# K HYDRODYNAMICKÉMU MODELU PRE NEUTRÍNO

MIKULÁŠ BLAŽEK, Bratislava

V práci sa skúma, ako sa chová účinok neutrínového poľa v hydrodynamickom modeli voči grupe konformných transformácií. Dokazuje sa, že účinok je invariantný voči dilatáciám, pričom je zároveň uvedená veličina, ktorá sa na základe tohto v čase zachováva, avšak nie je invariantný voči grupe inverzií, nazývanej tiež grupa zrýchlení, čo má za následok, že nemožno nájsť veličiny, ktoré by sa zachovávali pri prechode k rovnomerne zrýchlenej súradnej sústave. Veličiny takéhoto druhu možno však nájsť pre neutríno v Diracovej teórii s nulovou hmotou.

## Úvod

Rôzne vlastnosti elementárnych častíc je niekedy výhodné študovať z hydrodynamického hľadiska. V tomto prípade možno rozdeliť uvažované pole na malé, elementárne „objemy“, z ktorých každý má niektoré vlastnosti skúmanej elementárnej častice. Tieto vlastnosti sú udané pomocou nových, hydrodynamických premenných, pomocou ktorých možno vyšetrovať i rôzne ďalšie súvislosti (napríklad v niektorých prípadoch spiny).

Hydrodynamický model bol predložený aj pre neutríno. Z toho hľadiska možno považovať každý elementárny objem neutrínového poľa (ako kontinua) za malý disk, ktorý sa pohybuje rýchlosťou svetla v smere normály k rovine disku. Tento disk sa súčasne otáča s určitou uhlovou rýchlosťou, ktorú možno určiť pomocou hydrodynamických premenných. Pritom netreba pripisovať elementárnym objemom žiadne špeciálne fyzikálne vlastnosti.

Ukazuje sa, že základné (vákuové) rovnice pre fotón (Maxwellove rovnice) a pre neutríno (Diracova rovnica s nulovou hmotou) majú naviac určité spoločné vlastnosti, ktoré sa neuplatnia v prípade nenulovej pokojovej hmoty. Napríklad základné rovnice, resp. vzťahy pre neutríno pripúšťajú transformáciu $\psi \rightarrow \gamma_5 . \psi$ (hmota neutrína je nulová). Ukazuje sa, že podobnú invarianciu vykazuje aj Maxwellovo elektromagnetické pole [1]. (Pravdepodobne bude možné ukázať, že podobnú vlastnosť má i komplexné skalárne, resp. pseudoskalárne pole pre časticu s nulovou



hmotou. Nateraz takáto častica nie je známa. Pripomeňme, že v práci [2] sa vyšetruje analógia medzi neutrínovým a Duffin–Kemmer–Petiauovým poľom pre nulovú hmotu; ak máme skúmať teóriu invariantnú voči nábojovej konjugácii, musí mať častica nulovú hmotu i náboj. Toto neodporuje uvedenej domnienke, i keď ide o komplexné pole, pretože uvedená poznámka sa nevzťahuje na časticu s nulovým spinom.) Ďalšou spoločnou vlastnosťou napríklad je, že účinok elektromagnetického [3] i neutrínového [4] poľa je invariantný voči konformnej grupe transformácií, z čoho možno odvodiť príslušné zákony o zachovaní. Pripomeňme, že nemožno považovať za ďalšiu spoločnú vlastnosť to, že základné rovnice pre častice s nulovou hmotou sú konformne invariantné, keďže v [5] bolo ukázané, ako možno dosiahnuť konformnú invarianciu základných rovníc i pre častice s nenulovou pokojovou hmotou. Za ďalšiu spoločnú vlastnosť možno považovať to, že podobný rozklad, aký možno urobiť so 4zložkovým spinorom pre neutríno (na dvojzložkový), možno urobiť i s 10zložkovým Duffin–Kemmer–Petiauovým vektorom pre fotón [2]. (Pritom dvojzložkový spinor možno použiť i pre časticu s nenulovou hmotou, ak má spin $\frac{1}{2}$ [9].)

S hydrodynamickým popisom Diracovho poľa, resp. s použitím hydrodynamických premenných i pre neutrínové pole sa zaoberal rad prác (napríklad [6], kde možno nájsť i ďalšiu literatúru). V práci [7] bolo poukázané na to, že hydrodynamický model neutrínového poľa, používajúci 10 premenných, dovoľuje odvodiť vyjadrenie pre novú veličinu, ktorá sa v čase zachováva.

V predloženej práci si všimneme druhú z uvedených vlastností: zistíme, ako sa chová účinok neutrínového poľa v hydrodynamickom modeli voči konformným transformáciám (resp. voči dilatáciám a inverziám z grupy konformných transformácií). Ukážeme, že prechodom k hydrodynamickému popisu sa narušuje spomínaná podobnosť medzi neutrínom a fotónom. Invariancia účinku voči dilatáciám sa zachováva (príslušný zákon o zachovaní je zrejme odlišný od toho, ktorý bol naviac získaný v [7]), avšak nevystupuje už invariancia účinku voči štvorčlennej grupe inverzií (niekedy nazývanej grupa zrýchlení [2]). Tým sa narušujú zákony o zachovaní, ktoré majú byť splnené v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu. (Rôzni autori sa prikláňajú k tomu, že inverzie sprostredkujú prechod k rovnomerne zrýchlenej súradnej sústave. Spomeňme aspoň prácu E. L. Hilla [8], kde sa definuje rovnomerne zrýchlený pohyb, nájde sa preň charakteristická diferenciálna rovnica a ukáže sa, že túto rovnicu necháva invariantnou práve grupa bodových konformných transformácií. Ďalšiu literatúru k tejto téme možno nájsť napr. v [5].) Treba potom presnejšie povedať, čo sa rozumie pod ekvivalenciou hydrodynamickej a „obyčajnej“ teórie, ktorá sa spomína v rôznych prácach.

## Lagrangián

Základné hydrodynamické rovnice pre neutríno možno odvodiť z lagrangiánu [7]

$$L = -\frac{1}{2} \hbar c \, . \, S_0 \left( i b_k^1 \partial_4 b_k^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} b_k^s \partial_n b_m^s \right). \tag{1}$$

(Latinské indexy nadobúdajú hodnoty 1, 2, 3 a grécke 1, 2, 3, 4. Ďalej je $\partial_l \equiv \equiv \frac{\partial}{\partial x_l}$, $\partial_4 \equiv \frac{\partial}{\partial x_4}$, $x_4 = ict$, $i = \sqrt{-1}$, $\varepsilon_{knm}$ obvykle je používaný alternujúci antisymetrický tenzor 3. rádu s prvkami $-1, 0, 1$. Podľa opakujúcich sa indexov treba sčítať cez príslušné hodnoty.) Pritom $S_0$ a $b_k^s$ ($c$-čísla) sú nové hydrodynamické premenné (je ich 10), ktoré nahradzujú pôvodný spinor $\varphi$. $S_0$ má charakter skalárnej veličiny ($S_0 = \varphi^+ . \varphi$) a $b_k^s$ (pre $s = 1, 2, 3$) sú tri jednotkové ortogonálne vektory.

## Dilatácie

Infinitezimálne dilatácie sú reprezentované transformáciou $x_\mu \to x'_\mu = (1 + \delta l)\, x_\mu$, kda $\delta l$ je nekonečne malý dilatačný parameter. V tomto prípade je $\partial'_\mu = (1 - \delta l) . \partial_\mu$, objemový element $dx_1 . dx_2 . dx_3 . dx_4 \equiv d\tau . dx_4 = d(x)$ sa transformuje $d(x) \to d(x') = (1 + 4\delta l)\, d(x)$ a lagrangián $L \to L' = (1 - 4\delta l) L$ (aby bol účinok invariantný).

Premenné $S_0$ a $b_k^s$ transformujeme nasledovne

$$S_0 \to S'_0 = (1 + s . \delta l)\, S_0,$$
$$b_k^s \to b_k^{s\prime} = (1 + B . \delta l)\, b_k^s,$$

kde $s$ a $B$ sú konštanty, ktoré treba určiť.

Použijeme podmienku invariancie účinku $L(x')\, d(x') = L(x)\, d(x)$ (až na divergenciu) a po krátkom výpočte dostaneme

$$(2B + s - 1)\, L = -4L,$$

z čoho máme

$$2B + s = -3. \tag{2}$$

Podľa zákona o zachovaní: $\partial_\mu V_\mu = 0$, kde

$$V_\mu = \left( -\partial_\nu b_k^s \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu b_k^s} - \partial_\nu S_0 \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu S_0} + L\delta_{\mu\nu} \right) \delta x_\nu + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu b_k^s} \delta b_k^s + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu S_0} \delta S_0 \tag{3}$$

sa zachováva veličina $\int V_4\, d\tau$. Pomocou vzťahov $\delta b_k^s = B . b_k^s \delta l$ a $\delta x_\nu = x_\nu . \delta l$ môžeme zistiť $V_4$:

$$V_4 = -\frac{1}{2} \hbar c S_0 \left[ i b_k^1 (x_n \partial_n b_k^2 - B b_k^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} x_4 b_k^s \partial_n b_m^s \right]. \tag{4}$$

Keďže v lagrangiáne nevystupujú derivácie funkcie $S_0$, nezávisia zachovávajúce sa veličiny od spôsobu, akým sa transformuje funkcia $S_0$ (posledný člen v (3) sa neuplatní), čo vyjadruje aj vzťah (2), podľa ktorého možno určiť napr. parameter $B$ pomocou $s$. Podľa (2) môžeme teda dosadiť do (4)

$$B = -\frac{1}{2}(s + 3).$$

Ak sa pri dilatáciách funkcia $S_0$ netransformuje ($s = 0$), je $B = -\frac{3}{2}$ a $\delta b_k^s =$



$= -\frac{3}{2} b_k^s\, \delta l$. Teda v tomto prípade sa veličiny $b_k^s$ transformujú rovnako ako pôvodný spinor $\psi$.

## Inverzie

Ako sme už uviedli, nemožno dosiahnuť unvarianciu účinku voči inverziám. Dokonca ju nemožno dosiahnuť ani voči transformáciám, ktoré sa len „o málo“ líšia od inverzií. Aby sme to ukázali, budeme uvažovať namiesto infinitezimálnych inverzií $\delta x_\mu = (x_\varrho x_\varrho \delta_{\mu\lambda} - 2 x_\mu x_\lambda)\, \delta n_\lambda \equiv R_{\mu\lambda} \delta n_\lambda$ o niečo „širšiu“ transformáciu, a to $\delta x_\mu = (R_{\mu\lambda} + f_{\mu\lambda})\, \delta n_\lambda$, kde $\delta n_\lambda$ sú 4 parametre, nekonečne malé prvého rádu. Pri tejto transformácii je $\partial'_\mu = \partial_\mu + [2(x_\nu \delta_{\lambda\mu} + x_\lambda \delta_{\mu\nu} - x_\mu \delta_{\nu\lambda}) - (\partial_\mu f_{\nu\lambda})]\, \delta n_\lambda \partial_\nu$ a objemový element sa transformuje podľa vzťahu $d(x') = [1 - (8x_\lambda - \partial_\varrho f_{\varrho\lambda})\, \delta n_\lambda]\, d(x)$.

Pre ďalší postup predpokladáme, že základné hydrodynamické veličiny sa transformujú lineárne aj pri inverziách. Preto ďalšie transformácie predpokladáme v tvare

$$S'_0 = S_0 + S_0 s_\lambda \delta n_\lambda,$$
$$b_k^{s\prime} = b_k^s + b_k^s B_\lambda \delta n_\lambda.$$

Pritom $f_{\mu\lambda}$, $s_\lambda$ a $B_\lambda$ sú hľadané funkcie, závislé iba od súradníc.

Podmienka invariancie účinku vedie v tomto prípade k splneniu vzťahu

$$\begin{aligned} & i b_k^1 [(2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\, \partial_4 b_k^2 + 2(x_r \delta_{\lambda 4} - x_4 \delta_{\lambda r})\, \partial_r b_k^2 + b_k^2 \partial_4 B_\lambda - (\partial_4 f_{\varrho\lambda})\, \partial_\varrho b_k^2] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} b_k^s [(2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\, \partial_n b_m^s + 2(x_\varrho \delta_{\lambda n} - x_n \delta_{\lambda\varrho})\, \partial_\varrho b_m^s + b_m^s \partial_n B_\lambda - (\partial_n f_{\varrho\lambda})\, \partial_\varrho b_m^s] = \\ & = [8x_\lambda - (\partial_\varrho f_{\varrho\lambda})] \left( i b_k^1 \partial_4 b_k^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{knm} b_k^s \partial_n b_m^s \right), \end{aligned} \tag{6}$$

resp.

$$\begin{aligned} & (2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\, L - \frac{1}{2} \hbar c S_0 i b_k^1 [2(x_r \delta_{\lambda 4} - x_4 \delta_{\lambda r})\, \partial_r b_k^2 + b_k^2 \partial_4 B_\lambda - (\partial_4 f_{\varrho\lambda})\, \partial_\varrho b_k^2] - \\ & - \frac{1}{4} \hbar c S_0 \varepsilon_{knm} b_k^s [2(x_\varrho \delta_{\lambda n} - x_n \delta_{\lambda\varrho})\, \partial_\varrho b_m^s + b_m^s \partial_n B_\lambda - (\partial_n f_{\varrho\lambda})\, \partial_\varrho b_m^s] = \\ & = [8x_\lambda - (\partial_\varrho f_{\varrho\lambda})]\, L. \end{aligned} \tag{7}$$

Hľadané funkcie teraz nemožno určiť tak, že by sa požadovala rovnosť výrazov v zodpovedajúcich si hranatých zátvorkách v (7) (prvá na ľavej strane nech sa rovná prvej na pravej strane a ostatné dve nech sú rovné nule), pretože takto postavené podmienky by neboli splnené pre identickú transformáciu (ktorú možno dosiahnuť okrem toho, keď $\delta n_\lambda = 0$ aj pomocou hodnôt $f_{\mu\lambda} = -R_{\mu\lambda}$, $s_\lambda = B_\lambda = 0$; v prípade dilatácií nastala len prvá možnosť). Ak si chceme náš problém zjednodušiť, môžeme namiesto (6) žiadať splnenie týchto dvoch vzťahov

$$\begin{aligned} & (2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\, \partial_4 b_k^2 + 2(x_r \delta_{\lambda 4} - x_4 \delta_{\lambda r})\, \partial_r b_k^2 + b_k^2 \partial_4 B_\lambda - (\partial_4 f_{\varrho\lambda})\, \partial_\varrho b_k^2 = \\ & = [8x_\lambda - (\partial_\varrho f_{\varrho\lambda})]\, \partial_4 b_k^2 \end{aligned}$$

a $$(2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\,\partial_n b^s_m + 2(x_\varrho\delta_{\lambda n} - x_n\delta_{\lambda\varrho})\,\partial_\varrho b^s_m + b^s_m\partial_n B_\lambda - (\partial_n f_{\varrho\lambda})\,\partial_\varrho b^s_m = \\ = [8x_\lambda - (\partial_\varrho f_{\varrho\lambda})]\,\partial_n b^s_m,$$

čo možno zapísať v tvare jednej podmienky

$$(2x_\lambda + s_\lambda + 2B_\lambda)\,\partial_\nu b^s_m + 2(x_r\partial_{\lambda\nu} - x_\nu\delta_{\lambda r})\,\partial_r b^s_m + b^s_m\partial_\nu B_\lambda - \\ - (\partial_\nu f_{\varrho\lambda})\,\partial_\varrho b^s_m + 2\delta_{a\nu}(x_4\delta_{\lambda a} - x_a\delta_{\lambda 4})\,\partial_4 b^s_m = \\ = [8x_\lambda - (\partial_\varrho f_{\varrho\lambda})]\,\partial_\nu b^s_m, \tag{8}$$

ktorá má platiť v prípade, že $\nu = n$ pre $s = 1, 2, 3$ a ak $\nu = 4$ iba pre $s = 2$. Pre ďalší postup by sme mohli položiť $f_{\varrho\lambda} = 0$ a hľadať funkcie $s_\lambda$ a $B_\lambda$. Avšak podmienku (8) nemožno identicky splniť. Hlavným dôvodom je to, že sa v (8) vyskytujú členy typu $2B_\lambda\partial_\nu b^s_m$ a $b^s_m\partial_\nu B_\lambda$ iba na jednej strane. Ak totiž $B_\lambda$ závisí iba od súradníc, nemožno v ďalšom vylúčiť člen $b^s_m\partial_\nu B_\lambda$. Túto ťažkosť nemôžeme odstrániť ani tak, že pripustíme (proti predpokladu) i nelineárne transformácie, t. j. $B_\lambda = B_\lambda(b^s_m)$; v tomto prípade je to podobne s členom $2B_\lambda\partial_\nu b^s_m$. S podobnými ťažkosťami sa však stretáme už v pôvodnej podmienke (6), a tedy už ani vzťah (6) nemožno splniť identicky (funkcie $f_{\varrho\lambda}$ môžu závisieť vždy iba od súradníc). Ďalej, uvedené dva členy sa nedajú zhrnúť do jedného člena, ktorý by mal pre náš prípad tvar divergencie, a preto nemožno dosiahnuť invarianciu ani pridaním určitého divergenčného člena k lagrangiánu (1). Tento výsledok nemožno pozmeniť ani tak, že by sme hľadali prírastky funkcií $b^s_m$ v komplikovanejšom tvare, napríklad $\delta b^s_m = B^{st}_{mn\lambda} b^t_n \delta n_\lambda$, kde $B^{st}_{mn\lambda}$ by boli hľadané funkcie, pretože takto sa uvedené ťažkosti nedajú odstrániť.

Záverom možno povedať, že požiadavke invariancie účinku voči konformnej grupe transformácií nevyhovuje hydrodynamický model pre neutríno (predstavený pomocou lagrangiánu (1)), kým diracovské neutríno túto požiadavku splňuje.

## LITERATÚRA


[1] Takabayasi T., Comptes rendus Acad. Sci., Paris, 248 (1959), 70.
[2] Bludman S. A., Physical Review 107 (1957), 1163.
[3] Bessel—Hagen E., Math. Annalen 1921, 258.
[4] Blažek M., Acta F. R. N. Univ. Comen. III-9, Physica 1959, 451.
[5] Ogievetsky V. G., Polubarinov I. V., Žurnal eksperimentaľnoj i teoretičeskoj fiziki 37 (1959), 470.
[6] Takabayasi T., Vigier J. P., Progress of Theoretical Physics, Japan, 18 (1957), 573.
Takabayasi T., Il Nuovo Cimento (X), 7 (1958), 118.
Takabayasi T., Nuclear Physics 6 (1958), 477.
[7] Takabayasi T., Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, 246 (1958), 1010.
[8] Hill E. L., Physical Review 72 (1947), 143.
[9] Theis W. R., Fortschritte der Physik, 7 (1959), 559.


Došlo 7. 10. 1960.

*Katedra fyziky*
*Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského*
*v Bratislave*



## К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙТРИНО

Микулаш Блажек


### Резюме

Основные (вакуумные) уравнения или же соотношения для фотона и нейтрино обладают некоторыми общими и сходными свойствами, которые не имеют место для частиц с ненулевой массой покоя. Одним таким сходством является инвариантность действия электромагнитного и нейтринного полей относительно конформной группы преобразований. Этому и соответствуют известные законы сохранения. В предлагаемой работе выясняется поведение действия нейтринного поля в гидродинамической модели относительно конформной группы. Установлено, что при переходе к гидродинамической модели нарушается сверху упомянутое сходство между фотоном и нейтрино: инвариантность действия относительно преобразования сжатия конечно сохраняется и получен соответствующий закон сохранения, однако уже не имеет место инвариантность относительно 4-параметрической собственно-конформной группы преобразований (относительно инверсий, которые иногда называются и группой ускорений). Из этого следует, что при переходе к равномерно ускоренной системе отсчета невозможно найти в гидродинамической модели сохраняющиеся величины, аналогичные известным для Дираковского нейтрино. Одновременно очевидно, что при изложении нужно точнее говорить об эквивалентности гидродинамической и „обыкновенной" теорий.


## ON THE HYDRODYNAMICAL MODEL OF NEUTRINO

Mikuláš Blažek


### Summary

The basic vacuum equations and relations for the photon and neutrino have several common and similar points that do not have place for a non zero rest mass of the considered particle. In this paper we consider one of these points, namely the invariance property of the neutrino action. It is well known that the action of the electromagnetic and of the neutrino field is invariant under the conformal group of transformations. Well known conservation laws follow from here. In this paper the conformal invariance property of the neutrino field in the hydrodynamical model is investigated. It is shown that some of the transformations belonging to the conformal group are inadmissible in the hydrodynamical model and that thus the similarity between the photon and neutrino fields is disturbed. In the hydrodynamical model the neutrino action is invariant under dilatations (the conserved quantity is also shown) but it is already impossible to fulfil the action invariance condition when the 4-parametric group of inversions (group of accelerations) is applied, even if it is slightly modified. Thus the analogous conservation laws which are valid for the Dirac neutrino field and are connected with the transition to uniformly accelerated coordinate systems are no longer correct for the hydrodynamical neutrino field. Therefore it is desirable to consider more exactly the equivalence between the hydrodynamical and the „usual" theory of the neutrino.