. \tag{1}$$

Vyhledejme všechny racionální body, které vyhovují rovnici (1). Pro žádný takový bod $[x, y]$ nemůže být $x_0x + y_0y \neq 0$, neboť pak bychom obě strany rovnice (1) dělili číslem $2(x_0x + y_0y)$ a došli bychom k zřejmému sporu. Je tedy $x_0x + y_0y = 0$ a proto i $x^2 + y^2 = 0$. Odtud plyne $x = y = 0$ a jediný racionální bod, jímž naše kružnice prochází, je bod R_1. Důkaz je podán.

Obraťme se nyní k obecnějším kuželosečkám.

Snadno nahlédneme, že existuje regulární kuželosečka, která neprochází žádným racionálním bodem. Přitom je ještě možno žádat, aby tato kuželosečka byla elipsou (speciálně kružnicí) nebo hyperbolou nebo parabolou. K důkazu stačí uvažovat pomocnou kuželosečku (žádaného druhu)

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{2}$$

jejíž koeficienty a_{ij} jsou vesměs racionální čísla; rovnice $F(x, y) = \sqrt{2}$ značí pak kuželosečku (žádaného druhu), na níž zřejmě neleží žádný racionální bod.

Dále si všimněme racionálních bodů ležících na elipse. Zde budeme potřebovat pojem konvexně ireducibilní množiny. Množina A se nazývá *konvexně ireducibilní*, jestliže pro každou její vlastní podmnožinu B platí: konvexní obal množiny B je vlastní podmnožinou konvexního obalu množiny A.

Nyní dokážeme tuto větu:

Věta 2. *Budiž dáno přirozené číslo $k \leqq 4$. Nechť R_i $(1 \leqq i \leqq k)$ jsou navzájem různé racionální body, které tvoří konvexně ireducibilní množinu. Potom existuje elipsa procházející všemi body R_i, na niž už neleží žádný další racionální bod.*

Důkaz. Probereme jen nejobtížnější případ $k = 4$.* Označení bodů R_i volme tak, aby příslušný konvexní obal byl čtyřúhelník $R_1R_2R_3R_4$.

Ke každému racionálnímu číslu $m \neq 0$ přiřaďme kuželosečku

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} . \sqrt{2} = 0.$$

Množinu těchto kuželoseček označíme K. Každá z kuželoseček množiny K prochází body R_1, R_2, R_3, R_4. Ukážeme, že na žádné z nich už neleží pátý racionální bod R.

Je-li $R \equiv [x, y]$ racionální bod naší kuželosečky, potom musí platit současně

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bod R leží tedy na některé z přímek R_1R_3, R_2R_4, a současně na některé z přímek R_1R_2, R_3R_4. Vzhledem k podmínkám, jež splňují body R_i, může být R jedině některý z bodů R_1, R_2, R_3, R_4.

V množině K budeme nyní hledat elipsu.

Pro stručnost zaveďme označení $X_{ij} = x_i - x_j$, $Y_{ij} = y_i - y_j$ a sestrojme funkci

$$f(m) = \begin{vmatrix} 2(Y_{12}Y_{34} + mY_{13}Y_{24}.\sqrt{2}), & -X_{34}Y_{12} - X_{12}Y_{34} - m(X_{24}Y_{13} + X_{13}Y_{24}).\sqrt{2} \\ -X_{34}Y_{12} - X_{12}Y_{34} - m(X_{24}Y_{13} + X_{13}Y_{24}).\sqrt{2}, & 2(X_{12}X_{34} + mX_{13}X_{24}.\sqrt{2}) \end{vmatrix}$$

reálné proměnné m. Rovnice $f(m) = 0$ má koeficient u m^2 rovný

$$-2(X_{24}Y_{13} - X_{13}Y_{24})^2 =$$
$$= -2\left(\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3, & y_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \end{vmatrix}\right)^2.$$

Vzhledem k předpokladu o konvexním čtyřúhelníku $R_1R_2R_3R_4$ jsou oba determinanty, které se zde vyskytují, čísla různá od nuly a mají stejné znaménko. Koeficient u m^2 je tedy různý od nuly a rovnice $f(m) = 0$ je kvadratická. Její diskrimant je

$$8(X_{24}X_{34}Y_{12}Y_{13} + X_{13}X_{34}Y_{12}Y_{24} + X_{12}X_{24}Y_{13}Y_{34} +$$
$$+ X_{12}X_{13}Y_{24}Y_{34} - 2X_{12}X_{34}Y_{13}Y_{24} - 2X_{13}X_{24}Y_{12}Y_{34})^2 -$$
$$- 8(X_{24}Y_{13} - X_{13}Y_{24})^2 . (X_{12}Y_{34} - X_{34}Y_{12})^2.$$

Výpočtem se můžeme přesvědčit, že je tento diskriminant roven 32Φ, kde

$$\Phi = \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \\ x_4, y_4, 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_3, y_3, 1 \\ x_4, y_4, 1 \\ x_1, y_1, 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_4, y_4, 1 \\ x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \end{vmatrix} .$$

Vzhledem k předpokladům o bodech R_i je nalezený výsledek kladný,* a je proto správné toto tvrzení: Existuje interval (m_1, m_2), v němž je funkce $f(m)$ kladná. Vyhledejme racionální číslo $m \in (m_1, m_2)$, $m \neq 0$ a sestrojme kuželosečku, která tomuto číslu v množině K odpovídá. Tato kuželosečka je zřejmě elipsa; tím je důkaz podán.

Obdobné výsledky, jaké uvádí věta 2, je možno vyslovit také o hyperbole a parabole.

Tuto větu můžeme ještě doplnit závěrem, který je obdobný větě o kružnici s třemi racionálními body. Dá se totiž dokázat toto: Leží-li na regulární kuželosečce pět různých racionálních bodů, pak na této kuželosečce existuje nekonečně mnoho racionálních bodů a tyto body vyplňují uvažovanou kuželosečku hustě.

3. Pravidelné mnohoúhelníky

Kolik racionálních bodů může obsahovat obvod pravidelného n-úhelníka? Omezíme-li se na konečný počet bodů, vidíme, že obvod pravidelného n-úhelníka obsahuje nejvýše n racionálních bodů. Jsou-li dána dvě celá čísla k, n taková, že $0 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 3$, pak zůstává otevřenou otázka, zda existuje pravidelný n-úhelník, jehož obvod obsahuje právě k racionálních bodů.

Případ rovnostranného trojúhelníka je triviální a také pro čtverec si snadno ověříme platnost prve vyslovené domněnky. Při podrobnějším rozboru o poloze čtverce nacházíme toto:

a) Pro $k = 0$ lze najít čtverec, jehož každá strana leží na rovnoběžce s některou osou souřadnic. Dá se zde však sestrojit také čtverec, jehož žádná strana není rovnoběžná s některou osou souřadnic.

b) Případ $k = 1$ můžeme realizovat dvěma způsoby: racionální bod je buď vrcholem čtverce nebo je vnitřním bodem jeho strany.

---

* V tomto případě znamená předpoklad o konvexně ireducibilní množině bodů R_i podmínku nutnou k tomu, aby existovala elipsa z věty 2. Leží-li totiž např. bod R_4 uvnitř trojúhelníka $R_1R_2R_3$ nebo na jeho obvodu, pak není možno sestrojit žádnou elipsu procházející body R_i.

* Dá se dokázat, že nerovnost $\Phi > 0$ vyjadřuje nutnou a postačující podmínku k tomu, aby konvexní obal bodů R_1, R_2, R_3, R_4 byl čtyřúhelník.

Tabulka 1

Případ	Racionální body na obvodě	Vrcholy čtverce
a)	žádný bod	$A \equiv [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, $B \equiv [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $C \equiv [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $D \equiv [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$
		$A \equiv [3, 3\sqrt{3}]$, $B \equiv [4, 4\sqrt{3}]$, $C \equiv [4-\sqrt{3}, 4\sqrt{3}+1]$, $D \equiv [3-\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+1]$
b)	vrchol A	$A \equiv [0, 0]$, $B \equiv [-3\sqrt{3}, 3]$, $C \equiv [3-3\sqrt{3}, 3+3\sqrt{3}]$, $D \equiv [3, 3\sqrt{3}]$
	bod [0, 0] ležící uvnitř strany AB	$A \equiv [-2, -2\sqrt{3}]$, $B \equiv [1, \sqrt{3}]$, $C \equiv [1-3\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$, $D \equiv [-2-3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+3]$
c)	vrchol A a bod [0,4] uvnitř strany BC	$A \equiv [0, 0]$, $B \equiv [\sqrt{3}, 3]$, $C \equiv [\sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3]$, $D \equiv [-3, \sqrt{3}]$
	bod [0, 0] uvnitř strany AB a bod [—4, 0] uvnitř sousední strany AD	$A \equiv [-1, -\sqrt{3}]$, $B \equiv [1, \sqrt{3}]$, $C \equiv [1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, $D \equiv [-1-2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$
	bod [0, 0] uvnitř strany AB a bod [—4, 4] uvnitř protější strany CD	$A \equiv [-\sqrt{3}, -3]$, $B \equiv [1, \sqrt{3}]$, $C \equiv [-\sqrt{3}-2, 1+2\sqrt{3}]$, $D \equiv [-3-2\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}]$
d)	bod [0, 0] uvnitř strany AB, bod [—8, 12] uvnitř strany BC a bod [—36, —8] uvnitř strany AD	$A \equiv [-9-2\sqrt{3}, -9\sqrt{3}-6]$, $B \equiv [-2+3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+9]$, $C \equiv [-17-4\sqrt{3}, 16+3\sqrt{3}]$, $D \equiv [-24-9\sqrt{3}, 1-4\sqrt{3}]$
e)	bod [0, 0] uvnitř strany AB, bod [0, 4] uvnitř strany BC, bod [—4, 4] uvnitř strany CD a bod [—4, 0] uvnitř strany DA	$A \equiv [-1, -\sqrt{3}]$, $B \equiv [\sqrt{3}, 3]$, $C \equiv [-3, 4+\sqrt{3}]$, $D \equiv [-4-\sqrt{3}, 1]$

c) Pro $k = 2$ máme tři možnosti: buď jeden racionální bod je vrcholem čtverce a druhý vnitřním bodem jeho jedné strany, nebo oba racionální body jsou vnitřními body dvou sousedních stran čtverce nebo konečně jsou oba vnitřními body dvou stran protějších.

d) Pro $k = 3$ nemůže být žádný vrchol čtverce racionálním bodem; naproti tomu lze však sestrojit čtverec, jehož tři strany obsahují uvnitř po jednom racionálním bodu.

e) Konečně případ $k = 4$ lze realizovat také jen jedním způsobem, totiž tak, že každá strana čtverce obsahuje uvnitř po jednom racionálním bodu.

Příklady čtverců, o nichž jsme mluvili v odstavcích a) až e), jsou patrné z tabulky 1.

Dokážeme ještě jednu větu o čtverci.

Věta 3. *Budiž dán čtverec ABCD. Patří-li všechny přímky AB, BC, CD do množiny M_1, pak také přímka DA patří do M_1. Označíme-li po řadě R, S, T, U racionální body přímek AB, BC, CD, DA, potom o vzdálenostech RT a SU platí RT = SU.*

Důkaz. Zvolme označení vrcholů tak, že bod A má druhou souřadnici menší než kterýkoliv z bodů B, C, D a že bod B má první souřadnici větší než kterýkoliv z bodů A, C, D. Racionální body přímek AB, BC, CD nechť jsou po řadě $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, 3$ a nechť $A \equiv [\xi_{14}, \eta_{14}]$, $B \equiv [\xi_{12}, \eta_{12}]$, $C \equiv [\xi_{32}, \eta_{32}]$, $D \equiv [\xi_{34}, \eta_{34}]$. Bodem B veďme rovnoběžku s osou y a promítněme na ni kolmo body A, C; příslušné paty označme A_1, C_1. Trojúhelníky ABA_1 a BCC_1 jsou zřejmě shodné a proto platí

$$\xi_{12} - \xi_{14} = \eta_{32} - \eta_{12}, \quad \eta_{12} - \eta_{14} = \xi_{12} - \xi_{32}. \tag{3}$$

Je-li k směrnice přímky AB, pak snadným výpočtem najdeme

$$\xi_{12} = \frac{k(y_2 - y_1) + k^2 x_1 + x_2}{k^2 + 1}, \qquad \eta_{12} = \frac{k(x_2 - x_1) + k^2 y_2 + y_1}{k^2 + 1}$$

a obdobné vzorce platí pro ξ_{32}, η_{32}.

Dosadíme-li toto do rovnic (3), dostaneme

$$\xi_{14} = \frac{k^2 x_1 + k(y_2 - y_1 + x_3 - x_1) + x_2 - y_3 + y_1}{k^2 + 1},$$

$$\eta_{14} = \frac{k^2(x_3 - x_1 + y_2) + k(x_2 - x_1 + y_1 - y_3) + y_1}{k^2 + 1}.$$

Po dosazení do rovnice

$$y - \eta_{14} = -\frac{1}{k}(x - \xi_{14}),$$

která představuje přímku DA, vychází po malé úpravě

$$k(y - y_2 + x_1 - x_3) + (x - x_2 + y_3 - y_1) = 0.$$

Protože číslo k je iracionální, patří zřejmě přímka DA do M_1, přičemž racionální bod přímky DA je $U \equiv [x_4, y_4]$, kde

$$x_4 = x_2 + y_1 - y_3, \qquad y_4 = y_2 + x_3 - x_1 .$$

Vztah $RT = SU$ dostaneme nyní už snadným výpočtem. Tím je důkaz podán.

Došlo 30. 1. 1961.

Matematický ústav
Československé akademie věd
v Praze

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ В ПЛОСКОСТИ

Иржи Седлачек

Резюме

Точка $P \equiv [x, y]$ называется *рациональной*, когда x, y — рациональные числа. В настоящей работе строится к данному конечному множеству M, состоящему из рациональных точек, регулярное коническое сечение данного типа, содержащее все точки множества M и никаких других рациональных точек. Исследуются условия, при которых эта задача имеет решение. Затем в работе уделяется внимание рациональным точкам на сторонах правильного многоугольника. Высказывается предположение, что для каждой пары целых чисел k, n, удовлетворяющих условиям $0 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 3$, существует всегда правильный n-угольник, на сторонах которого расположено точно k рациональных точек.

ÜBER RATIONALE PUNKTE IN DER EBENE

Jiří Sedláček

Zusammenfassung

Der Punkt $P \equiv [x, y]$ heißt *rational*, wenn x, y rationale Zahlen sind. In dieser Arbeit konstruieren wir zu einer endlichen Menge M, deren Elemente rationale Punkte sind, einen regulären Kegelschnitt gegebener Art, der alle Punkte von der Menge M enthält und außer diesen durch keinen weiteren rationalen Punkt durchlauft. Wir untersuchen auch die Bedingungen, unter welchen diese Aufgabe lösbar ist. Weiter studieren wir rationale Punkte, die am Umfang eines regelmäßigen n-Eck liegen. Es wird folgende Vermutung ausgesprochen: Für jede zwei ganze Zahlen k, n, wo $0 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 3$, kann man einen regelmäßigen n-Eck konstruieren, dessen Umfang gerade k rationale Punkte enthält.