MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 3, 1961

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ МЕР

ИГОР КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Братислава

Под векторной мерой понимается σ-аддитивная функция множества μ, определенная на кольце $\boldsymbol{R}$ подмножеств данного множества P, имеющая в качестве своих значений элементы линейного топологического пространства X. Цель настоящей работы состоит в изучении свойств таких векторных мер, с учетом, в частности, их построения. Работа распадается на несколько разделов.

Первый раздел посвящен рядам в линейных топологических пространствах. Во втором разделе содержатся основные определения, касающиеся векторных мер и вытекающие из них непосредственные следствия. В третьем разделе решается вопрос об исчерпывании векторной меры. Здесь решается вопрос о том, в каком случае существует для векторной меры μ, определенной на σ-кольце $\boldsymbol{S}$, такое множество $Q \in \boldsymbol{S}$, что $\mu(E - Q) = 0$ для $E \in \boldsymbol{S}$. В четвертом разделе рассматривается расширение векторной меры из кольца на наименьшее σ-кольцо над ним. Здесь приводится необходимое и достаточное условие для возможности расширения определенной на кольце $\boldsymbol{R}$ векторной меры μ на меру $\bar{\mu}$, определенную на σ-кольце. В пятом разделе приводятся разного рода достаточные условия для возможности расширения векторной меры из кольца на σ-кольцо.

1. Ряды в линейных топологических пространствах

Настоящий раздел содержит некоторые основные понятия и обозначения, относящиеся к линейным топологическим пространствам. Кроме того, здесь содержится обобщение леммы Орлича—Петтиса о совершенной сходимости рядов (см. теорему 1.1).

Под линейным топологическим пространством понимается линейное пространство (над телом Λ вещественных или комплексных чисел), которое является одновременно топологическим пространством Хаусдорфа и в котором операции сложения элементов и умножения элементов на число непрерывны (как функции двух переменных).

Если всякое открытое множество линейного топологического пространства X содержит открытое выпуклое подмножество, то пространство называется линейным локально выпуклым топологическим пространством.

В дальнейшем для удобства изложения будем пользоваться сокращением ЛТП для линейного топологического пространства и сокращением ЛВП для линейного топологического пространства, являющегося локально выпуклым. Что касается текущих результатов из теории ЛТП, то мы будем ссылаться преимущественно на [1] и будем придерживаться приведенных там соглашений.

Пусть X — линейное пространство. Вещественная функция p, определенная на X, называется псевдонормой, если выполняется:

а) $p(x+y) \leqq p(x)+p(y)$ для произвольных $x, y, \in X$;

б) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ для произвольных $x \in X$, $\alpha \in \Lambda$.

Известно, что если X — ЛВП, то существует такое множество $\mathscr{N}$ псевдонорм на X, что система множеств вида $\{x : p(x-x_0) < \varepsilon\}$, для любых $p \in \mathscr{N}$ и $\varepsilon > 0$, образует базу окрестностей произвольной точки $x_0 \in X$. Множество $\mathscr{N}$ называется достаточной системой псевдонорм для пространства X.

Линейное нормированное пространство — частный случай ЛВП. В таком нормированном пространстве существует достаточная система псевдонорм, состоящая из единственной псевдонормы p. Поскольку речь идет о пространстве Хаусдорфа, то для $x \neq 0$ должно быть $p(x) \neq 0$. Псевдонорма с таким свойством называется нормой. Обычно пишется $\|x\|$ вместо $p(x)$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов ЛТП (не обязательно локально выпуклого) называется фундаментальной последовательностью, если для любой окрестности V точки O существует число n_V такое, что для $m > n_V$, $n > n_V$ будет $x_n - x_m \in V$.

Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к элементу x, если для любой окрестности V нулевого элемента существует число n_V такое, что для $n > n_V$ будет $x_n - x \in V$.

Если каждая фундаментальная последовательность элементов пространства X сходится к некоторому элементу пространства X, то пространство X называется секвенциально полным. Секвенциально полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Если X — ЛТП, то под X^* понимается множество всех линейных непрерывных функций, определенных на X принимающих значения из Λ.

Пусть X — ЛВП. В пространстве X можно задать новый базис окрестностей точки 0 таким образом, что его будут образовать множества вида

$$\{x : |f_1(x)| < \varepsilon, \quad |f_2(x)| < \varepsilon, \ldots, \quad |f_k(x)| < \varepsilon\}$$

для произвольного натурального k, произвольного $\varepsilon > 0$ и произвольных $f_1, f_2, \ldots, f_k \in X^*$. Полученная таким способом топология называется слабой топологией пространства X. Первоначальную топологию пространства X называют иногда сильной.

Ясно, что представляет собой слабо фундаментальная последовательность, слабо сходящаяся последовательность или пространство слабо секвенциально полное.

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ элементов ЛТП X сходится и его сумма равна x, если

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i = x.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называется совершенно сходящимся, если для всякой возрастающей последовательности $\{n_i\}$ натуральных чисел ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ сходится и его сумма равна некоторому элементу пространства X.

Этому определению можно придать еще и другой, эквивалентный вид: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ совершенно сходится тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\{\eta_n\}$, где $\eta_n = 0$ или 1 для $n = 1, 2, \ldots$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n x_n$ сходится и его сумма принадлежит X.

Для дальнейшего изложения большое значение будет иметь следующее утверждение, т. наз. лемма Орлича—Петтиса:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ элементов банахова пространства X слабо совершенно сходится, то он сходится и сильно совершенно.

Доказательство этой леммы дано в [2] (Теорема 2.32) или же в [1] (стр. 60).

Примечание. Хотя при доказательстве леммы Орлича—Петтиса в [1] и [2] используется полнота пространства X, в формулировке этой леммы не обязательно требовать полноты пространства X, им может быть любое линейное нормированное пространство. Это доказывается следующим образом.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ — слабо совершенно сходящийся ряд элементов пространства X. Пусть $\bar{X}$ — пополнение пространства X. Поскольку для каждой функции $f \in X^*$ существует единственная функция $\bar{f} \in \bar{X}^*$ такая, что $\bar{f}(x) = f(x)$ для $x \in X$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ слабо совершенно сходится в $\bar{X}$. Следовательно, по лемме Орлича—Петтиса он сильно сходится в $\bar{X}$. Нам остается доказать, что все суммы выбранных рядов будут принадлежать X. Пусть $\eta = \{\eta_n\}$ — последовательность нулей и единиц. Согласно условию существует элемент $x_\eta \in X$ такой, что $\lim_i f(\sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n) = f(x_\eta)$ для всякого $f \in X^*$, а значит, и для всякого $f \in \bar{X}^*$. Но по лемме Орлича—Петтиса существует элемент $y_\eta \in \bar{X}$ такой, что $\lim_i \| \sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n - y_\eta \| = 0$. Но тогда тем более $\lim_i f(\sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n) = f(y_\eta)$ для всякого $f \in \bar{X}^*$. Отсюда следует, что $x_\eta = y_\eta$.

Лемма Орлича – Петтиса может быть обобщена для любого ЛВП. Это обобщение дано в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть X — ЛВП. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ элементов пространства X совершенно сходится в слабой топологии, то он совершенно сходится и в сильной топологии пространства X.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ слабо совершенно сходится. Мы должны доказать, что для всякой последовательности $\eta = \{\eta_n\}$ нулей и единиц существует элемент $x_\eta \in X$ такой, что $x_\eta = \lim_i \sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n$ в сильной топологии пространства X. Пусть $\mathcal{N}$ — достаточная система псевдонорм для пространства X. Достаточно показать, что для каждой псевдонормы $p \in \mathcal{N}$ будет $\lim_i p(x_\eta - \sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n) = 0$.

Пусть $p \in \mathcal{N}$. Два элемента $x, y \in X$ назовем p-эквивалентными тогда и только тогда, когда $p(x - y) = 0$. Поскольку p — псевдонорма, то введенное таким способом соотношение удовлетворяет всем требованиям для того, чтобы быть эквивалентностью. Поэтому пространство X распадается на классы взаимно эквивалентных элементов. Класс, содержащий элемент x, обозначим через x^p. Множество таких классов обозначим через X_p. Если положить $x^p + y^p = (x + y)^p$, $\alpha x^p = (\alpha x)^p$ и $\|x^p\|_p = p(x)$, то пространство X_p станет линейным нормированным пространством с нормой $\| . \|_p$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ слабо совершенно сходится в пространстве X_p. Докажем это следующим образом. Если $\zeta = \{\zeta_n\}$ — произвольная последовательность нулей и единиц, то существует элемент $x_\zeta \in X$ такой, что для всякого $f \in X^*$ будет $\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta_n x_n) = f(x_\zeta)$. Покажем, что для всякого $\varphi \in X_p^*$ будет $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\zeta_n x_n^p) = \varphi(x_\zeta^p)$. Пусть $\varphi \in X_p^*$. Если определить функцию $\bar{\varphi}$ на X при помощи равенства $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x^p)$, то функция $\bar{\varphi}$ линейна и непрерывна на X. Линейность ее очевидна. Непрерывность вытекает из того, что φ непрерывна на X_p, а значит, ограничена на множестве $\{x^p : \|x^p\|_p < 1\}$, поэтому $\bar{\varphi}$ ограничена на открытом множестве $\{x : p(x) < 1\}$. Это означает (смотри [1], стр. 12), что $\bar{\varphi}$ — непрерывная функция. Но поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta_n x_n) = \bar{\varphi}(x_\zeta)$, то согласно определению функции $\bar{\varphi}$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\zeta_n x_n^p) = \varphi(x_\zeta^p)$.

По лемме Орлича – Петтиса (и по примечанию перед этой леммой) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ сильно совершенно сходится в X_p. Значит,

$$\lim_i \|x_\eta^p - \sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n^p\|_p = \lim_i p(x_\eta - \sum_{n=1}^{i} \eta_n x_n) = 0.$$

2. Определение и основные свойства векторной меры

В этом разделе будут приведены основные определения и соглашения относительно мер со значениями в векторных пространствах и выведены непосредственные следствия этих определений. Что касается результатов общей теории меры, мы будем ссылаться на [3] а также пользоваться приведенной там терминологией.

Пусть P — произвольное непустое множество (основное пространство). Система $\mathbf{R}$ подмножеств множества P называется кольцом множеств, если она обладает следующими свойствами:

$$A,\ B \in \mathbf{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{R};$$
$$A,\ B \in \mathbf{R} \Rightarrow A - B \in \mathbf{R}.$$

Кольцо множеств $\mathbf{R}$ называется соответственно σ-кольцом множеств или δ-кольцом множеств, если выполняется соответственно

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{R},$$

или

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{R} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{R}.$$

Всякое σ-кольцо множеств есть одновременно δ-кольцо множеств. Кольцо множеств $\mathbf{R}$, содержащее множество P, называется алгеброй множеств. Алгебра, являющаяся одновременно σ-кольцом, называется σ-алгеброй множеств.

Пусть $\mathbf{M}$ — произвольная система подмножеств множества P. Существует одна и только одна система $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{M})$ со следующими свойствами:

1. $\mathbf{S}$ есть σ-кольцо;
2. $\mathbf{M} \in \mathbf{S}$;
3. Для произвольной системы $\mathbf{S}'$ со свойствами 1. и 2. будет $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}'$.

Система $\mathbf{S}(\mathbf{M})$ называется наименьшим σ-кольцом над системой $\mathbf{M}$ или σ-кольцом, порожденным системой $\mathbf{M}$.

Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо и пусть X — ЛТП. Под векторной мерой на $\mathbf{R}$ со значениями в X понимается такая функция μ, область определения которой — $\mathbf{R}$ и значения — из X и которая обладает еще таким свойством:

Если $\{E_n\}$ — произвольная последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$, то

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Если X — множество вещественных или комплексных чисел, то векторная мера μ называется обобщенной мерой. Обобщенная мера μ, принимающая только действительные неотрицательные значения, называется конечной неотрицательной мерой, или просто мерой.

Пусть μ — функция, определенная на произвольном множестве T и ее значения пусть принадлежат ЛТП X. Пусть $f \in X^*$. Под $f\mu$ понимается функция, определенная на T с помощью равенства $f\mu(t) = f(\mu(t))$ для каждого $t \in T$.

Теорема 2.1. *Пусть X — ЛТП, пусть $\mathbf{R}$ — кольцо множеств. Пусть μ — векторная мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X.*

Тогда для каждого $f \in X^*$ функция $f\mu$ есть обобщенная мера на $\mathbf{R}$.

Доказательство этой теоремы сразу же вытекает из аддитивности и непрерывности функции f.

Эта теорема необратима. В таких ЛТП X, которые не являются локально выпуклыми, это может обусловливаться слишком большой „бедностью" пространства X^*. Но теорему нельзя обратить даже в ЛВП, о чем убеждается на следующем примере.

Пример 1. Пусть X — пространство всех непрерывных вещественных функций на интервале $\langle 0, 1\rangle$ с топологией, заданной с помощью нормы $\|x\| = \sup\limits_{t \in \langle 0,1\rangle} |x(t)|$.

Пусть P — множество всех натуральных чисел. Пусть $\mathbf{R}$ — система подмножеств множества P, состоящая из пустого множества, из всех конечных множеств, из всего основного пространства P и из дополнений конечных множеств. Легко установить, что $\mathbf{R}$ — алгебра.

Определим теперь элементы $y_n \in X$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ следующим способом:

$$y_0(t) = 0, \quad t \in \langle 0, 1\rangle;$$

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, (2n+2)^{-1}\rangle, \\ (2n+1)\,[(2n+2)\,t - 1], & t \in \langle (2n+2)^{-1}, (2n+1)^{-1}\rangle, \\ 1 + 2n - 2n(2n+1)\,t, & t \in \langle (2n+1)^{-1}, (2n)^{-1}\rangle, \\ 0, & t \in \langle (2n)^{-1}, 1\rangle \end{cases}$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Для произвольных $t \in \langle 0, 1\rangle$ имеем $\lim\limits_n y_n(t) = 0$.

Положим $x_n = y_n - y_{n-1}$ для $n = 1, 2, \ldots$

Определим теперь функцию μ на $\mathbf{R}$ следующим образом:

Если $E \in \mathbf{R}$ и E — конечное множество, то полагаем $\mu(E) = \sum\limits_{n \in E} x_n$; $\mu(\emptyset) = 0$. Если $E \in \mathbf{R}$ и E — бесконечное множество, то существует конечное (или пустое) множество $F \in \mathbf{R}$ такое, что $E = P - F$. В этом случае положим $\mu(E) = -\mu(F)$.

Для каждой функции $f \in X^*$ будет $f\mu$ обобщенной мерой. Это доказывается следующим способом.

Пусть $f \in X^*$. Согласно теореме Рисса о представлении линейных функционалов на пространстве непрерывных функций существует такая обобщенная мера

(Лебега—Стилтьеса) ν_f на системе всех борелевых множеств интервала $\langle 0, 1\rangle$, что $f(x) = \int\limits_{\langle 0,1\rangle} x(t)\,\mathrm{d}\nu_f$ для каждого $x \in X$. Пусть теперь $E_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ — непересекающиеся множества и пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$. Если $\mu(E_n) = z_n$ и $\mu(E) = z$, то легко показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n(t) = z(t)$ для каждого $t \in \langle 0, 1\rangle$ и $|\sum\limits_{i=1}^{n} z_i(t)| \leqq 1$ для $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда по теореме Лебега следует

$$f(\mu(E)) = f(z) = \int\limits_{\langle 0,1\rangle} z(t)\,\mathrm{d}\nu_f = \lim \Big(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} z_i(t)\,\mathrm{d}\nu_f\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} z_n(t)\,\mathrm{d}\nu_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu(E_n)).$$

Но функция μ не есть векторная мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X. Это вытекает из того, что $\|\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(\{i\})\| = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$ и следовательно не может быть $0 = \mu(P) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{i\})$ в смысле сходимости в пространстве X.

Обращением до некоторой степени теоремы 2.1 являются следующие две теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть X — ЛВП. Пусть $\mathbf{R}$ есть δ-кольцо множеств. Пусть μ — функция, определенная на $\mathbf{R}$ со значениями в X. Пусть для каждой функции $f \in X^*$ есть $f\mu$ обобщенная мера.*

Тогда функция μ есть векторная мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$ и пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$. Для произвольной возрастающей последовательности $\{k_n\}$ натуральных чисел $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \in \mathbf{R}$, так как $\mathbf{R}$ есть δ-кольцо и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n} = E - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E - E_{k_n})$. Поскольку $f\mu$ — обобщенная мера, то $f[\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{k_n})] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f[\mu(E_{k_n})]$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ слабо совершенно сходится. Но из теоремы 1.1 следует, что он сильно совершенно сходится и его сумма, очевидно, равна $\mu(E)$. Следовательно, μ есть векторная мера.

Теорема 2.3. *Пусть X — ЛВП. Пусть X — пространство слабо секвенциально полное. Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо. Пусть μ — функция на $\mathbf{R}$ со значениями в X и пусть для каждого $f \in X^*$ есть $f\mu$ обобщенная мера.*

Тогда μ есть векторная мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$. Поскольку для каждого $f \in X^*$

есть $f\mu$ обобщенная мера, то ряд $\sum_{n=1} f[\mu(E_n)]$ абсолютно сходится (абсолютная сходимость этого ряда вытекает из того, что он имеет одну и ту же сумму $f\mu(E)$ при любой перестановке его членов). Отсюда следует, что для произвольной последовательности $\{\eta_n\}$ нулей и единиц ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n f\mu(E_n)$ сходится, т. е. последовательность $\{x_n = \sum_{n=1}^{n} \eta_i \mu(E_i)\}$ слабо фундаментальна. Так как X — пространство слабо секвенциально полное, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \mu(E_n)$ слабо сходится. Этим самым мы доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ слабо совершенно сходится. Из теоремы 1.1 теперь следует, что $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ в сильной топологии пространства X. А это и означает, что μ есть векторная мера.

3. Исчерпывание векторной меры

Пусть X — ЛТП. Будем говорить, что пространство X обладает свойством (Σ), если справедливо следующее утверждение:

(Σ) Если φ — такая функция, определенная на некотором множестве T, со значениями в X, что

I. $\varphi(t) \neq 0$ для каждого $t \in T$;

II. для каждой простой последовательности $\{t_n\}$ элементов множества T ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ сходится,

то множество T — по крайней мере счетное.

Значение свойства (Σ) с точки зрения теории векторной меры станет ясным из теорем настоящего раздела.

Примечание 1. Определение свойства (Σ), а также результаты этого раздела можно понимать в более общем смысле. Во всем разделе линейное топологическое пространство X может быть заменено произвольной топологической $\mathscr{L}$-группой. Под топологической $\mathscr{L}$-группой понимается коммутативная группа (записанная аддитивно), причем относительно всякой последовательности ее элементов определено, имеет она предел или нет. Далее, эта сходимость в топологической $\mathscr{L}$-группе удовлетворяет двум аксиомам Фреше, а именно, что стационарная последовательность $\{a_n = a\}$ имеет пределом элемент a и что произвольная последовательность, выбранная из сходящейся последовательности, имеет пределом один и тот же элемент, что и первоначальная последовательность. Кроме того, в топологической $\mathscr{L}$-группе сходимость и групповая операция связаны таким образом, что для произвольных двух сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с пределами соответственно a и b последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n - b_n\}$ тоже сходятся и имеют пределом соответственно элементы $a + b$ и $a - b$. Ясно, как определяется ряд элементов топологической $\mathscr{L}$-группы и его сходимость, а также, как определяется мера на кольце $\boldsymbol{R}$ со значениями в некоторой топологической $\mathscr{L}$-группе. Теоремы настоящего раздела сохраняют силу и для мер такого рода.

Примечание 2. Всякое метризуемое ЛТП обладает свойством (Σ).

Доказательство. Пусть X — метризуемое ЛТП. Пространство X метризуемо только тогда, когда оно удовлетворяет 1 аксиоме счетности Хаусдорфа, т. е. когда существует последовательность $\{V_n\}$ окрестностей нулевого элемента пространства X, члены которой образуют полную систему окрестностей элемента 0. Пусть T — произвольное несчетное множество и пусть φ — такая функция на T со значениями в X, что $\varphi(t) \neq 0$ для каждого $t \in T$. Покажем, что φ не может обладать свойством II. Поскольку $\{V_n\}$ — полная система окрестностей 0, то для каждого $t \in T$ существует натуральное число n_t такое, что $\varphi(t) \notin V_{n_t}$, т. е. $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, где $T_n = \{t : \varphi(t) \notin V_n\}$. Это означает, что существует хотя бы одно натуральное число n_0 такое, что множество T_{n_0} бесконечно. Выберем простую последовательность $\{t_k\}$ элементов из T_{n_0}. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)$ не может быть сходящимся, так как не выполняется $\lim_k \varphi(t_k) = 0$. Дело в том, что $\varphi(t_k) \notin V_{n_0}$ для $k = 1, 2, \ldots$ Значит, φ не обладает свойством II. Отсюда ясно, что X обладает свойством (Σ).

Примечание 3. Класс пространств со свойством (Σ) — шире, чем класс метризуемых линейных топологических пространств. В следующем примере построим неметризуемое пространство со свойством (Σ).

Пример 1. Пусть P — произвольное несчетное множество. Пространством X пусть будет множество всех вещественных функций x, определенных на T с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число. Топологию в X определяем при помощи базы окрестностей нуля. Каждая окрестность нулевого элемента $V(\tau, \varepsilon)$ принадлежащая этой базе задана таким способом, что задано конечное или счетное множество τ, $\tau \subset P$, и число $\varepsilon > 0$, причем окрестность $V(\tau, \varepsilon)$ состоит из всех точек $y \in X$ таких, что $|y(s)| < \varepsilon$ для $s \in \tau$.

Докажем, что пространство X неметризуемо. Для этого покажем, что пространство X не удовлетворяет 1 аксиоме счетности. Пусть $\{V(\tau_n, \varepsilon_n)\}$ — произвольная счетная система окрестностей нулевого элемента. Построим окрестность $V(\tau, \varepsilon)$ нуля так, чтобы ни для какого натурального n не было $V(\tau_n, \varepsilon_n) \subset V(\tau, \varepsilon)$. Положим $\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$ и выберем точку $t_0 \in T$, $t_0 \notin \sigma$. Такая точка t_0 существует, так как P — несчетное множество, а σ — по крайней мере счетное множество. Положим $\tau = \{t_0\}$. Очевидно, ни для какого n не будет $V(\tau_n, \varepsilon_n) \subset V(\tau, \varepsilon)$.

Докажем, что пространство X обладает свойством (Σ).

Пусть T — любое несчетное множество и пусть $x_t \in X$, $x_t \neq 0$, для каждого $t \in T$. Обозначим через T_k множество тех $t \in T$, для которых существует по крайней мере одна такая точка $s \in P$, что $|x_t(s)| \geqq 1/k$. В силу того, что $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, по крайней мере одно из множеств T_k, $k = 1, 2, \ldots$, неконечное. Пусть это множество T_{k_0}. Выберем произвольно простую последовательность $\{t_n\}$ элементов множества T_{k_0}. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{t_n}$ не сходится в пространстве X. Выберем для каждого $n = 1, 2, \ldots$ точку $s_n \in P$ так, чтобы $|x_{t_n}(s_n)| \geqq 1/k_0$ и обозначим $\tau = \{s_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Теперь ясно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{t_n}$ не может сходиться, потому что $x_{t_n} \notin V(\tau, 1/k_0)$ для $n = 1, 2, \ldots$ и следовательно не имеет место $\lim_n x_{t_n} = 0$.

Теперь приведем теорему об исчерпывании векторной меры.

Теорема 3.1. *Пусть X — ЛТП со свойством (Σ). Пусть μ — векторная мера на σ-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств множества P со значениями в X.*

Тогда существует такое множество $Q \in \mathbf{S}$, что для всякого множества $E \in \mathbf{S}$ будет $\mu(E - Q) = 0$. Значит, $\mu(F) = 0$ для $F \in \mathbf{S}$, $F \cap Q = \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим системы множеств $\mathbf{T} \subset \mathbf{S}$ с такими свойствами:

а) $E \cap F = \emptyset$ для $E, F \in \mathbf{T}$; $E \neq F$,

б) $\mu(E) \neq 0$ для $E \in \mathbf{T}$.

Множество $\mathscr{T}$ всех этих систем — частично упорядоченное при помощи соотношения включения множеств. Если $\{\mathbf{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — цепь в этом множестве (линейно упорядоченное подмножество), то и система $\sup_{\alpha \in A} \mathbf{T}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \mathbf{T}_\alpha$ принадлежит $\mathscr{T}$. Поэтому по лемме Цорна существует в множестве $\mathscr{T}$ хотя бы одна максимальная система $\mathbf{T}_0$.

Система $\mathbf{T}_0$ по крайней мере счетна. Это следует из того, что X обладает свойством (Σ). Дело в том, что для каждой простой последовательности $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{T}_0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ сходится, так как эти множества согласно а) не пересекаются и $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{S}$.

Положим $Q = \bigcup_{E \in \mathbf{T}_0} E$. Очевидно, $Q \in \mathbf{S}$. Для произвольного множества $F \in \mathbf{S}$, $F \cap Q = \emptyset$ будет $\mu(F) = 0$. Дело в том, что если бы существовало такое множество $F_0 \in \mathbf{S}$, что $F_0 \cap Q = \emptyset$ и $\mu(F_0) \neq 0$, то система $\mathbf{T}_0$ не была бы максимальной. Тогда имело бы место $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{T}_0 \cup \{F_0\} \in \mathscr{T}$ и $\mathbf{T}_0 \neq \mathbf{T}_0 \cup \{F_0\}$.

Этим и завершается доказательство теоремы.

Обращением в некотором смысле теоремы 3.1 является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть X — ЛВП, не обладающее свойством (Σ).*

Существуют множество P, σ-кольцо $\mathbf{S}$ подмножеств множества P и такая векторная мера μ на $\mathbf{S}$ со значениями в X, что для всякого множества $Q \in \mathbf{S}$ существует множество $E \in \mathbf{S}$, для которого $\mu(E - Q) \neq 0$.

Доказательство. Так как пространство X не обладает свойством (Σ), то существует несчетное множество P и функция φ, определенная на P со значениями в X такие, что $\varphi(t) \neq 0$ для $t \in P$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ сходится для произвольной простой последовательности $\{t_n\}$ элементов множества P.

Определим $\mathbf{S}$ как систему всех конечных и счетных подмножеств множества P (включая пустое множество). Очевидно, $\mathbf{S}$ есть σ-кольцо.

Пусть $E \in \mathbf{S}$. Если упорядочить произвольным образом элементы множества E в последовательность $\{t_n\}$ (возможно, конечную), то существует сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$. Согласно [1], стр. 59 существует элемент $x_E \in X$ такой, что справедливо: Для каждой окрестности V элемента нуль можно найти конечное подмножество τ_V множества E такое, что для произвольного множества τ, $\tau_V \subset \tau \subset E$, будет

$$x_E - \sum_{t \in \tau} \varphi(t) \in V.$$

Положим теперь $\mu(E) = x_E$ для каждого $E \in \mathbf{S}$ ($\mu(\emptyset) = 0$).

Покажем, что μ есть векторная мера.

Пусть $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{S}$. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Нужно доказать, что $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Докажем следующее: Для каждой окрестности V нулевого элемента существует конечное множество π_V натуральных чисел такое, что для всякого конечного множества π натуральных чисел, $\pi \supset \pi_V$, будет

$$\sum_{n \in \pi} \mu(E_n) - \mu(E) \in V.$$

Выберем окрестность V нулевого элемента. Поскольку X – локально выпуклое пространство, можно предполагать, что окрестность V — выпуклая, и, значит, $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$. Согласно определению значения $\mu(E)$ существует такое конечное множество F, $F \subset E$, что

$$\mu(E_n) - \sum_{t \in G} \varphi(t) \in \frac{1}{2} V$$

для произвольного конечного множества G, $F \subset G \subset E$.

Положим $\pi_V = \{n : E_n \cap F \neq \emptyset\}$. Пусть π — произвольное конечное множество натуральных чисел, $\pi \supset \pi_V$. Пусть k будет числом элементов множества π.

Пусть для каждого $n \in \pi$ будет F_n таким конечным подмножеством множества E_n, что

$$\mu(E_n) - \sum_{t \in G_n} \varphi(t) \in \frac{1}{2k} V$$

для произвольного конечного множества G_n, $F_n \subset G_n \subset E_n$. Положим теперь $G_n = F_n \cup (F \cap E_n)$ и $G = \bigcup_{n \in \pi} G_n$. Тогда

$$\sum_{n \in \pi} \mu(E_n) - \mu(E) = \sum_{n \in \pi} [\mu(E_n) - \sum_{t \in G_n} \varphi(t)] + \sum_{t \in G} \varphi(t) - \mu(E) \in \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V \subset V.$$

Этим самым мы доказали, что μ есть векторная мера.

Ясно, что для произвольного множества $Q \in \mathbf{S}$ существует точка $t \in P$, $t \notin Q$. Если положить $E = \{t\}$, то $E \in \mathbf{S}$, $\mu(E - Q) = \mu(E) = \varphi(t) \neq 0$.

Теорема доказана.

Примечание 4. Теорема об исчерпывании векторной меры, значения которой принадлежат линейному метрическому пространству, может быть доказана без использовании леммы Цорна. Поскольку в дальнейшем этой леммой будем пользоваться только для нормированных пространств, проведем такое доказательство.

Пусть μ — векторная мера, определенная на σ-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств множества P. Пусть значения векторной меры μ принадлежат линейному метрическому пространству X (не обязательно локально выпуклому). Построим такое множество $Q \in \mathbf{S}$, что для произвольного множества $E \in \mathbf{S}$ будет $\mu(E - Q) = 0$.

Для произвольного множества $E \in \mathbf{S}$ положим

$$\zeta(E) = \sup \{\varrho(\mu(F), 0) : F \in \mathbf{S},\ F \cap E = \emptyset\}.$$

Очевидно, $0 \leqq \zeta(E) \leqq \infty$ для $E \in \mathbf{S}$. Далее, очевидно, что $\zeta(E) \leqq \zeta(F)$, если $F \subset E$. Обозначим

$$\alpha = \inf \{\zeta(E) : E \in \mathbf{S}\}.$$

Снова ясно, что $0 \leqq \alpha \leqq \infty$.

Докажем, что $\alpha = 0$. Допустим, что $\alpha \neq 0$. Значит, $\alpha > 0$. Если $E_1 \in \mathbf{S}$ — произвольное множество, то $\zeta(E_1) \geqq \alpha$. Значит, существует такое множество $E_2 \in \mathbf{S}$, что $E_2 \cap E_1 = \emptyset$ и $\varrho(\mu(E_2), 0) > \frac{1}{2}\alpha$ (если $\alpha = \infty$, вместо $\frac{1}{2}\alpha$ пишем 1). Далее, определим множества E_3, E_4, ... по индукции следующим образом: Пусть уже заданы множества $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Поскольку $\zeta(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \geqq \alpha$, существует множество E_{n+1} такое, что $E_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \emptyset$ и $\varrho(\mu(E_{n+1}), 0) > \frac{1}{2}\alpha$. Этим задана последовательность $\{E_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathbf{S}$. Поскольку $\mathbf{S}$

есть σ-кольцо, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{S}$. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ сходится (его сумма равна $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$). Но это противоречие, так как не равно $\lim \mu(E_n) = 0$, поскольку $\varrho(\mu(E_n), 0) > \frac{1}{2}\alpha > 0$ для $0 = 2, 3, \ldots$. Следовательно, это означает, что $\alpha = 0$.

Значит, для каждого натурального числа n существует множество $F_n \in \mathbf{S}$, для которого $\zeta(F_n) < n^{-1}$. Положим $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, $Q \in \mathbf{S}$. Поскольку $F_n \subset Q$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $\zeta(Q) \leqq \zeta(F_n) < n^{-1}$ для $n = 1, 2, \ldots$, следовательно, $\zeta(Q) = 0$. Теперь видно, что Q — искомое множество, так как для произвольного множества $E \in \mathbf{S}$ имеем $(E - Q) \cap Q = \emptyset$ и поэтому $\mu(E - Q) = 0$.

Пусть μ — векторная мера, определенная на σ-кольце $\mathbf{S}$ со значениями в ЛТП X. Множество $E \in \mathbf{S}$ называется μ-нулевым, если для каждого множества $F \subset E$, $F \in \mathbf{S}$, имеем $\mu(F) = 0$. Далее, множества E, F называются μ-эквивалентными, если множество $E \triangle F$ — μ-нулевое.

Атомом векторной меры μ называется система всех множеств $F \in \mathbf{S}$, μ-эквивалентных множеству $E \in \mathbf{S}$, обладающему следующими свойствами

1. $\mu(E) \neq 0$;
2. Для каждого множества $G \subset E$, $G \in \mathbf{S}$, справедливо либо $\mu(G) = \mu(E)$ либо $\mu(G) = 0$.

Атом, в который входит множество E, обозначим также через E, так как это не может привести к недоразумениям.

Теорема 3.3. *Пусть μ — векторная мера на σ-кольце $\mathbf{S}$ со значениями в* ЛТП X *со свойством* (Σ).

Система всех атомов меры μ по крайней мере счетна.

Доказательство сразу же вытекает из свойства (Σ) пространства X и из того факта, что для произвольной последовательности $\{E_n\}$ взаимно различных атомов меры μ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ сходится [его сумма равна $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$].

Примечание 5. Если пространство X, которому принадлежат значения векторной меры μ, не обладает свойством (Σ), то мера μ может иметь несчетное число атомов. Пример такой меры построен в доказательстве теоремы 3.2.

4. Расширение векторной меры

В настоящем разделе займемся вопросами расширения векторной меры из кольца на наименьшее σ-кольцо над этим кольцом.

Примечание 1. Пусть μ — векторная мера на кольце $\mathbf{R}$ со значениями в ЛТП X. На наименьшем σ-кольце $\mathbf{S}$ над кольцом $\mathbf{R}$ существует не более одной векторной меры $\bar{\mu}$ со значениями в X, совпадающей с μ на $\mathbf{R}$.

Это утверждение доказывается таким же способом, как для неотрицательных мер в [3]. Если μ_1, μ_2 — две векторных меры на $\mathbf{S}$ и $\mu_1(E) = \mu(E) = \mu_2(E)$ для $E \in \mathbf{R}$, то обозначим через $\mathbf{M}$ систему тех множеств $F \in \mathbf{S}$, для которых $\mu_1(F) = \mu_2(F)$. Очевидно, $\mathbf{R} \subset \mathbf{M}$. Из непрерывности мер μ_1 и μ_2 следует, что $\mathbf{M}$ содержит предел произвольной монотонной последовательности множеств из $\mathbf{M}$. Отсюда согласно [3], Теорема 2, § 6, вытекает, что $\mathbf{M} = \mathbf{S}$.

Теперь приведем следующие утверждения, доказанные в [4] (смотри также 5, стр. 321).

Пусть μ — векторная мера, определенная на σ-алгебре $\mathbf{S}$ подмножеств множества P со значениями в банаховом пространстве X.

1. *Существует такая конечная неотрицательная мера ν на $\mathbf{S}$, что $\lim\limits_{\nu(E)\to 0} \mu(E) = 0$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\| \mu(E) \| < \varepsilon$, если $\nu(E) < \delta$.*

2. *Множество $\{\mu(E) : E \in \mathbf{S}\}$ значений векторной меры μ слабо относительно компактно в X.*

Примечание 2. Из теоремы 3.1 об исчерпывании векторной меры или из примечания 4 раздела 3 вытекает, что в приводимых утверждениях за область определения векторной меры μ можно приныть не только σ-алгебру, но и σ-кольцо.

Теорема 4.1. *Пусть μ — векторная мера, определенная на кольце $\mathbf{R}$ со значениями в банаховом пространстве X. Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ — наименьшее σ-кольцо над $\mathbf{R}$. На σ-кольце $\mathbf{S}$ существует такая векторная мера $\bar{\mu}$, что $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ для $E \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих утверждений (и следовательно, оба):*

(A) *Существует такая ограниченная неотрицательная мера ν на $\mathbf{R}$, что $\lim\limits_{\nu(E)\to 0} \mu(E) = 0$.*

(B) *Множество $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ значений меры μ слабо относительно компактно в X.*

Доказательство. Оба утверждения (A) и (B) являются необходимыми условиями для возможности расширения меры μ на $\mathbf{S}$ согласно примечанию 2. Доказательство достаточности условия (A) проводится так же, как доказательство теоремы на стр. 187 в [6], где это доказательство выполнено для случая, когда $\mathbf{R}$ — алгебра.

Докажем еще, что (B) есть достаточное условие для существования меры $\bar{\mu}$ с требуемым свойством.

Поскольку множество $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ слабо компактно в X, для каждого $f \in X^*$ множество $\{f\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ ограничено, а это означает, что обобщенная мера $f\mu$ имеет ограниченную вариацию. Следовательно, $f\mu$ можно для каждого $f \in X^*$ расширить на σ-кольцо $\mathbf{S}$. Обозначим это расширение через $\overline{f\mu}$.

Обозначим теперь через $\mathbf{M}$ систему всех множеств $E \in \mathbf{S}$ с таким свойством, что найдется такой элемент x_E из слабого замыкания множества $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$, для которого $f(x_E) = \overline{f\mu}(E)$ для каждого $f \in X^*$. Очевидно, $\mathbf{R} \subset \mathbf{M}$. Докажем,

что $\mathbf{M}$ — монотонная система, т. е. она содержит предел всякой монотонной последовательности множеств из $\mathbf{M}$. Пусть $\{E_n\}$ — монотонная последовательность, $E_n \in \mathbf{M}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\overline{f\mu}$ — обобщенная мера, последовательность $\{\overline{f\mu}(E_n)\}$ сходится для каждого $f \in X^*$. Но это означает, что сходится последовательность $\{f(x_{E_n})\}$ для каждого $f \in X^*$, т. е. $\{x_n\}$ есть слабо фундаментальная последовательность. Так как слабое замыкание множества $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ слабо компактно, то найдется такой элемент y из этого замыкания, что $f(y) = \lim\limits_n f(x_{E_n})$ для каждого $f \in X^*$ (смотри [1], стр. 52). Но если положить $E = \lim\limits_n E_n$, то видно, что $y = x_E$. Это означает, что $E \in \mathbf{M}$.

Из доказанного согласно [3] следует, что $\mathbf{M} = \mathbf{S}$. Положим $\bar{\mu}(E) = x_E$ для каждого $E \in \mathbf{S}$. Функция $\bar{\mu}$ обладает тем свойством, что для каждого $f \in X^*$ равно $f\bar{\mu} = \overline{f\mu}$, что означает, что $f\bar{\mu}$ есть обобщенная мера. Поскольку $\mathbf{S}$ есть σ-кольцо, то из теоремы 2.2 следует, что $\bar{\mu}$ есть векторная мера. Очевидно, она есть расширением меры μ.

Пусть μ — векторная мера на кольце $\mathbf{R}$ со значениями в ЛВП X. Пусть $\mathscr{N}$ — произвольная достаточная система псевдонорм для пространства X. Будем говорить, что векторная мера обладает свойством (A), если справедливо утверждение:

(A) *Для каждой псевдонормы $p \in \mathscr{N}$ существует ограниченная неотрицательная мера ν_p на $\mathbf{R}$ со свойством: Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $p(\mu(E)) < \varepsilon$ для каждого множества $E \in \mathbf{R}$, для которого $\nu_p(E) < \delta$.*

Теорема 4.2. *Пусть X — секвенциально полное* ЛВП. *Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо множеств. Пусть μ — векторная мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X. Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ — наименьшее σ-кольцо над кольцом $\mathbf{R}$.*

На σ-кольце $\mathbf{S}$ существует векторная мера $\bar{\mu}$ со значениями в X, для которой $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ для $E \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда μ обладает свойством (A).

Доказательство. 1. Пусть векторная мера μ обладает свойством (A). Пусть $p \in \mathscr{N}$. Определим нормированное пространство X_p следующим образом. Для $x, y \in X$ положим $x = y \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда $p(x - y) = 0$. Таким образом, пространство X распадается на непересекающиеся классы элементов взаимно эквивалентных в смысле этой эквивалентности. Множество таких классов обозначим через X'_p. Класс, содержащий элемент x, обозначим через x^p. Если положить $\| x^p \|_p = p(x)$ для произвольного $x \in X$, то функция $\| \|_p$ — норма в множестве X'_p. Пусть X_p — пополнение пространства X'_p в смысле этой нормы.

Рассмотрим теперь векторную меру μ^p, определенную на $\mathbf{R}$ при помощи равенства $\mu^p(E) = (\mu(E))^p$. Согласно условию существует неотрицательная ограниченная мера ν_p такая, что выполняется: Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\| \mu^p(E) \|_p < \varepsilon$, если $\nu_p(E) < \delta$. Значит, по теореме 4.1 μ^p можно однозначно расширить на $\mathbf{S}$. Обозначим это расширение через $\bar{\mu}^p$.

Из определения функций $\bar{\mu}^p$, $p \in \mathcal{N}$ ясно:

1. Для каждого множества $E \in \mathbf{R}$ будет $\bar{\mu}^p(E) = \mu^p(E) = (\mu(E))^p$.
2. Для каждого множества $E \in \mathbf{R}$ пересечение классов $\bigcap_{p \in \mathcal{N}} \bar{\mu}^p(E) = \bigcap_{p \in \mathcal{N}} (\mu(E))^p$ содержит один и только один элемент из X, а именно, $\mu(E)$. Это второе свойство вытекает из того, что $\mathcal{N}$ есть достаточная система псевдонорм для пространства Хаусдорфа X.

Обозначим теперь через $\boldsymbol{M}$ систему тех множеств $E \in \mathbf{S}$, для которых имеет место:

1. $\bar{\mu}^p(E) \in X_p'$ для каждого $p \in \mathcal{N}$.
2. Пересечение классов $\bigcap_{p \in N} \bar{\mu}^p(E)$ содержит единственный элемент из X.

Согласно сказанному, $\mathbf{R} \subset \boldsymbol{M}$.

Покажем теперь: Если $\{E_n\}$ — монотонная последовательность множеств из $\boldsymbol{M}$, то и $E = \lim_n E_n$ принадлежит $\boldsymbol{M}$. Отсюда будет следовать, что $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}$ ([3], теорема 2, § 6).

Итак, пусть $\{E_n\}$ будет такой монотонной последовательностью множеств из $\boldsymbol{M}$. Пусть x_n — элемент из X, принадлежащий $\bigcap_{p \in N} \bar{\mu}^p(E_n)$. Покажем, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность.

Выберем в X окрестность V нулевого элемента. Так как $\mathcal{N}$ — достаточная система псевдонорм, то существуют $p \in N$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : p(x) < \varepsilon\} \subset V$. Поскольку $\bar{\mu}^p$ — векторная мера на $\mathbf{S}$ со значениями в X_p, последовательность $\{\bar{\mu}^p(E_n)\}$ сходится (ее предел равен $\bar{\mu}^p(E)$, где $E = \lim_n E_n$). Это означает, что найдется такое число n_V, что для $n, m > n_V$ будет $\| \bar{\mu}^p(E_n) - \bar{\mu}^p(E_m) \|_p < \varepsilon$. Но $x_n \in \bar{\mu}^p(E_n)$ и $x_m \in \bar{\mu}^p(E_m)$, поэтому $p(x_n - x_m) < \varepsilon$, т. е. $x_n - x_m \in V$. Так как X — секвенциально полное пространство, то существует $x = \lim_n x_n$. Но из $\lim_n \| x_n^p - x^p \|_p = \lim_n \| \bar{\mu}^p(E) - x^p \|_p = 0$ вытекает, что $\bar{\mu}^p(E) = x^p$ (смотри примечание 1), или же $\bar{\mu}^p(E) \in X_p'$, а также, что x есть единственный элемент пространства X такой, что $x \in \bar{\mu}^p(E)$ для каждого $p \in \mathcal{N}$.

Итак, мы доказали, ~~что~~ $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}$.

Обозначим элемент $x \in X$, принадлежащий $\bigcap_{p \in N} \bar{\mu}^p(E)$, через $\bar{\mu}(E)$. Этим определена некоторая функция $\bar{\mu}$ на $\mathbf{S}$. Покажем, что эта функция есть векторная мера.

Пусть $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{S}$. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Покажем, что $\bar{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$.

Выберем окрестность V нулевого элемента. Существуют $p \in \mathcal{N}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : p(x) < \varepsilon\} \subset V$. Поскольку $\bar{\mu}^p = \bar{\mu}^p$ — векторная мера, то существует такое n_V, что для $n > n_V$ будет $\| \bar{\mu}^p(E) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}^p(E_i) \|_p < \varepsilon$, т. е. $p(\bar{\mu}(E) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(E_i)) < \varepsilon$, что означает $\bar{\mu}(E) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(E_i) \in V$.

Значит, $\bar{\mu}$ есть векторная мера на $\mathbf{S}$. Очевидно, $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ для $E \in \mathbf{R}$.

II. Пусть векторную меру μ можно расширить из кольца $\mathbf{R}$ на σ-кольцо $\mathbf{S}$. Обозначим это расширение через $\bar{\mu}$. Определим для каждого $p \in \mathcal{N}$ пространства X_p' и векторные меры $\bar{\mu}^p$ так же, как и в части I настоящего доказательства. По теореме 4.1 существует неотрицательная ограниченная мера v_p на $\mathbf{S}$ со свойством: Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $p(\bar{\mu}(E)) = \| \bar{\mu}^p(E) \|_p < \varepsilon$, если $v_p(E) < \delta$. Это справедливо для каждого $p \in \mathcal{N}$, а это означает, что мера $\bar{\mu}$, а значит, и мера μ, обладает свойством (A).

Теорема полностью доказана.

5. Дальнейшие замечания по расширению векторной меры

В этом разделе займемся еще вопросами о расширении векторной меры из кольца на σ-кольцо. Нас будут интересовать прежде всего более простые достаточные условия для того, чтобы векторная мера обладала свойством (A), и, значит, чтобы имелась возможность расширения ее из кольца на σ-кольцо, порожденное этим кольцом.

Сначала рассмотрим интересный вопрос, обладает ли всякая векторная мера свойством (A). О том, что это не так, убеждает нас простой пример меры, значения которой суть вещественные числа, приведенный в [6], стр. 188.

Теорема 5.1. *Пусть X — слабо секвенциально полное* ЛВП. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— кольцо множеств. Пусть μ — векторная мера на* $\mathbf{R}$ *со значениями в X. Пусть* $\mathbf{S}$ *— наименьшее σ-кольцо над* $\mathbf{R}$.

На $\mathbf{S}$ *существует векторная мера $\bar{\mu}$, совпадающая с μ на* $\mathbf{R}$, *тогда и только тогда, когда для каждого $f \in X^*$ обобщенная мера $f\mu$ имеет ограниченную вариацию.*

Доказательство. I. Пусть для каждого $f \in X^*$ вариация обобщенной меры $f\mu$ ограничена. Следовательно, обобщенную меру $f\mu$ можно расширить на σ-кольцо $\mathbf{S}$. Обозначим это расширение через $\overline{f\mu}$ (по примечанию 1 в начале раздела 4 такое расширение единственно). Для каждого множества $E \in \mathbf{S}$ обозначим через Φ_E функцию, определенную на X^* с помощью равенства $\Phi_E(f) = \overline{f\mu}(E)$ для каждого $f \in X^*$.

Покажем, что для каждого множества $E \in \mathbf{S}$ существует такой элемент $x_E \in X$, что $\Phi_E(f) = f(x_E)$ для каждого $f \in X^*$.

Обозначим через $\boldsymbol{M}$ систему тех множеств $E \in \mathbf{S}$, для которых такой элемент x_E существует. Очевидно, $\mathbf{R} \subset \boldsymbol{M}$, так как для $E \in \mathbf{R}$ имеем $x_E = \mu(E)$. Пусть $\{E_n\}$ — монотонная последовательность множеств из $\boldsymbol{M}$. Пусть $E = \lim_n E_n$. Последовательность, n-ый член которой равен $f(x_{E_n}) = \Phi_{E_n}(f) = \overline{f\mu}(E_n)$, сходится для каждого $f \in X^*$ и ее предел равен $\overline{f\mu}(E)$. Так как X — слабо секвенциально полное пространство, то отсюда следует существование такого элемента

$x \in X$, что $\lim_n f(x_{E_n}) = f(x)$ для каждого $f \in X^*$. Но $\lim_n f(x_{E_n}) = \lim_n \overline{f\mu}(E_n) = \overline{f\mu}(E) = \Phi_E(f)$ для каждого $f \in X^*$, т. е. $\Phi_E(f) = f(x)$ для каджого $f \in X^*$ Это означает, что $x = x_E$, значит, $E \in \boldsymbol{M}$. Отсюда по цитированной теореме из [3] следует, что $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}$.

Обозначим $\bar{\mu}(E) = x_E$ для каждоно $E \in \boldsymbol{S}$. Для каждого $f \in X^*$ будет $f\bar{\mu} = \overline{f\mu}$, т. е. для каждого $f \in X^*$ будет $f\bar{\mu}$ — обобщенная мера. По теореме 2.2 это означает, что $\bar{\mu}$ — векторная мера. Очевидно, $\bar{\mu}$ есть расширение векторной меры μ.

II. Пусть векторную меру μ можно расширить на σ-кольцо $\boldsymbol{S}$. Для каждого $f \in X^*$ обобщенная мера $f\bar{\mu}$ имеет ограниченную вариацию на $\boldsymbol{S}$. Притом $\bar{\mu}$ означает расширение векторной меры μ на σ-кольце $\boldsymbol{S}$. Так как обобщенная мера $f\bar{\mu}$ совпадает с обобщенной мерой $f\mu$ на кольце $\boldsymbol{R}$, то вариация обобщенной меры $f\mu$ не больше вариации меры $f\bar{\mu}$. Отсюда следует, что вариация обобщенной меры $f\mu$ на кольце $\boldsymbol{R}$ тоже ограничена.

Для векторных мер со значениями из банаховых пространств можно из приведенной теоремы вывести более простой критерий.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{R}$ — кольцо множеств и пусть X — слабо секвенциально полное нормированное пространство. Пусть μ — векторная мера на $\boldsymbol{R}$ со значениями в X. Пусть существует такая константа k, что*

$$\sup\{\| \mu(E) \| : E \in \boldsymbol{R}\} \leqq k.$$

Тогда векторную меру μ можно расширить на наименьшее σ-кольцо над кольцом $\boldsymbol{R}$.

Доказательство. По теореме 5.1 достаточно доказать, что для каждой функции $f \in X^*$ обобщенная мера $f\mu$ имеет ограниченную вариацию. Но для случая, когда ν — обобщенная мера на $\boldsymbol{R}$, принимающая только вещественные значения, легко установить справедливость неравенства

$$|\nu|(E) \leqq 2 \sup\{|\nu(F)| : F \subset E,\ F \in \boldsymbol{R}\}.$$

Если ν принимает и мнимые значения, то справедливо

$$|\nu|(E) \leqq 4 \sup\{|\nu(F)| : F \in \boldsymbol{R},\ F \subset E\}$$

для каждого $E \in \boldsymbol{R}$. Отсюда получаем, что для каждого множества $E \in \boldsymbol{R}$ и каждой функции $f \in X^*$

$$|f\mu|(E) \leqq 4 \sup\{|f\mu(F)| : F \subset E,\ F \in \boldsymbol{R}\} \leqq 4 \|f\| k.$$

Другими словами, для каждого $f \in X^*$ вариация обобщенной меры $f\mu$ ограничена.

Приведенное следствие касается довольно широкого класса банаховых пространств, так как все рефлексивные пространства являются слабо полными.

Заметим еще, что в теореме 5.1 нельзя выпустить условие, чтобы пространство X было слабо секвенциально полным. В [6] (стр. 190) построена векторная мера μ со значениями в банаховом пространстве X, не обладающая свойством (A), и для каждого $f \in X^*$ вариация обобщенной меры $f\mu$ ограничена. Но пространство X — не слабо полное.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Day M. M., *Normed Linear Spaces*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1958.

[2] Pettis B. J., *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 277—304.

[3] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (по-русски П. Халмош, *Теория меры*, Москва 1955).

[4] Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J. T., *Weak compactness and vector measures*, Canadian J. Math. 7 (1955), 289—305.

[5] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear Operators* I, New York 1958.

[6] Kluvánek I., *O vektorovej miere*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 7 (1957), 186—192.

Поступило 30. 11. 1960 г.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF VECTOR MEASURES

Igor Kluvánek

Summary

Let P be an abstract and let $\boldsymbol{R}$ be a ring of subsets of P (see [3]). Let X be a linear topological space. A vector measure on $\boldsymbol{R}$ with values in X is a function μ defined on $\boldsymbol{R}$ with values in X and such that for every sequence $\{E_n\}$ of disjoint sets of $\boldsymbol{R}$ with the union $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ belonging to $\boldsymbol{R}$, the relation $\lim_i (\mu(E) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E)) = 0$ is true in the topology of X.

In this paper some theorems on exhaustion and extension of vector measure are proved.

A linear topological space X is defined to have the property (Σ) if the domain T of every such function φ with values in X, that for every one-to-one sequence $\{t_n\}$ of elements of T the series $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ converges, is at most countable.

For every vector measure μ with values in a space X with the property (Σ) defined on a σ-ring $\boldsymbol{S}$ there exists a set $Q \in \boldsymbol{S}$ such that $\mu(E - Q) = 0$ for every $E \in \boldsymbol{S}$. If the space X does not possess the property (Σ), then there exists a set P, a σ-ring $\boldsymbol{S}$ of subsets of P and a vector measure μ on $\boldsymbol{S}$ with values in X such that for every $Q \in \boldsymbol{S}$ there exists $E \in \boldsymbol{S}$ with $\mu(E - Q) \neq 0$.

Let X be a sequentially complete locally convex linear topological space. Let $\mathcal{N}$ be an arbitrary system of pseudonorms defining the topology of X. Let μ be a vector measure on $\boldsymbol{R}$ with values in X and let $\boldsymbol{S}$ be the minimal σ-ring over $\boldsymbol{R}$. There exists a vector measure $\bar{\mu}$ on $\boldsymbol{S}$ which is the extension of μ, if and only if, for every $p \in \mathcal{N}$ there exists a bounded non-negative measure ν_p on $\boldsymbol{R}$ such that $\lim_{\nu_p(E) \to 0} p(\nu_p(E)) = 0$.

Let μ be a vector measure on $\boldsymbol{R}$ with values in a weakly sequentially complete space X. For every linear continuous functional f on X let the variation of the signed (or complex) measure $f\mu$ be bounded. Then there exists a vector measure $\bar{\mu}$ on $\boldsymbol{S}$ which is the extension of μ.