

МАТРИЧНЫЙ ПРИЕМ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖЕВЫХ СИСТЕМ

К. К. ПОНОМАРЕВ, СССР, г. Москва

Расчету колебаний стержневых систем посвящались работы различных авторов [1], [2], [3], [5] и многих других. Из известных методов решения наиболее распространенные получили метод деформаций, напр. [6], [7], обладающий рядом несомненных преимуществ: простое выражение уравнений колебаний неразрезных балок с различной длиной пролета и переменной жесткостью, балок на упругих опорах, рамных систем с подвижными опорами и т. д.

В статье излагается матричный прием расчета колебаний стержневых систем особенно удобный при программировании задач этого класса на счетно-вычислительных машинах. При ручном способе вычисления метод наиболее эффективен при большом количестве пролетов различной длины, многократного изменения жесткости, необходимости варьирования исходных параметров и высокой степени статической неопределенности, так как в этих случаях достигается большая гибкость расчета.

1. Как известно, уравнение свободных колебаний прямого стержня постоянного сечения

$$y^{(IV)} - \frac{\lambda^4}{l^4} y = 0,$$

где:

$$\lambda^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI} \cdot l^4,$$

μ — масса балки,

ω — частота собственных колебаний,

l — длина пролета.

Решение этого уравнения совместно с первыми тремя производными образует систему, которая в матричной записи, проводя расчет слева направо:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & -l\psi_2 & -\frac{l^2}{EI}\psi_3 & -\frac{l^3}{EI}\psi_4 \\ \frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 & \frac{l}{EI}\psi_2 & \frac{l^4}{EI}\psi_3 \\ -\frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4 EI}{l}\psi_4 & \psi_1 & l\psi_2 \\ -\frac{\lambda^4 EI}{l^3}\psi_2 & \frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{\lambda}{l} x + \cos \frac{\lambda}{l} x \right); \quad \psi_2 = \frac{1}{2\lambda} \left(\sinh \frac{\lambda}{l} x + \sin \frac{\lambda}{l} x \right)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2\lambda^2} \left(\cosh \frac{\lambda}{l} x - \cos \frac{\lambda}{l} x \right); \quad \psi_4 = \frac{1}{2\lambda^3} \left(\sinh \frac{\lambda}{l} x - \sin \frac{\lambda}{l} x \right)$$

— функция Крылова,

y — прогиб,

φ — угол поворота,

M — изгибающий момент,

Q — поперечная сила.

Индексом „0“ обозначается начальное сечение стержня (один из концов), индексом „ k “ — любое промежуточное k -тое сечение.

При наличии жестких опор 0 и k (однопролетная защемленная, шарнирно-опертая или с одного конца защемленная, а с другого-шарнирно опертая балка) $y_0 = y_k = 0$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы (1), получаем выражение

$$Q_0 = -\frac{EI\psi_2\varphi_0 - l\psi_3M_0}{l^2\psi_4},$$

исключая которое из второго и третьего уравнений системы, имеем:

$$\begin{aligned} \{Y_k\} &\equiv \begin{bmatrix} \varphi_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_4} & \frac{l}{EI} \left(\psi_2 - \frac{\psi_3^2}{\psi_4} \right) \\ \frac{EI}{l} \left(\lambda^4\psi_4 - \frac{\psi_2^2}{\psi_4} \right) & \psi_1 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv [L] \cdot \{Y_0\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица пролета $[L]$ упрощается введением следующих функций Патера:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda = 2^2 \frac{\lambda^3}{3!} - 2^4 \frac{\lambda^7}{7!} + 2^6 \frac{\lambda^{11}}{11!} - \dots + \dots \\ B(\lambda) &= 2 \sinh \lambda \sin \lambda = 2^2 \frac{\lambda^2}{2!} - 2^4 \frac{\lambda^6}{6!} + 2^6 \frac{\lambda^{10}}{10!} - \dots + \dots \\ C(\lambda) &= \cosh \lambda \cos \lambda - 1 = -2^2 \frac{\lambda^4}{4!} + 2^4 \frac{\lambda^8}{8!} - 2^6 \frac{\lambda^{12}}{12!} + \dots - \dots \end{aligned} \quad (3)$$

После элементарных алгебраических преобразований уравнений (2) матрица пролета принимает вид:

$$[L] = \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} A(\lambda), & -\frac{l}{\lambda EI} \cdot C(\lambda) \\ B(\lambda) \cdot \frac{\lambda EI}{l}, & A(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

причем функция

$$\sin \lambda - \sinh \lambda = -2 \left[\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^7}{7!} + \frac{\lambda^{11}}{11!} + \dots \right].$$

Уравнение (2) записывается тогда в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[A(\lambda) \varphi_0 - \frac{l}{\lambda EI} C(\lambda) M_0 \right], \\ M_1 &= \frac{1}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \left[\frac{\lambda EI}{l} B(\lambda) \varphi_0 + A(\lambda) M_0 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

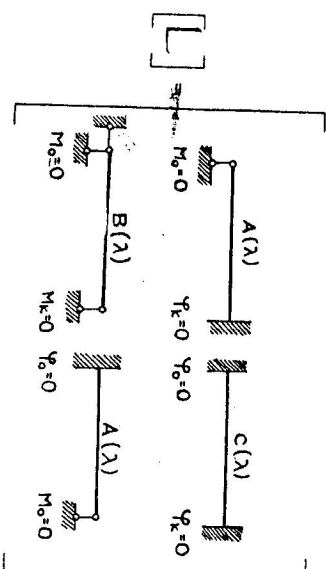


Рис. 1.

Матрица (4) содержит уравнения колебаний для четырех возможных комбинаций опирания (рис. 1). Необходимо только, согласно данным граничным условиям, вычеркнуть одну строку и один столбец, а оставшийся элемент приравнять нулю.

Тривиальную величину $\lambda = 0$, как не имеющую практического значения, исключаем из рассмотрения и, таким образом, знаменатель $\sin \lambda - \sinh \lambda$ никогда не равен нулю.

Корни функций A , B , C находятся по формулам приведенным в таблице 1.

Таблица 1

Функции	$A(\lambda) = 0$	$B(\lambda) = 0$	$C(\lambda) = 0$
корни			
λ_1	3,9265	3,1416	4,7299
λ_2	7,0685	6,2832	7,8531
λ_3	10,2102	9,4248	10,9956
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_n	$\approx \frac{1}{4} \pi + n\pi$	$n\pi$	$\approx \frac{1}{2} \pi + n\pi$

Напряженное и деформированное состояние в любом n -ом сечении колеблющейся балки выражается соотношением

$$\{Y_n\} = [L_n] \cdot [L_{n-1}] \cdot \dots \cdot [L_2] \cdot [L_1] \cdot \{Y_0\},$$

где $[L_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — матрица колебаний отдельных пролетов, или для случая равнопролетной балочной системы

$$\{Y_n\} = [L]^n \cdot \{Y_0\}. \quad (6)$$

Вводя новые функции $\hat{B} = (\lambda EI/l)(B/A)$, $\hat{C} = [l/(\lambda EI)](C/A)$, $\hat{B} \hat{C} = BC/A^2 = D$, равенство (4) примет вид

$$[L] = \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{C} \\ \hat{B}, & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

или

$$[L]^n = \frac{A^n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^n} \begin{bmatrix} T_n, & -\hat{C} S_n \\ \hat{B} S_n, & T_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где функции

$$\begin{aligned} T_n &= C_0^n - C_2^n D + C_4^n D^2 - \dots + \dots = \sum_{i=0}^n C_{2i}^n (-D)^i; \\ S_n &= C_1^n - C_3^n D + C_5^n D^2 - \dots + \dots = \sum_{i=0}^n C_{2i+1}^n (-D)^i; \end{aligned} \quad (8a)$$

здесь: $C_m^n = n!/(m! (n-m)!)$ — число сочетаний из n элементов по m .

Условия колебаний для различных граничных условий, согласно (8), будут:

$$\begin{aligned} 1. \varphi_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad A'' \frac{T_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^*} &= 0; \\ 2. \varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad -\hat{C} A'' \frac{S_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^*} &= 0; \\ 3. M_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad \hat{B} A'' \frac{S_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^*} &= 0; \\ 4. M_0 = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad A'' \frac{T_n}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^*} &= 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Как известно, реактивный момент при повороте опоры $M_n = -\mu \varphi_n$. Используя (8) образуем вспомогательное выражение

$$-\frac{M_n}{\varphi_n} = \bar{K}_n, \quad (\varphi_n \neq 0), \quad (9)$$

представляющее в простейшем случае характеристику приведенной упруго вращающейся опоры в точке n .

Для зашпеленной опоры $-\bar{K}_n^{(0)} = -T_n / (\hat{C} S_n)$ а для шарнирной $-\bar{K}_n^{(0)} = \hat{B} S_n / T_n$. В частном случае однопролетной балки при $T_1 = S_1 = 1$:

$$-\bar{K}_a^{(1)} = -\frac{1}{\hat{C}} = -\frac{A \lambda}{C} \frac{EI}{l}; \quad -\bar{K}_b^{(1)} = \hat{B} = \frac{B \lambda}{A} \frac{EI}{l}.$$

Раскрывая эти неопределенные выражения (при $\lambda = 0$) с помощью правила Лопиталя, после трехкратного дифференцирования, получаем

$$\bar{K}_a^{(1)} = -4 \frac{EI}{l}; \quad \bar{K}_b^{(1)} = -3 \frac{EI}{l}.$$

II. Рассмотрим колебания однопролетной рамы открытого контура (рис. 2). Горизонтальный ригель рамы принимаем за основную стержень. Отсекаем все ответвления и заменяем их действие приведенными упругими опорами, таким образом, задачу к расчету колебаний неразрезной балки.

Так как между изгибающими моментами непосредственно слева и правее опоры условие сопряжения

$$M_i^{\text{пр}} = M_i^{\text{лев}} - \mu_i \varphi_i,$$

то матрицу пролета необходимо слева умножить на матрицу перехода

$$[F_i] = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -\mu_i, & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

что дает: $\{Y\} = [F_i] [L_i] \cdot \{Y_{i-1}\} = [L_i^*] \cdot \{Y_{i-1}\}$ или:

$$\{Y_{i-1}^*\} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \{Y_{i-1}\}$$

$$[Y] = \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{C}_i, & 0 \\ \hat{B}_i, & 1, & -\mu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} - \hat{C}_i M_{i-1} \\ \hat{B} \varphi_{i-1} + M_{i-1} - \mu_i \varphi_i \end{bmatrix} = [L_i^*]$$

$$= \frac{A_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} \{Y_i\},$$

где $\varphi_i = \varphi_{i-1} - \hat{C}_i M_{i-1}$.

Такое перемножение возможно ввиду того, что третий элемент первой строки матрицы $[L_i^*]$ нуль и в первой строке произведения получается всегда линейная зависимость, представляющая первый элемент последующей матрицы — столбца $\{Y_i\}$ (или третий элемент дополненной матрицы-столбца).

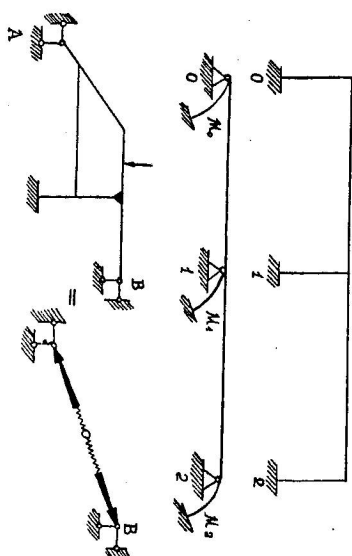


Рис. 2.

Дальнейший расчет ничем уже не отличается от расчета колебаний неразрезной балки.

Расчет колебаний рам замкнутого контура сводится к следующему.

Перерезаем раму в двух сечениях (опорах) A, B (рис. 2-б) и определяем линейную зависимость моментов M_A, M_B и углов поворота φ_A и φ_B в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_{AB}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Здесь: $[K_{ik}]$ — матрица приведенной двухсторонней упругой опоры (приведенной упругости всей системы). Величина M_d взята с минусом, т. к. нагрузка инерции колеблющегося участка рамы передается на концы ин-тервала.

Для однопролетной балки, обозначив концы через 0, k и используя для этой цели равенство (7), матрица приведенной упругой опоры

$$\begin{bmatrix} -M_o \\ M_k \end{bmatrix} = [K_{ok}] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_o \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{A} & -1 \\ -1 & \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_o \end{bmatrix} \quad (12)$$

Таким образом, раму замкнутого контура разбиваем на некоторое число n неразрезных стержней. Прямолнейные связи, соединяющие эти стержни, должны быть балками. Приведенные двухсторонние упругие опоры которых заданы уравнением (12). Каждый из n стержней рассчитывается обычным путем, как балка со свободными неизвестными начальными параметрами усилий и деформаций, связанных друг с другом зависимостью (12). Следовательно, ввиду наличия граничных условий на „правом“ конце стержня следует приравнять нулю определитель k -го порядка, что дает искомое уравнение колеба-

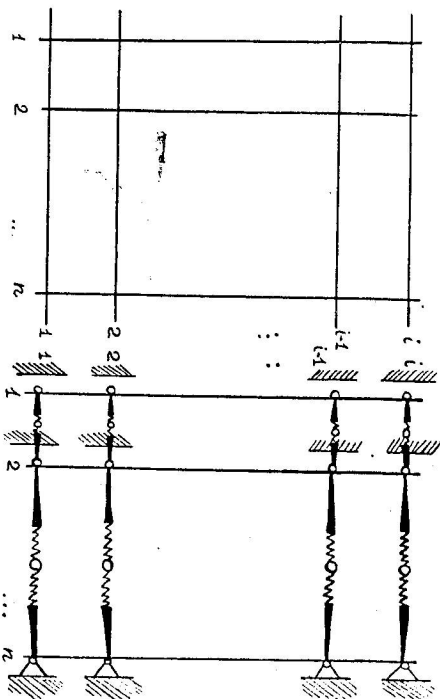


Рис. 3.

ний. Особо четко расчет получается при прямоугольной схеме рамы и топологически ей эквивалентной заменяющей системе (рис. 3).

В этом случае расширенная матрица (7) определяет матрицу приведенной упругости n -го порядка:

$$[L_n] = \begin{bmatrix} A_1 g(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 g(\lambda_2) & \dots & 0 & 0 & \dots & -A_1 \dot{C}_1 g(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n g(\lambda_n) & -A_n \dot{C}_n g(\lambda_n) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_n g(\lambda_n) & -A_n \dot{C}_n g(\lambda_n) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_n \dot{B}_n g(\lambda_n) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A_2 g(\lambda_2) & 0 \\ A_1 \dot{B}_1 g(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A_1 g(\lambda_1) & 0 \end{bmatrix} \quad [K] \quad (13)$$

в которой мы для удобства записи положили $g(\lambda) = 1/(\sin \lambda - \sinh \lambda)$ и блок-матрица $[K]$ содержит все одно- и двухсторонние приведенные упругие опоры. В случае однородной системы матрица (13) вырождается в

$$[L_n] = \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} [E] & -[U] \\ [B] & [K] \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$[E] = \begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{bmatrix}, \quad [U] = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1 \\ 0, \dots, 1, 0 \\ \vdots \\ 1, \dots, 0, 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Определить наименьшие собственные частоты колебаний стальной рамы круглого поперечного сечения радиусом 3 см (рис. 4).

Согласно данным граничным условиям (8-б) при наличии трех пролетов ($n = 3$), уравнение колебаний

$$A^3 \cdot \frac{T_3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем: $A(\lambda) = 0$ или (табл. 1) $\lambda_1 = 3,93$; $\lambda_2 = 7,07$. Далее, согласно (8-а): $T_3 = 0$; $T_3 = 1 - 3D = 0$ или $D = BC/A^2 = 1/3$.

Решая последнее равенство графически, получаем

$$\lambda_3 = 3,26 \text{ и } \lambda_4 = 4,61.$$

Частота колебаний определяется из выражения

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} \cdot l^4 = \frac{\omega^2 F \gamma l^4}{g \cdot EI},$$

где F — площадь поперечного сечения, а остальные обозначения прежние;

γ — объемный вес стали $7,8 \text{ т/м}^3$.

Так как момент инерции круга $I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{F r^2}{4}$, а μ — погонная масса балки, то

$$\omega^2 = \frac{981 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3^2}{7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 300^4} \lambda^4 = 73,3 \lambda^4 \text{ сек}^{-2},$$

или $\omega = 8,561 \lambda^2 \text{ сек}^{-1}$.

Число колебаний в минуту

$$f = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 8,561}{3,14} \lambda^2 = 81,8 \lambda^2 (\text{кол/мин.})$$

Таким образом, наименьшее число колебаний

$$\begin{aligned} f_1 &= 81,8 \cdot 3,26^2 = 870 \text{ кол/мин.}; \\ f_2 &= 81,8 \cdot 3,93^2 = 1270 \text{ кол/мин.}; \\ f_3 &= 81,8 \cdot 4,61^2 = 1720 \text{ кол/мин.}; \\ f_4 &= 81,8 \cdot 7,07^2 = 4120 \text{ кол/мин.} \end{aligned}$$

Пример 2. Найти минимальные собственные частоты колебаний рамы (рис. 5-а).

Эквивалентная система с приведенными упругими опорами показана на рис. 5-б.

Так как $-K_b^{(1)} = \hat{b}$, а $-K_a^{(1)} = -1/\hat{c}$, то используя общеизвестную формулу реактивного момента вращающейся опоры $M_i = -\mu_i \phi_i$, составляем три матрицы пролетов $[L_i]$. Принимая во внимание равенство $B\hat{c} = D$, получаем записывая произведение двух матриц в форме

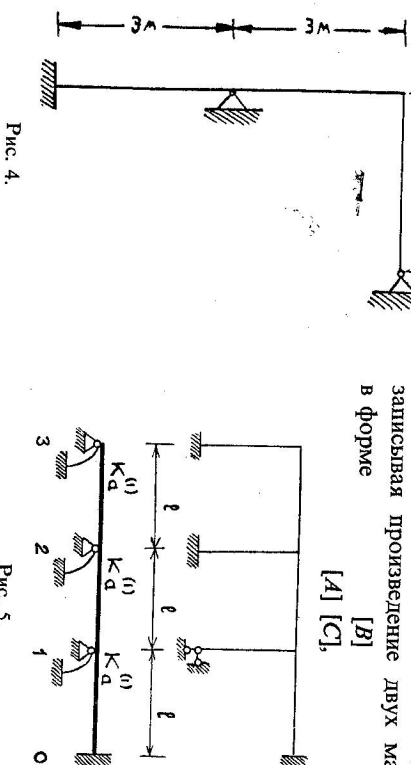


Рис. 4.

Рис. 5.

если $[C] = [B] \cdot [A]$:

$$\begin{aligned} [L_1] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{c} \\ \hat{b}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{c} \end{bmatrix} \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda}, \\ [L_2] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{c} \\ \hat{b}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\hat{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C(2-D) \\ 3-3D \end{bmatrix} \frac{A^2}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^2}, \\ [L_3] &= \frac{A}{\sin \lambda - \sinh \lambda} \begin{bmatrix} 1, & -\hat{c} \\ B, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\hat{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{c}(5-4D) \\ 8-9D+D^2 \end{bmatrix} \frac{A^3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} = \begin{bmatrix} \phi_3 \\ M_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На опоре 3: $M_3 = 0$. Следовательно, выражение

$$M_3 = \frac{A^3}{(\sin \lambda - \sinh \lambda)^3} \cdot (8 - 9D + D^2) \approx 0$$

при $A = 0$ дает уравнение $8 - 9D + D^2 = 0$, корни которого

$$D_1 = 1; D_2 = 8.$$

Решая его графически, получаем:

$$\lambda_1^{(1)} = 3,40; \quad \lambda_1^{(2)} = 3,65; \quad \lambda_2^{(1)} = 4,45; \quad \lambda_2^{(2)} = 4,20.$$

Дальнейший числовой расчет аналогичен примеру 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Крылов А. Н., Собрание трудов, том X, Изд. АН СССР, 1948.
- [2] Гогенемзер К. и Прагер В., *Динамика сооружений*, ОНТИ, 1936.
- [3] Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., *Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике*, ИЛ, Москва 1950.
- [4] Ржаницын А. Р., *Устойчивость равновесия упругих систем*, Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва 1955.
- [5] Филиппов А. П., *Колебания упругих систем*, Изд. АН УССР, Киев 1956.
- [6] Koloušek V., *Stavění dřevěných spojůch nosníků a rámových soustav*, Praha 1950.
- [7] Koloušek V., *Stavění dřevěných spojůch soustav o stěrných rolích*, Nové příspěvky k teorii stavebních konstrukcí, Bratislava 1959.
- [8] Chrást J., *Příspevek k teorii obru tenké tyče*, Matematicko-fyzikální časopis SAV 10 (1960), 167—177.

Поступило 26. 11. 1960.

DIE BERECHNUNG DER SCHWINGUNGEN EINES STABSYSTEMS MITTELS MATRIZEN

K. K. Ponomarjow

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Methode zur Berechnung eines schwingenden Stabsystems mittels Matrizen entwickelt, wobei die Methode von Anfangsparametern Verwendung findet. Die Lösung der Gleichung freier Schwingungen eines geraden Stabes sowie die ersten drei Ableitungen erfüllen die Matrixrelation: $\{Y_k\} = [L]\{Y_0\}$, wobei $\{Y\}$ die Spannungszustand-Matrix im Anfangsquerschnitt bzw. in einem k -ten Querschnitt, sowie $[L]$ die Spannweite-Matrix des Systems bedeutet. Betrachten wir einen engeren Kreis von Aufgaben, z. B. ein Balkensystem mit starren Stützen, so wird die Grundabhängigkeit noch mehr vereinfacht, da die Spannweite-Matrix dann nur noch von zweiter Ordnung ist. Beim Vorhandensein von n Spannweiten, bekommen wir den Spannungs- sowie Deformationszustand in einem beliebigen n -ten Querschnitt der schwingenden Systems als Produkt von Spannweite-Matrizen.

Die Methode findet auch bei der Berechnung von schwingenden Rahmen beliebiger geometrischer Form Verwendung, wobei die dazugehörigen Berechnungen durch Beispiele erläutert werden. Für die oben betrachteten Aufgaben eignet sich diese Methode besonders gut zur Programmierung für elektronische Rechenmaschinen.