MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

ОБ РАЗЛОЖЕНИИ СЕТЕЙ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК (Václav Medek), Братислава

При отображении проективных преобразований вещественной проективной прямой на точки трехмерного вещественного проективного пространства [1] отображаются инволюционные преобразования на точки плоскости ε, уравнение которой имеет вид $x_0 + x_3 = 0$. Эта плоскость является полярной плоскостью точки E — образа тождественного преобразования — относительно квадрики Q, которая является множеством образов вырожденных проективных преобразований. Плоскость ε пересекает квадрику Q в коническом сечении e.

Пучком проективных преобразований называется линейная однопараметрическая система проективных преобразований и отображается на прямую. Сетью проективных преобразований называется линейная двухпараметрическая система проективных преобразований и отображается на плоскость.

В статье [2] изложены возможности разложения пучков проективных преобразований на два пучки инволюций. В настоящей статье мы будем заниматься разложением сетей проективных преобразований на две линейные системы инболюций.

1. Рассмотрим прежде всего два произвольные пучки инволюций. Пусть один из этих пучков определен инволюциями $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и второй инволюциями $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$. Произвольную инволюцию первого пучка можно выразить в виде $\lambda_0\mathbf{A} + \lambda_1\mathbf{B}$ и произвольную инволюцию второго пучка в виде $\mu_0\mathbf{C} + \mu_1\mathbf{A}$.

Предположим теперь, что инволюция $\mathbf{A}$ невырожденная и что инволюции $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ отображаются на точки $A(a_0, a_1, a_2, -a_0)$, $B(b_0, b_1, b_2, -b_0)$, $C(c_0, c_1, c_2, -c_0)$; то произведение $\mathbf{X}$ инволюции $\mathbf{L} = \lambda_0\mathbf{A} + \lambda_1\mathbf{B}$ и инволюции $\mathbf{M} = \mu_0\mathbf{C} + \mu_1\mathbf{A}$ (в порядке $\mathbf{X} = \mathbf{LM}$) имеет координаты:

$$x_0 = (a_0c_0 + a_2c_1)\,\lambda_0\mu_0 + (a_0^2 + a_1a_2)\,\lambda_0\mu_1 + \\ + (b_0c_0 + b_2c_1)\,\lambda_1\mu_0 + (b_0a_0 + b_2a_1)\,\lambda_1\mu_1,$$

$$x_1 = (a_1c_0 - a_0c_1)\,\lambda_0\mu_0 + (b_1c_0 - b_0c_1)\,\lambda_1\mu_0 + (b_1a_0 - b_0a_1)\,\lambda_1\mu_1,$$

$$x_2 = (a_0c_2 - a_2c_0)\,\lambda_0\mu_0 + (b_0c_2 - b_2c_0)\,\lambda_1\mu_0 + (b_0a_2 - b_2a_0)\,\lambda_1\mu_1, \tag{1}$$
$$x_3 = (a_0c_0 + a_1c_2)\,\lambda_0\mu_0 + (a_0^2 + a_1a_2)\,\lambda_0\mu_1 + (b_0c_0 + b_1c_2)\,\lambda_1\mu_0 + (a_0b_0 + b_1a_2)\,\lambda_1\mu_1.$$

Чтобы все точки X принадлежали одной плоскости, следует, что тоже точки AC, BC, BA, $AA = E$ принадлежат одной плоскости. Этот случай происходит тогда, если определитель из коэффициентов правой стороны уравнений (1) равен нулю. Прямым вычислением мы убедимся в том, что для величины этого определителя выходит

$$\varDelta = -(a_0^2 + a_1a_2)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2. \tag{2}$$

Так как мы предполагаем, что инволюция **A** невырожденная, выражение (2) равно нулю только тогда, когда точки A, B, C принадлежат одной прямой. Тогда (см. [2]) все точки X принадлежат прямой, являющейся сопряженной полярей к прямой $[ABC]$ относительно квадрики Q. Следовательно, если инволюция **A**, общая для обоих пучков, невырожденная, невозможно создать сеть проективных преобразований как их произведение.

Предположим теперь, что инволюция **A** вырожденная: $a_0^2 + a_1a_2 = 0$; то из уравнений (1) сразу вытекает, что образы произведений инволюций одного пучка с инволюциями второго пучка принадлежат прямой или плоскости согласно с тем принадлежат ли или непринадлежат ли точки AC, BC, BA одной прямой.

Из [2] вытекает, что образы произведений инволюции **A** со всеми остальными инволюциями создают образующую a квадрики Q, проходящую точкой A. Произведения инволюции **A** с инволюциями пучка, содержащего инволюцию **A**, отображаются на одну точку прямой a. Действительно, пусть **I** произвольная инволюция отлична от **A**. Образы произведений инволюции **A** с инволюциями пучка определенного инволюциями **I**, **A**, имеют координаты $(a_0i_0 + a_1i_2,\ a_0i_1 - a_1i_0,\ a_2i_0 - a_0i_1,\ a_2i_1 + a_0i_0)$ независимые от выбора инволюции в пучке. Точку AI мы можем построить следующим образом: если прямая $[AI]$ является касательной конического сечения e, то точка AI совпадает с точкой A. Если прямая $[AI]$ не является касательной конического сечения e, то пересекает его в еще одной точке B; образом произведения **AB** является потом точка пересечения образующих a и b квадрики Q. Из этого построения непосредственно следует, что к двум разным пучкам содержащим одновременно инволюцию **A** присоединены две разные точки прямой a.

Предположим, что точки A, B, C не принадлежат одной прямой, ни одна прямая $[AB]$, $[AC]$ не является касательной конического сечения e, и точки B, C являются точками пересечения этих прямых с коническим сечением e. Тогда мы можем построить все три точки AC, BC, BA. Пусть прямые a, a'; b, b'; c, c'

являются образующими квадрики Q проходящими точками A, B, C и притом штрихованные принадлежат одной и нештрихованные второй системе образующих. Потом $AC = [ac']$, $BC = [bc']$, $BA = [ba']$ и, следовательно, эти три точки линейно независимые и принадлежат плоскости определенной прямыми b, c'. Эта плоскость является касательной плоскостью квадрики Q в точке BC. Если мы выберем произведение пучков в обратном порядке, то мы получим касательную плоскость квадрики в точке CB. Обе этих касательных плоскостей проходят прямой $[BC]$.

Положение обеих этих плоскостей вовсе независит от выбора точки A конического сечения e. Ту же сеть проективных преобразований мы можем, следовательно, получить как произведение инволюций двух пучков; притом точки B и C останут постоянные и точку A выберем произвольным образом на коническом сечении e. Этим образом мы можем получить все сети проективных преобразований отображающихся на касательные плоскости квадрики Q с точками касания не принадлежащими коническому сечению e.

Особенно надо еще выяснить тот случай, когда напр. прямая $[AB]$ является касательной конического сечения e в точке B. Построим еще касательную конического сечения e в точке C и пусть точкой пересечения является точка I. Потом один пучок определен точками I, B и второй точками B, C. То $BC = [bc']$, $IC = C$, $IB = B$ и эти три точки (BC, C, B) линейно независимы и принадлежат плоскости определенной прямыми b, c'; тоже в этом случае мы приходим к тойже касательной плоскости квадрики Q.

Всего мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Произведением двух пучков инволюций является сеть проективных преобразований тогда и только тогда, когда эти пучки разные и их общая инволюция вырожденная; образом этой сети проективных преобразований является касательная плоскость квадрики Q. Наоборот всякую сеть проективных преобразований, образом которой является касательная плоскость квадрики Q с точкой касания не принадлежащей коническому сечению, можно получить бесконечным множеством способов как произведения двух пучков инволюций.*

Как это вытекает из формы уравнений (1), когда два пучки инволюций не совпадают ни не имеют общую вырожденную инволюцию, образы произведений всякой инволюции одного пучка со всякой инволюцией второго пучка образуют квадрику. Эта квадрика линейчатая; одну систему прямой этой квадрики создавают образы произведений всех инволюций всегда одной инволюции первого пучка со всеми инволюциями второго пучка и прямые второй системы создавают образы произведений всех инволюций первого пучка всегда с одной инволюцией второго пучка. Все эти квадрики проходят точкой E и если они имеют с квадрикой Q какую-нибудь точку общую, то они имеют с ней общую всю прямую. Для множества точек общих такой квадрики и квадрики Q возможны, следовательно, эти случаи: 1. пустое множество,

2. одна прямая, 3. две прямые (той же или разных систем), 4. три прямые (две прямые одной и одна второй системы), 5. четыре прямых (две одной и две второй системы). Если два пучки инволюций отображаются до пары сопряженных поляр конического сечения e, то произведение этих двух пучков приводит нас к квадрике содержащей обе этих сопряженных поляр и потом плоскость ε является ей касательной плоскостью.

2. Пусть

$$\varrho x_i' = a_{ij} x_j \qquad (i, j = 0, 1, 2) \tag{3}$$

уравнения коллинеации в плоскости ε и мы будем искать к плоскости с уравнением

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0 \tag{4}$$

такую коллинеацию (3) чтобы образы произведений соответствующих точек принадлежали плоскости (4).

Определение. *Мы будем говорить, что сеть проективных преобразований можно разложить на две сети инволюций, если существует такова невырожденная коллинеация* (3), *что образы произведений соответствующих инволюций (посредством коллинеации* (3)*) заполнят всю плоскость* (4).

Координаты образу произведения двух соответствующих точек в коллинеации (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
X_0 &= a_{00} x_0^2 + a_{01} x_0 x_1 + (a_{02} + a_{10})\, x_0 x_2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{12} x_2^2,\\
X_1 &= -a_{10} x_0^2 + (a_{00} - a_{11})\, x_0 x_1 - a_{12} x_0 x_2 + a_{01} x_1^2 + a_{02} x_1 x_2,\\
X_2 &= a_{20} x_0^2 + a_{21} x_0 x_1 + (a_{22} - a_{00})\, x_0 x_2 - a_{01} x_1 x_2 - a_{02} x_2^2,\\
X_3 &= a_{00} x_0^2 + (a_{01} + a_{20})\, x_0 x_1 + a_{02} x_0 x_2 + a_{21} x_1^2 + a_{22} x_1 x_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Достаточные условия, чтобы эти точки принадлежали плоскости (4), имеют вид

$$\begin{aligned}
(A_0 + A_3)\, a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} &= 0,\\
A_1 a_{00} + (A_0 + A_3)\, a_{01} - A_1 a_{11} + A_3 a_{20} + A_2 a_{21} &= 0,\\
-A_2 a_{00} + (A_0 + A_3)\, a_{02} + A_0 a_{10} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} &= 0,\\
A_1 a_{01} + A_3 a_{21} &= 0,\\
-A_2 a_{01} + A_1 a_{02} + A_0 a_{11} + A_3 a_{22} &= 0,\\
-A_2 a_{02} + A_0 a_{12} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) представляют систему шести однородных уравнений для девяти однородных неизвестных a_{ij}. Матрица из коэффициентов этих уравнений имеет вид

$$\left\| \begin{matrix}
A_0 + A_3 & 0 & 0 & -A_1 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0\\
A_1 & A_0 + A_3 & 0 & 0 & -A_1 & 0 & A_3 & A_2 & 0\\
-A_2 & 0 & A_0 + A_3 & A_0 & 0 & -A_1 & 0 & 0 & A_2\\
0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0\\
0 & -A_2 & A_1 & 0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & A_3\\
0 & 0 & -A_2 & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix} \right\| \tag{7}$$

Определитель из 1, 2, 5, 6, 7 и 9 столбцов этой матрицы имеет величину

$$A_0 A_1 A_2 (A_0 + A_3)(A_0 A_3 - A_1 A_2). \tag{8}$$

Формула (8) имеет значение равное нулю для касательных плоскостей квадрики Q, для плоскостей проходящих точкой E и для плоскостей проходящих некоторой из точек (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0).

а) Предположим, что выражение (8) не имеет значение равное нулю; то система (6) имеет бесконечное множество решений этого вида:

$$\begin{aligned}
&a_{00} = -\alpha A_1 A_2 - \gamma A_2, \quad a_{01} = -\gamma A_3, \quad a_{02} = \alpha A_0 A_2,\\
&a_{10} = \beta A_2, \quad a_{11} = -\alpha[A_1 A_2 - A_3(A_0 + A_3)] + \beta A_1, \quad a_{12} = \alpha A_2^2,\\
&a_{20} = \alpha A_1 (A_0 + A_3) + \beta A_1 + \gamma (A_0 + A_3),\\
&a_{21} = \gamma A_1, \quad A_{22} = -\alpha A_0 (A_0 + A_3) - \beta A_0 - \gamma A_2,
\end{aligned}$$

где α, β, γ произвольные вещественные числа.

Определитель из коэффициентов коллинеации (3) имеет потом величину

$$\Delta = \beta\gamma A_2 (A_1 - A_3)(\alpha A_1 A_2 + \beta A_0 + \gamma A_2). \tag{9}$$

Из условия невырожденности коллинеации (3) ($\Delta \neq 0$) следует: если сеть проективных преобразований отображается на плоскость, и коэффициенты ей уравнения удовлетворяют условиям $A_0 A_1 A_2 (A_0 + A_3)(A_0 A_3 - A_1 A_2) \neq 0$ и $A_1 = A_3$, то эту сеть мы не можем разложить на две сети инволюций.

Все проективные преобразования этой сети мы можем тогда получить как произведения двух соответствующих инволюций. Пусть напр. $\boldsymbol{X}$ произвольное проективное преобразование принадлежащие этой сети. Так как плоскость, которая является образом этой сети, не содержит точку E, следует, что прямая $x = [EX]$ всегда существует и имеет с этой плоскостью общую точно точку X. Пусть $x' \in \varepsilon$ сопряженная поляра к прямой x относительно квадрики Q. На прямой x' существует бесконечное множество пар точек таких, что произведением соответствующих инволюций является точно проективное преобразование $\boldsymbol{X}$ (см. [2]). Пусть прямой x' соответствует в коллинеации (3) прямая x''. Прямые x' и x'' должны иметь по крайней мере одну общую точку; эту точку обозначим Y'. Если точка Y' соответствует в коллинеации (3) точке Y, то произведение $\boldsymbol{YY'}$ является точно проективным преобразованием $\boldsymbol{X}$. Утверждение следует из того, что точки Y, Y' принадлежат прямой x'; то и образ произведения инволюций $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y'}$ должен принадлежать прямой x и согласно предположению должен принадлежать и плоскости (4) и это точно точка X.

Мы показали, что если сеть проективных преобразований отображается на плоскость и если для этой плоскости имеет выражение (8) значение равное нулю и $A_1 \neq A_3$, то эту сеть можно разложить на две сети инволюций.

б) Пусть $A_0 = 0$; то определитель из 3, 4, 5, 6, 8 и 9 столбцов матрицы (7) имеет величину $-A_1^3A_2A_3^2$. Точно также как в предыдущем случае, если мы предположим $A_1A_2A_3 \neq 0$, то существует бесконечное множество решений системы (6), которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_{00} = \alpha A_1, && a_{01} = \beta A_1A_3, \quad a_{02} = 0,\\
&a_{10} = \alpha A_3 + \beta A_2, && a_{11} = \alpha A_1 + \beta(A_3^2 - A_1A_2) + \gamma A_3,\\
& && a_{12} = -(\alpha A_2 - \beta A_2^2),\\
&a_{20} = \gamma A_1, \quad a_{21} = -\beta A_1^2, && a_{22} = \beta A_1A_2.
\end{aligned}$$

Уравнения коллинеации (3) имеют потом вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= \alpha A_1x_0 + \beta A_1A_3x_1,\\
\varrho x_1' &= (\alpha A_3 + \beta A_2)\,x_0 + [\alpha A_1 + \beta(A_3^2 - A_1A_2) + \gamma A_3]\,x_1 - (\alpha A_2 - \beta A_2^2)\,x_2,\\
\varrho x_2' &= \gamma A_1x_0 - \beta A_1^2x_1 + \beta A_1A_2x_2.
\end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов этой коллинеации имеет величину

$$-\beta^2(\beta-\gamma)\,A_1^2A_2^2A_3.$$

Так как и в этом случае мы исключили плоскости проходящие точкой E ($A_0 = 0$, $A_3 \neq 0$), остаток доказательства об существовании разложения таких сетей на две сети инволюций получится темже образом как и в случаи а).

Следовательно, если $A_0 = 0$, существует всегда разложение соответствующей сети на две сети инволюций за исключением случаев когда $A_1A_2A_3 = 0$.

в) Пусть $A_1 = 0$; то определитель из 1, 2, 3, 5, 6 и 8, столбцов матрицы (7) имеет величину $A_0^2A_3(A_0 + A_3)^3$. Если предположим, что эта величина разна от нуля, существует бесконечное множество решений системы (6) вида

$$\begin{aligned}
&a_{00} = \beta A_0A_2(A_0 + A_3), \quad a_{01} = \beta A_0A_3(A_0 + A_3),\\
&a_{02} = A_0(-\alpha + \beta A_2^2 + \gamma A_2),\\
&a_{10} = \alpha(A_0 + A_3), \quad a_{11} = A_3(A_0 + A_3)(\beta A_2 + \gamma),\\
&a_{12} = A_2(-\alpha + \beta A_2^2 + \gamma A_2),\\
&a_{20} = -\beta A_0(A_0 + A_3), \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = -\gamma A_0(A_0 + A_3).
\end{aligned}$$

Итак уравнения коллинеации (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= A_0[\beta A_2(A_0 + A_3)\,x_0 + \beta A_3(A_0 + A_3)\,x_1 + (-\alpha + \beta A_2^2 + \gamma A_2)\,x_2],\\
\varrho x_1' &= \alpha(A_0 + A_3)\,x_0 + A_3(A_0 + A_3)(\beta A_2 + \gamma)\,x_1 + A_2(-\alpha + \beta A_2^2 + \gamma A_2)\,x_2,\\
\varrho x_2' &= -A_0(A_0 + A_3)(\beta x_0 + \gamma x_2).
\end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов этой коллинеации равен нулю и так ни в этом случае не существует разложение сети на две сети инволюций.

г) Пусть $A_2 = 0$; то определитель из 1., 2., 3., 5., 6. и 8. столбцов матрицы (7) имеет величину $A_0^2A_3(A_0 + A_3)^3$. Так как в предыдущем случае мы убедимся в том, что уравнения коллинеации (3) имеют в этом случаи вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= \alpha A_1x_0 - A_3(\beta + \gamma A_1)\,x_1 - \alpha A_0x_2,\\
\varrho x_1' &= \alpha(A_0 + A_3)\,x_0 + [\alpha A_1 - \gamma A_3(A_0 + A_3)]\,x_1,\\
\varrho x_2' &= \beta(A_0 + A_3)\,x_0 + A_1(\beta + \gamma A_1)\,x_1 + \gamma A_0(A_0 + A_3)\,x_2.
\end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов этой коллинеации равен нулю и так ни в этом случае не существует разложение сети проективных преобразований на две сети инволюций.

д) Пусть $A_0 + A_3 = 0$; то определитель из первых пяти строк и первых пяти столбцов матрицы (7) имеет величину $-A_1^4A_2$. Если предположим, что $A_1A_2 \neq 0$, то система уравнений (6) имеет четыре линейно независимые решения

$$\begin{aligned}
&a_{00} = -A_1, \quad a_{01} = 0, \quad a_{02} = A_0, \quad a_{10} = 0,\\
&a_{11} = -A_1, \quad a_{12} = A_2, \quad a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0,\\
&a_{00} = A_0, \quad a_{01} = a_{02} = 0, \quad a_{10} = A_2,\\
&a_{11} = a_{12} = 0, \quad a_{20} = A_1, \quad a_{21} = a_{22} = 0,\\
&a_{00} = 0, \quad a_{01} = A_0, \quad a_{02} = a_{10} = 0, \quad a_{11} = A_2,\\
&a_{12} = a_{20} = 0, \quad a_{21} = A_1, \quad a_{22} = 0,\\
&a_{00} = 1, \quad a_{01} = a_{02} = a_{10} = 0, \quad a_{11} = 1,\\
&a_{12} = a_{20} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1.
\end{aligned}$$

Все эти решения удовлетворяют также шестому уравнению системы (6) и так ранг матрицы (7) равен наидалее пяти.

Следует, что уравнения коллинеации (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= (-\alpha A_1 + \beta A_0 + \delta)\,x_0 + \gamma A_0x_1 + \alpha A_0x_2,\\
\varrho x_1' &= \beta A_2x_0 + (-\alpha A_1 + \gamma A_2 + \delta)\,x_1 + \alpha A_2x_2,\\
\varrho x_2' &= \beta A_1x_0 + \gamma A_1x_1 + \delta x_2.
\end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов этой коллинеации имеет величину $(\alpha A_1 - \delta)^2\,(\beta A_0 + \gamma A_2 + \delta)$. Коллинеация (3) является гомологией, ей центр

$(A_0, A_2, A_1, -A_0)$ является полюсом плоскости, на которую отображается сеть проективных преобразований и ей осью является прямая $\beta x_0 + \gamma x_1 + \alpha x_2 = 0$.

В этом случае не возможно разложить сеть на две сети инволюций. То есть согласно [2] мы можем получить прямые проходящие точкой E только как произведения инволюций на прямых проходящих точкой $(A_0, A_2, A_1, -A_0)$. На этих прямых индуцирует нами получена гомология проективное преобразование. Следовательно, мы могли бы разложить все пучки сети, содержащие тождественное преобразование, на два пучки инволюций. Это возможно только тогда, когда этот пучок содержит точно два вырожденные проективные преобразования. Конечно точка E внешняя точка квадрики Q и значит всякая плоскость содержащая точку E, содержит всегда и прямые проходящие этой точкой и такие, что они не имеют с квадрикой Q никакую точку общую [с исключением касательных плоскостей, см. *а*)].

з) Пусть $A_0A_3 - A_1A_2 = 0$; то мы можем предположить, что $A_0A_1 \neq 0$ и, следовательно $A_2 = kA_0$, $A_3 = kA_1$; мы можем предположить, что число k разное от нуля, так как в обратном случае должно было бы $A_2 = 0$ и этот случай мы уже расследовали.

Так как в предыдущем случае матрица (7) имеет ранг самое больше равен пяти, определитель из первых пяти строк и последных пяти столбцов имеет величину $k^3A_0A_1^4$. Следует, система уравнений (6) имеет четыре линейно независимых решений

$$\begin{aligned}
&a_{00} = kA_0, \quad a_{01} = a_{02} = a_{10} = 0, \quad a_{11} = -k^2A_1,\\
&a_{12} = 0, \quad a_{20} = -(A_0 + kA_1), \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = kA_0,\\
&a_{00} = 0, \quad a_{01} = k, \quad a_{02} = a_{10} = 0, \quad a_{11} = k^2,\\
&a_{12} = a_{20} = 0, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 0,\\
&a_{00} = a_{01} = 0, \quad a_{02} = k, \quad a_{10} = a_{11} = 0,\\
&a_{12} = k^2, \quad a_{20} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = -1,\\
&a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0, \quad a_{10} = kA_0, \quad a_{11} = kA_1,\\
&a_{12} = 0, \quad a_{20} = A_1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = -A_0.
\end{aligned}$$

Все этих решений удовлетворяют также четвертому уравнению системы (6).

Уравнения коллинеации (3) имеют потом вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= \alpha kA_0x_0 + \beta kx_1 + \gamma kx_2,\\
\varrho x_1' &= \delta kA_0x_0 + k(-\alpha kA_1 + \beta k + \delta A_1)\,x_1 + \gamma k^2x_2,\\
\varrho x_2' &= (-\alpha A_0 - \alpha kA_1 + \delta A_1)\,x_0 - \beta x_1 + (\alpha kA_0 - \gamma - \delta A_0)\,x_2.
\end{aligned}$$

Определитель из коэффициентов этой коллинеации имеет величину $-k^2A_1(\alpha k - \delta)^2\,(\alpha A_0^2 + \gamma A_1)$. Параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ мы можем всегда выбирать таким образом, чтобы этот определитель имел величину отличну от нуля и,

значит, чтобы коллинеация (3) была невырожденная. Если $A_0 + A_3 \neq 0$, мы можем показать так как в случае а), что произведения соответствующих инволюций в коллинеации (3) заполнят всю данную сеть. Если $A_0 + A_3 = 0$, мы получим касательные плоскости квадрики Q проходящие точкой E. Эти плоскости мы получим для $k = -A_0/A_1$. Итак уравнения коллинеации (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\varrho x_0' &= A_0A_1(\alpha A_0x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2),\\
\varrho x_1' &= \delta A_0^2A_1x_0 + (\alpha A_0^2A_1 - \beta A_0^2 + \delta A_0A_1^2)\,x_1 - \gamma A_0^2x_2,\\
\varrho x_2' &= -\delta A_1^3x_0 + \beta A_1^2x_1 + (\alpha A_0^2A_1 + \gamma A_1^2 + \delta A_0A_1^2)\,x_2.
\end{aligned}$$

Эта коллинеация является гомологией с центром в точке $(A_0A_1, -A_0^2, A_1^2, -A_0A_1)$; эта точка является одновременно точкой касания рассуждаемой касательной плоскости. Также как и в случаи д) мы убедимся в том, что посредством коллинеации (3) мы не можем получить все точки на прямой соединяющей точку E с точкой касания касательной плоскости и, следовательно, разложение сети в этом случае не существует.

Всего справедлива

Теорема 2. *Сеть проективных преобразований можно разложить на две сети инволюций, если она не содержит тождественное преобразование или некоторое из этих вырожденных преобразований:*

$$\text{а) } y_0' = y_1, \quad y_1' = 0, \qquad \text{б) } y_0' = 0, \quad y_1' = y_0, \qquad \text{в) } y_0' = y_1, \quad y_1' = y_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Medek V., *Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 6 (1956), 98—108.

[2] Medek V., *Об разложении пучков проективных преобразований*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 11 (1961), 99—112.

Поступило в редакцию 9. 12. 1960 г.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

DIE ZERLEGUNG DER BÜNDELN VON PROJEKTIVEN VERWANDSCHAFTEN

Václav Medek

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hängt eng mit der Arbeit [2] zusammen. Man untersucht die Bündel von projektiven Verwandschaften auf einer Gerade und ihre Zerlegungen auf zwei lineare Systeme von Involutionen. Man benützt dazu eine Abbildung der projektiven Verwandschaften auf Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes.

Die Hauptresultate sind folgende: Jedes Bündel von projektiven Verwandschaften, welches sich auf eine Tangentenebene der Fläche Q (ihr Berührungspunkt liegt nicht in der Ebene ε) abbildet, kann man auf zwei Büschel von Involutionen zerlegen. Jedes Bündel von projektiven Verwandschaften kann man auf zwei Bündel von Involutionen zerlegen mit Ausnahme der Bündel, welche die Identität, oder eine dieser singulären Verwandschaften: a) $y_0' = y_1$, $y_1' = 0$, b) $y_0' = 0$, $y_1' = y_0$, c) $y_0' = y_1$, $y_1' = -y_1$ enthält.