MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

OSCILATORICKÉ RIEŠENIA ISTEJ NELINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

ŠTEFAN BELOHOREC, Bratislava

V práci [1] našiel F. V. Atkinson nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby všetky riešenia rovnice

$$y'' + f(x)\, y^{2n+1} = 0 \tag{α}$$

($f(x) > 0$, spojitá pre $x > 0$, $n \geqq 1$ prirodzené číslo) boli oscilatorické. J. Jones v [2] zovšeobecnil jeho výsledok pre rovnicu

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{2i+1} = 0 \tag{β}$$

($f_i(x) \geqq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ spojité pre $x > 0$, $f_k(x) > 0$ pre nejaké k, $f_i'(x) \in L(a, \infty)$).

Z dôkazov oboch viet vidieť, že tvrdenia zostanú zachované aj pre diferenciálnu rovnicu, v ktorej exponenty $2i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nahradíme číslami $N_i > 1$, pričom o N_i predpokladáme, že $N_i = p_i/q_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), kde p_i a q_i sú nepárne prirodzené čísla. Cieľom tejto práce je nájsť takúto podmienku v prípade, že $0 < N_i < 1$.

Oscilatorickým riešením budeme v ďalšom rozumieť riešenie, ktoré má aspoň jeden nulový bod v intervale (t, ∞) pre ľubovoľné t.

Veta. *Nech $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) a nech $N_i = p_i/q_i$, kde p_i a q_i sú nepárne prirodzené čísla. Nech sú funkcie $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nezáporné, spojité v intervale $(0, \infty)$, pričom existuje index k a číslo a tak, že $f_k(x) > 0$ v (a, ∞). Nech sú ďalej funkcie $f_i(x)$ také, že každé riešenie diferenciálnej rovnice*

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i} = 0 \tag{1}$$

dá sa rozšíriť na celý interval $(0, \infty)$.

Potom všetky riešenia rovnice (1) sú oscilatorické vtedy a len vtedy, keď

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\, dx = \infty.$$

Dôkaz. 1. Nech $y(x)$ je neoscilatorické riešenie rovnice (1). Nech pre $x > a$ je už $y(x) > 0$ (podobne by sme postupovali pre $y(x) < 0$). Potom $y''(x) < 0$, t. j. $y'(x)$ klesá, existuje teda $\lim_{x \to \infty} y'(x) = c \geqq 0$. Integrovaním rovnice (1) dostaneme

$$y'(x) - y'(0) + \int_0^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt = 0.$$

Existencia limity $y'(x)$ pre $x \to \infty$ nám zaručí existenciu integrálu

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x)\, dx$$

a pretože $\lim_{x \to \infty} y'(x) \geqq 0$, môžeme napísať

$$y'(x) \geqq \int_x^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt, \qquad x > a.$$

Integrujme poslednú nerovnosť v intervale $\langle a, x \rangle$. Potom pre $x > a$ dostaneme

$$y(x) - y(a) \geqq \int_a^x \int_u^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt\, du =$$

$$= (x - a) \int_x^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt + \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt.$$

Z tejto nerovnosti vyplýva, že

$$y(x) \geqq (x - a) \int_x^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt.$$

Umocnením na N_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$) a ďalšou elementárnou úpravou dostaneme

$$f_j(x)\, y^{N_j}(x) \left\{ \int_x^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt \right\}^{-N_j} \geqq (x - a)^{N_j} f_j(x).$$

Pretože $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x) \geqq f_j(x)\, y^{N_j}(x) \geqq 0$, z predchádzajúcej nerovnosti máme

$$\sum_{j=1}^{n} (x - a)^{N_j} f_j(x) \leqq \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x) \right\} \left\{ \int_x^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt \right\}^{-N_j}.$$

Integrujme poslednú nerovnosť v intervale $\langle x_1, x_2\rangle$, pričom $a < x_1 < x < x_2$. Dostaneme výraz

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} (x-a)^{N_j} f_j(x)\,dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{j=1}^{n} \left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x)\right\} \left\{\int_x^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,dt\right\}^{-N_j}\right] dx.$$

Položme teraz

$$F_j(x) = \left\{\int_x^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,dt\right\}^{1-N_j}.$$

Potom

$$F_j'(x) = (N_j - 1)\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x)\right\}\left\{\int_x^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,dt\right\}^{-N_j}.$$

Platí preto

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} (x-a)^{N_j} f_j(x)\,dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} (N_j - 1)^{-1} F_j'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (N_j - 1)^{-1}\left[\left\{\int_x^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,dt\right\}^{1-N_j}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Ak necháme x_2 rásť nad všetky medze, posledná nerovnosť nám zaručí, že

$$\int^\infty \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\,dx < \infty,$$

čím je dokázané tvrdenie o postačujúcej podmienke.

2. Aby sme dokázali tvrdenie o nutnej podmienke, stačí nájsť aspoň jedno neoscilatorické riešenie rovnice (1) za predpokladu, že platí

$$\int^\infty \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\,dx < \infty.$$

Nech $\int^\infty \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\,dx < \infty$. Potom pre dostatočne veľké a platí nerovnosť

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^{n} (x-a)^{N_i} f_i(x)\,dx < \varepsilon,$$

pričom ε je ľubovoľné malé kladné číslo. Integrujme teraz rovnicu (1) v intervale $\langle a, x\rangle$. Dostaneme

$$y'(a) = y'(x) + \int_a^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,dt. \tag{2}$$

Nech je $y(x)$ také riešenie rovnice (1), že $y(a) = 0$, $y'(a) \geqq 1$. O tomto riešení dokážeme, že v intervale (a, ∞) nemá nulový bod. Pripusťme že to nie je pravda a označme znakom b najmenší nulový bod riešenia $y(x)$ v intervale (a, ∞). Riešenie $y(x)$ v intervale (a, b) spĺňa nerovnosť

$$y(x) \leqq y'(a)\,(x-a),$$

pretože je tam konkávnou funkciou. Dosadením do (2) dostaneme

$$y'(a) \leqq y'(x) + \int_a^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,[y'(a)]^{N_i}(t-a)^{N_i}\,dt \leqq$$

$$\leqq y'(x) + y'(a)\int_a^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x-a)^{N_i}\,dx,$$

t. j.

$$y'(a) \leqq y'(x) + y'(a)\,\varepsilon.$$

Ale potom platí

$$y'(a)[1-\varepsilon] \leqq y'(x).$$

Pretože ε môžeme voliť ľubovoľne malé, z poslednej nerovnosti vyplýva, že $y(x)$ je rastúcou funkciou v celom intervale (a, b), čo je spor. Teda riešenie $y(x)$ nenadobúda v intervale (a, ∞) nulový bod, t. j. je neoscilatorické.

V nasledujúcich dvoch poznámkach uvedieme príklady funkcií, ktoré spĺňujú predpoklady vety.

Poznámka 1. Nech sú funkcie $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) nezáporné v intervale $(0, \infty)$, pričom aspoň jedna z nich je kladná. Nech majú derivácie a nech platí $f_i'(x) \leqq 0$ pre všetky i. Potom každé riešenie rovnice (1) dá sa rozšíriť na celý interval $(0, \infty)$.

Aby sme toto dokázali, utvorme funkciu

$$V(x) = y^2(x)/2 + \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x)\, y^{N_i+1}(x) > 0.$$

Potom

$$V'(x) = \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i'(x)\, y^{N_i+1}(x) \leqq 0,$$

t. j. $y'(x)$ je ohraničená. Nech $y(x)$ je riešením rovnice (1). Ak má toto riešenie konečný počet nulových bodov, podľa klasických viet je možné rozšíriť ho. Ak existuje taká postupnosť $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) nulových bodov riešenia $y(x)$, že $\lim_{x \to \infty} x_n = x_0$, potom z ohraničenosti prvej derivácie vyplýva $\lim_{x \to x_0} y(x) = 0$. Podobne $\lim_{x \to x_0} y'(x) = 0$. To znamená, že riešenie $y(x)$ môžeme predĺžiť nulovým riešením.

Poznámka 2. Ak diferenciálna rovnica (1) prejde do tvaru

$$y'' + f(x)\, y^N = 0$$

($0 < N < 1$, $N = p/q$, p a q sú nepárne prirodzené čísla), pričom funkcia $f(x)$ je kladná v intervale $(0, \infty)$ a v každom konečnom intervale má konečnú variáciu, potom ľubovoľné riešenie takejto rovnice sa dá rozšíriť na celý interval $(0, \infty)$. Podľa [3] je $y'(x)$ ohraničená v každom konečnom intervale a predĺženie je možné z dôvodov ako v poznámke 1.

LITERATÚRA

[1] Atkinson F. V., *On second-order non-linear oscillations*, Pacific J. Math. 5 (1955), 643—647.

[2] Jones J., *On the extension of a theorem of Atkinson's*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 7 (1956), 306—309.

[3] Jasný M., *О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка* $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, $f(x) > 0$, Časopis Pěst. Mat. 85 (1960), 78—83.

Došlo 23. 1. 1961.

Katedra matematiky Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Штефан Белогорец

Резюме

Ф. В. Аткинсон нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы все решения уравнения (α) являлись колеблющимися. Дж. Джонс обобщил его результат для уравнения (β). Из доказательств обеих теорем видно, что утверждения сохраняют силу и для дифференциального уравнения, в котором показатели $2i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) заменяются числами $N_i > 1$, причем предполагается, что $N_i = p_i/q_i$ ($i = 1, \ldots, n$), где p_i и q_i нечетные натуральные числа. Целью настоящей работы является найти такое условие для случая $0 < N < 1$.

Теорема. Пусть $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и пусть $N_i = p_i/q_i$, где p_i и q_i нечетные натуральные числа. Пусть функции $f_i(x)$ неотрицательны, непрерывны в интервале $\langle a, \infty)$, причем существует индекс k и число a так, что $f_k(x) > 0$ в интервале (a, ∞). Пусть далее функции $f_i(x)$ будут такими, что всякое решение дифференциального уравнения (1) можно продолжить на весь интервал $(0, \infty)$. Утверждается, что все решения уравнения (1) являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\, dx = \infty .$$

OSCILLATORY SOLUTIONS OF CERTAIN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Štefan Belohorec

Summary

F. V. Atkinson has proved a necessary and sufficient condition in order that every solution of the equation (α) oscillates. J. Jones generalized this result for the equation (β). It is seen from the proofs of both theorems that these statements are valid for the differential equation in which the exponents $2i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) are substituted by $N_i > 1$ where N_i is supposed to be equal to $N_i = p_i/q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), p_i and q_i being odd integers. The aim of this work is to find such a condition in case $0 < N < 1$.

Theorem. Let $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) and let $N_i = p_i/q_i$ where p_i and q_i are odd integers. Let the functions $f_i(x)$ be non-negative continuous in (a, ∞), where an index k and a number a exist in such a way, that $f_k(x) > 0$ in (a, ∞). Further, let the functions $f_i(x)$ be such, that each solution of the differential equation (1) can be extended in the whole interval $(0, \infty)$. Than all solutions of the equation (1) oscillate than and only than if

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\, dx = \infty .$$