MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

O DIMENZII A MIERE

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

1. E. Szpilrajn našiel vzťah medzi dimenziou ľubovoľného separabilného metrického priestoru a Hausdorffovou mierou.* Označme r-rozmerný eukleidovský priestor znakom E_r, r-rozmernú jednotkovú kocku I_r, r-rozmernú Lebesgueovu mieru L_r, Hausdorffovu n-rozmernú mieru H_n. Potom platí:

(A) Ak dim $X = n$, potom $H_n(X) > 0$.

(B) Ak dim $X \leqq n$, potom je X homeomorfný množine $Y \subset I_{2n+1}$, $H_{n+1}(Y) = 0$.

Z viet (A), (B) vyplýva spôsob, ktorým možno definovať dimenziu pomocou miery:

(C) dim $X \leqq n$ vtedy a len vtedy, ak je X homeomorfný množine $Y \subset I_{2n+1}$, $H_{n+1}(Y) = 0$.**

H. Federer dokázal v [1] platnosť vety (A) pre Favardovu mieru F_n a podmnožiny E_r. Pretože $H_n(X) = 0$ implikuje $F_n(X) = 0$, platia pre F_n tiež vety (B) a (C). V predloženom článku je dokázaná táto veta:

Ak dim $X = n$, $X \subset E_r$, potom existuje také $\mu \in C_n^r$, že $L_n(h_\mu(X)) > 0$.***

Odtiaľ vyplýva tiež platnosť vety (A) pre ľubovoľnú vonkajšiu mieru indukovanú n-rozmernou mierou v zmysle Kolmogorova ([4], str. 351).

2. Nech n, r sú prirodzené čísla, $n \leqq r$. Označme C_n^r systém všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, r\}$ o n prvkoch. Pre $\mu \in C_n^r$, $\mu = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ a prvok $x \in E_r$ kladieme

$$h_\mu(x_1, \ldots, x_r) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$$

a nazývame priemetom bodu x do n-rozmernej nadroviny $x_i = 0$ pre $i \bar{\in} \mu$.

3. Veta. *Nech* $1 \leqq k \leqq s$, $Y \subset E_s$, *s ľubovoľné. Ak* dim $Y = k$, *potom existuje také* $\mu \in C_k^s$, *že* $L_k(h_\mu(Y)) > 0$.

---

* Pozri tiež [2], § 7, veta VII 1.

** Stačí si uvedomiť, že dimenzia sa zachová pri homeomorfnom zobrazení.

*** Význam symbolov C_n^r, h_μ je definovaný v 2.

Dôkaz. Urobíme indukciou. Nech $k = 1$, s ľubovoľné. Pretože $\dim Y = 1$, existuje bod $x_0 \in Y$ a také $r > 0$, že pre všetky u, $0 < u < r$ je $Fr\, K(x_0, u) \cap Y \neq 0$, $K(x_0, u) = \bigtimes_{i=1}^{s} (x_0^i - u, x_0^i + u)$.* Pretože $L_k h_\mu$ sa posunutím nemení, môžeme vziať x_0 za počiatok súradnicového systému. Keby $L_1(h_\mu(Y)) = 0$ pre všetky $\mu \in C_1^s$, platilo by tiež $L_1(\bigcup_\mu (h_\mu(Y)) = 0$. Zrejme však $L_1(\bigcup_\mu h_\mu(Y)) = r > 0$. Teda tvrdenie našej vety je správne pre $k = 1$.

Nech je dokazovaná veta správna pre nejaké k, s ľubovoľné. Vezmime $k + 1 \leqq s$, $Y \subset E_s$, $\dim Y = k + 1$. Existuje teda bod $x_0 \in Y$ a také $r > 0$, že $\dim (Fr\, K(x_0, u)) \cap \cap\, Y = k$ pre každú kocku $K(x_0, u)$, $0 < u < r$. Opäť môžeme vziať bod x_0 za počiatok súradnicového systému. Označme $K(0, u) = K(u)$. Podľa indukčného predpokladu existuje ku každému u, $0 < u < r$ také $\mu \in C_k^s$, že $L_k(h_\mu(Fr\, K(u) \cap Y)) > > 0$. Pretože C_k^s je konečná, existuje také $\mu \in C_k^s$, že pre množinu $A = = \{u \in E_1 : L_k(h_\mu(Fr\, K(u) \cap Y)) > 0\}$ platí $L_1(A) > 0$. Označme $K_i^+(u) = Fr\, K(u) \cap \cap \{(x_1, \ldots, x_s) : x_i = u\}$, $K_i^-(u) = Fr\, K(u) \cap \{(x_1, \ldots, x_s) : x_i = -u\}$, $K_i(u) = = K_i^+(u) \cup K_i^-(u)$. Pretože $Fr\, K(u) = \bigcup_{i=1}^{s} K_i(u)$, $L_k(h_\mu(Fr\, K(u) \cap Y)) > 0$ pre $u \in A$, $L_k(h_\mu(K_i(u))) = 0$ pre $i \in \mu$, existuje ku každému $u \in A$ také $i \bar{\in} \mu$, že $L_k(h_\mu(K_i(u) \cap Y)) > > 0$. Pretože potom $A = \bigcup_{i \bar{\in} \mu} \{u : L_k(h_\mu(K_i(u) \cap Y)) > 0\}$, existuje $i_0 \bar{\in} \mu$ také, že pre množinu $B = \{u : L_k(h_\mu(K_{i_0}(u) \cap Y)) > 0\}$ platí $L_1(B) > 0$. Ak označíme $B^+ = \{u : L_k(h_\mu(K_{i_0}^+(u) \cap Y)) > 0\}$, $B^- = \{u : L_k(h_\mu(K_{i_0}^-(u) \cap Y)) > 0\}$, potom má aspoň jedna z množín B^+, B^- kladnú L_1-mieru. Položme $v = \mu \cup \{i_0\}$. Nech je i_0 na j-tom mieste v v. Označme $C^+ = \{(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{k+1}) : x_j > 0, (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{k+1}) \in h_\mu(K_{i_0}^+(+x_j) \cap Y)\}$, $C^- = \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) : x_j < 0, (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{k+1}) \in h_\mu(K_{i_0}^-(-x_j) \cap Y)\}$. Platí $h_v(Y) \supset C = C^+ \cup C^-$. Stačí nám ukázať, že $L_{k+1}(C) > 0$. Nech $L_1(B^+) > 0$. Keby $L_{k+1}(C^+) = 0$, bola by C^+ L_{k+1}-merateľná a v dôsledku Fubiniho vety** platilo by $L_1(B^+) = 0$. V prípade, že $L_1(B^-) > 0$ dokážeme podobne, že $L_{k+1}(C^-) > 0$. Tým je dôkaz ukončený.

4. Dôsledok. *Nech μ je ľubovoľná k-rozmerná miera v E_s v zmysle Kolmogorova.**** *Označme μ^* vonkajšiu mieru indukovanú mierou μ. Nech $A \subset E_s$. Potom ak* $\dim A = k$, *je $\mu^*(A) > 0$.*

Dôkaz. Vezmime množinu A zo znenia dôsledku. Označme znakom $\mathbf{A}$ systém analytických množín v E_s. Zobrazenie φ definované na A_φ z E_s do E_k nazveme D-zobrazením, ak $\varrho_1(\varphi(x), \varphi(y)) \leqq \varrho_2(x, y)$, pre ľubovoľné prvky $x, y \in A_\varphi$, kde ϱ_1, ϱ_2 sú metriky v E_k, resp. v E_s. Označme znakom $m_k(A) = \sup L_k(\varphi(A))$, kde suprémum počítame cez všetky D-zobrazenia φ s oborom $A_\varphi \in \mathbf{A}$, $A_\varphi \subset A$, $\varphi(A_\varphi) \subset E_k$. Ľahko dokážeme, že $m_k(B) \leqq \mu^*(B)$, pre ľubovoľnú množinu $B \in \mathbf{A}$. Z vety 3 vyplýva, že $m_k(A) > 0$. Ale

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(B) : A \subset B \in \mathbf{A}\} \geqq$$
$$\geqq \inf \{m_k(B) : A \subset B \in \mathbf{A}\} \geqq m_k(A) > 0.$$

* Tu značí $FrK(x_0, u)$ hranicu množiny $K(x_0, u)$, $\bigtimes$ kartézsky súčin, $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^s)$.

** Pozri napr. [3] veta 73 na str. 153.

*** Pozri [4], str. 351—352.

Poznámka. Dokázali sme, že veta (A) platí pre ľubovoľnú vonkajšiu mieru indukovanú k-rozmernou mierou v zmysle Kolmogorova. Nie je nám známe, či pre takúto mieru platí veta (B).* Poznamenajme ešte, že dôsledok 4 vyplýva aj z Federerových výsledkov v [1].

5. J. Mařík upozornil autora na nasledujúci príklad množiny $A \subset E_2$, pre ktorú $L_1(h_{\{1\}}(A)) = L_1(h_{\{2\}}(A)) = 0$, ale $\mu^*(A) > 0$ pre ľubovoľnú μ^* zo 4.

Nech B je Cantorovo diskontinuum, $A = B \times B$. Zrejme $L_1(h_{\{1\}}(A)) = = L_1(h_{\{2\}}(A)) = L_1(B) = 0$. Priemet množiny A do priamky $C = \{(x, x)\}_{x \in \langle 0,1 \rangle}$ vytvorí celý interval. Preto $\mu^*(A) = \mu(A) \geqq L_1(C) > 0$.

LITERATÚRA

[1] Federer H., *Dimension and measure.* Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 536—547.

[2] Hurewicz W., Wallman H., *Dimension theory* (po rusky: Теория размерности), Moskva 1953.

[3] Jarník V., *Integrální počet II*, Praha 1955.

[4] Kolmogoroff A., *Beiträge zur Maßtheorie.* Math. Ann. 107 (1933), 351—366.

Došlo 12. 12. 1960.

Katedra matematiky
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О РАЗМЕРНОСТИ И МЕРЕ

Белослав Риечан

Резюме

Пусть $k \leqq n$ — натуральные числа, E_n — евклидово пространство размерности n и L_k — k-мерная мера Лебега. Обозначим через C_k^n систему всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящих из k элементов.

* Vety (A), (B) sú citované v ods. 1.

Для всякого $\mu \in C_k^n$, $\mu = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, $j_1 < \ldots < j_k$ и всякого $x \in E_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положим

$$h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}).$$

Доказывается следующая теорема:

Если $k \leqq n$ и Y — такое подмножество E_n, что $\dim Y = k$, то найдется $\mu \in C_k^n$ такое, что

$$L_k(h_\mu(Y)) > 0.$$

ON THE DIMENSION AND MEASURE

Beloslav Riečan

Summary

Suppose $k \leqq n$ are positive integers. Denote by E_n the n-dimensional Euclidean space, by L_k the k-dimensional outer Lebesgue measure and by C_k^n the family of all sets of k integers between 1 and n.

For any $\mu \in C_k^n$, $\mu = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $j_1 < \ldots < j_k$ and any $x \in E_n$, $x = (x_1, \ldots x_n)$ put

$$h_\mu(x_1, \ldots, x_n) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}).$$

In this paper is proved the following theorem:

Suppose k, n are integers, $1 \leqq k \leqq n$, $Y \subset E_n$. If $\dim Y = k$, then there exists $\mu \in C_k^n$ such that $L_k(h_\mu(Y)) > 0$.