MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 3, 1961

OSKULAČNÍ KVADRIKY KŘIVEK V EKVICENTROAFFINNÍM PROSTORU

ČESTMÍR VITNER, Praha

V článku je studován styk křivky v ekvicentroaffinním prostoru s kvadrikou se středem v počátku prostoru. V každém bodě je jednoznačně stanovena jedna oskulační kvadrika a podle jejího charakteru jsou body křivek roztříděny do sedmi skupin. Dále jest v práci nalezena podmínka pro to, aby křivka ležela na kvadrice se středem v počátku, a podmínky pro to, aby křivka byla součástí base nekuželových kvadrik se středem v počátku.

1. Oskulační kvadriky

Budiž $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\tau)$ analytická křivka s ekvicentroaffinním obloukem τ jako parametrem. Determinant $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']$ je tedy roven 1 a každý bod křivky je tedy také obecný (t. j. $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''] \neq 0$). Pro křivku pak platí, jak známo,

$$\boldsymbol{r}''' = \lambda \boldsymbol{r} + \nu \boldsymbol{r}', \tag{1,1}$$

kde λ, ν jsou ekvicentroaffinní křivosti, které jsou dány vzorci

$$\lambda = [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}'''], \qquad \nu = -[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}'''].$$

Budeme vyšetřovat styk křivky s kvadrikami se středem ve středu prostoru 0. Rovnice kvadriky můžeme psát ve tvaru

$$A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = \varepsilon, \tag{1,2}$$

kde $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ je nějaký symetrický bilineární funkcionál a ε je buď 1 anebo 0. V případě $A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 1$ máme nekuželovou kvadriku. V případě $A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 0$ se omezíme na kužele, tj. bilineární funkcionál A nesmí být singulární (det. $A \neq 0$).

Řekneme, že křivka má v bodě $\tau = \tau_0$ s kvadrikou $A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) - \varepsilon = 0$ *styk řádu n*, jestliže platí

$$A(\boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{r}(\tau)) - \varepsilon = o((\tau - \tau_0)^n), \tag{1,3}$$

kde o je známý symbol malé o.

Nekuželová kvadrika se středem v počátku prostoru se nazývá *oskulační kvadrikou* ke křivce v bodě $\tau = \tau_0$, jestliže má v něm s křivkou styk 5-tého řádu. Tuto *kvadriku* nazveme *hyperoskulační*, má-li s křivkou styk dokonce 6-tého řádu.

Kvadratický *kužel* s vrcholem v počátku nazveme *oskulační* ke křivce v bodě $\tau = \tau_0$, jestliže má s křivkou v tom bodě styk 4-tého řádu. Tento *kužel* nazveme *hyperoskulační*, má-li s křivkou v tomto bodě styk dokonce 5-tého řádu. Nyní platí

Věta 1,1. *V bodě $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ křivky tvoří všechny nekuželové kvadriky, které mají s křivkou styk 4-tého řádu, svazek, který má v kartézské souřadné soustavě, stanovené počátkem prostoru 0 a průvodním ekvicentroaffinním trojhranem $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0'$, $\mathbf{r}_0''$ v bodě $\tau = 0$ křivky, rovnici*

(1,4) $$x^2 - \frac{\lambda'}{3} z^2 - \frac{2\lambda}{3} yz - 1 - a_{22}(-y^2 + \nu z^2 + 2xz) = 0.$$

Důkaz. Z rovnice (1,1) lze v souřadné soustavě $\{o, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''\}$ odvodit pro křivku $\mathbf{r} = x(\tau)\,\mathbf{r}_0 + y(\tau)\,\mathbf{r}_0' + z(\tau)\,\mathbf{r}_0''$ rozvoje:

(1,5)
$$x = 1 + \frac{\lambda}{6}\tau^3 + \frac{\lambda'}{24}\tau^4 + \frac{\lambda'' + \nu\lambda}{120}\tau^5 + \frac{\lambda''' + 3\nu'\lambda + \nu\lambda' + \lambda^2}{720}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$y = \tau + \frac{\nu}{6}\tau^3 + \frac{\lambda + \nu'}{24}\tau^4 + \frac{2\lambda' + \nu''}{120}\tau^5 + \frac{3\lambda'' + \nu''' + 4\nu\nu' + 2\nu\lambda}{720}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$z = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\nu}{24}\tau^4 + \frac{\lambda + 2\nu'}{120}\tau^5 + \frac{3\lambda' + 3\nu'' + \nu^2}{720}\tau^6 + o(\tau^6).$$

Odtud pak snadno nahlédneme, že platí rozvoje

(1,6)
$$x^2 = 1 + \frac{\lambda}{3}\tau^3 + \frac{\lambda'}{12}\tau^4 + \frac{\lambda'' + \nu\lambda}{60}\tau^5 + \frac{\lambda''' + 3\nu'\lambda + \nu\lambda' + 11\lambda^2}{360}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$y^2 = \tau^2 + \frac{\nu}{3}\tau^4 + \frac{\lambda + \nu'}{12}\tau^5 + \frac{6\lambda' + 3\nu'' + 8\nu^2}{180}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$z^2 = \frac{1}{4}\tau^4 + \frac{\nu}{24}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$xy = \tau + \frac{\nu}{6}\tau^3 + \frac{5\lambda + \nu'}{24}\tau^4 + o(\tau^4),$$
$$xz = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\nu}{24}\tau^4 + \frac{11\lambda + 2\nu'}{120}\tau^5 + \frac{18\lambda' + 3\nu'' + \nu^2}{720}\tau^6 + o(\tau^6),$$
$$yz = \frac{1}{2}\tau^3 + \frac{\nu}{8}\tau^5 + \frac{7\lambda + 9\nu'}{240}\tau^6 + o(\tau^6).$$

Všechny nekuželové kvadriky se středem v počátku prostoru mají v souřadné soustavě $\{0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0''\}$ rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 1.$$

Vezměme rozvoje (1,6) až do čtvrtých mocnin parametru τ včetně a dosaďme je do této rovnice. Po úpravě dostaneme

(1,7) $$a_{11} + 2a_{12}\tau + \tau^2(a_{22} + a_{13}) + \tau^3\left(\frac{\lambda}{3}a_{11} + \frac{\nu}{6}a_{12} + a_{23}\right) + \tau^4\left(\frac{\lambda'}{12}a_{11} + \frac{5\lambda + \nu'}{24}a_{12} + \frac{\nu}{3}a_{22} + \frac{\nu}{12}a_{13} + \frac{1}{4}a_{33}\right) + o(\tau^4) = 1.$$

Pro kvadriky, které mají s křivkou styk 4-tého řádu, musí tedy platit

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} + a_{13} = 0, \quad \frac{\lambda}{3}a_{11} + \frac{\nu}{6}a_{12} + a_{23} = 0,$$
$$\frac{\lambda'}{12}a_{11} + \frac{5\lambda + \nu'}{24}a_{12} + \frac{\nu}{3}a_{22} + \frac{\nu}{12}a_{13} + \frac{1}{4}a_{33} = 0.$$

Odtud dostaneme snadno $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{23} = -\lambda/3$, $a_{13} = -a_{22}$, $a_{33} = -\lambda'/3 - \nu a_{22}$, c. b. d.

Zkoumejme nyní, zda ve svazku (1,4) mohou existovat oskulační kvadriky. Dosaďme za tím účelem rozvoje (1,6) do výrazů $x^2 - \lambda'/3z^2 - 2\lambda/3yz - 1$; $-y^2 + \nu z^2 + 2xz$. Po úpravě dostaneme

(1,8) $$x^2 - \frac{\lambda'}{3}z^2 - \frac{2\lambda}{3}yx - 1 = \frac{\lambda'' - 4\lambda\nu}{60}\tau^5 + \frac{\lambda''' - 6\nu'\lambda - 4\lambda'\nu + 4\lambda^2}{360}\tau^6 + o(\tau^6),$$

(1,9) $$-y^2 + \nu z^2 + 2xz = \frac{2\lambda - \nu'}{20}\tau^5 + \frac{2\lambda' - \nu''}{120}\tau^6 + o(\tau^6).$$

Nyní platí

Věta 1,2. *Platí-li v bodě křivky $2\lambda - \nu' \neq 0$, existuje v něm právě jedna nekuželová oskulační kvadrika. Dostaneme ji z (1,4) pro $a_{22} = \dfrac{\lambda'' - 4\lambda\nu}{3(2\lambda - \nu')}$.*

Platí-li $2\lambda - \nu' = 0$, neexistuje v bodě křivky nekuželová oskulační kvadrika právě tehdy, jestliže platí $\lambda'' - 4\lambda\nu \neq 0$.

Všechny kvadriky svazku (1,4) jsou v bodě křivky oskulační právě tehdy, platí-li $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$.

Důkaz. Dosazením (1,8) a (1,9) do svazku (1,4) dostaneme

$$\tau^5\left(\frac{\lambda'' - 4\lambda\nu}{60} - 3a_{22}\frac{2\lambda - \nu'}{60}\right) + o(\tau^5) = 0.$$

Odtud plyne snadno dokazované tvrzení.

Abychom i v případě $2\lambda - \nu' = 0$ dostali jednoznačně stanovenou kvadriku se stykem dostatečně velkého řádu, vezměme vedle nekuželových kvadrik v úvahu také kužele. Platí následující

Věta 1,3. *V každém bodě křivky existuje právě jeden oskulační kvadratický kužel, který má v souřadné soustavě $\{0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0\}$ rovnici*

(1,10) $$-y^2 + \nu z^2 + 2xz = 0.$$

Tento kužel je hyperoskulační právě tehdy, platí-li $2\lambda - \nu' = 0$.

Důkaz. Dosazením rozvojů (1,6) do rovnice $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$ ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) dostaneme v podstatě vzorec (1,7) s tím rozdílem, že na pravé straně v něm je místo jedničky nula. Platí tedy

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = -a_{22},\ a_{23} = 0,\ a_{33} = -\nu a_{22}.$$

Odtud plyne okamžitě rovnice (1,10).

Ze vzorce (1,9) plyne, že v případě $2\lambda - \nu' = 0$ a jenom v tom případě je kužel (1,10) hyperoskulační, c. b. d.

Spojíme-li dosud obdržené výsledky, vidíme, že v každém bodě křivky existuje buď jednoznačně stanovená nekuželová oskulační kvadrika se středem v počátku prostoru, anebo jednoznačně stanovený hyperoskulační kvadratický kužel rovněž se středem v počátku.

Body křivky můžeme rozdělit do sedmi skupin:

1. Do prvé skupiny dáme *kuželový* bod s hyperoskulačním kuželem. Tato skupina je charakterisována vztahem $2\lambda - \nu' = 0$. Dělí se na dvě podskupiny podle toho, zda α) $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$, β) $\lambda'' - 4\lambda\nu \neq 0$.

Charakterisaci zbývajících šesti skupin dostaneme diskusí rovnice oskulační nekuželové kvadriky

(1,11) $$x^2 + \frac{\lambda'' - 4\lambda\nu}{3(2\lambda - \nu')}y^2 - \frac{\lambda'(2\lambda - \nu') + \nu(\lambda'' - 4\lambda\nu)}{3(2\lambda - \nu')}z^2 - \frac{2}{3}\frac{\lambda'' - 4\lambda\nu}{2\lambda - \nu'}xz - \frac{2\lambda}{3}yz = 1.$$

Pro stručnost použijeme označení

(1,12) $$a = 2\lambda - \nu', \qquad b = \lambda'' - 4\lambda\nu.$$

Máme tedy pro oskulační kvadriku rovnici

(1,13) $$x^2 + \frac{b}{3a}y^2 - \frac{\lambda' a + \nu b}{3a}z^2 - \frac{2b}{3a}xz - \frac{2\lambda}{3}yz = 1.$$

Potom platí

(1,14) $$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{a(3 - \lambda') + b(1 - \nu)}{3a},$$

(1,15) $$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -\frac{a^2(\lambda^2 + 3\lambda') + ab(-3 + 3\nu + \lambda') + b^2(1 + \nu)}{9a^2},$$

(1,16) $$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\frac{3a^3\lambda^2 + 3a^2b\lambda' + 3ab^2\nu + b^3}{27a^3}.$$

Ze známé diskuse kvadrik dostaneme pro šest zbývajících skupin bodů křivky podmínky:

2. Skupina „elipsoid“: $A_3 > 0$, $A_1 > 0$, $A_2 > 0$.
3. Skupina „dvoudílný hyperboloid“: $A_3 > 0$; aspoň jeden z výrazů A_1, A_2 je nekladný.
4. Skupina „jednodílný hyperboloid“: $A_3 < 0$.
5. Skupina „eliptický válec“: $A_3 = 0$, $A_2 > 0$.
6. Skupina „hyperbolický válec“: $A_3 = 0$, $A_2 < 0$.
7. Skupina „rovnoběžné roviny“: A_3 má hodnost 1.

Pomocí vzorců (1,12), (1,13), (1,14), (1,15) lze odtud dostat charakterisaci skupin pomocí relací mezi křivostmi a jejich derivacemi. Lze také nahlédnout, že všech sedm případů může skutečně nastat.

Najděme nyní podmínky, za kterých se řád styku oskulační kvadriky resp. hyperoskulačního kužele s křivkou zvýší. Platí

Věta 1,4. *Oskulační kvadratika v nekuželovém bodě (tj. $2\lambda - \nu' \neq 0$) je kvadrikou hyperoskulační právě tehdy, je-li splněna podmínka*

(1,17) $$(2\lambda - \nu')[(\lambda'' - 4\lambda\nu)' + 2\lambda(2\lambda - \nu')] - (\lambda'' - 4\lambda\nu)(2\lambda - \nu')' = 0.$$

Hyperoskulační kužel v kuželovém bodě obou typů má s křivkou styk řádu šestého právě tehdy, je-li splněna podmínka

(1,18) $$(2\lambda - \nu')' = 0.$$

Svazek oskulačních kvadrik v kuželovém bodě s $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$ je tvořen samými kvadrikami hyperoskulačními právě tehdy, jsou-li splněny současně podmínky

(1,19) $$(2\lambda - \nu')' = 0, \qquad (\lambda'' - 4\nu\lambda)' = 0.$$

Důkaz plyne snadno z rovnic (1,4), (1,10), (1,11) a z rozvojů (1,8), (1,9).

2. Křivky na kvadratických plochách

Zabývejme se nyní otázkou, jaké podmínky musí splňovat křivosti křivky, aby křivka ležela na kvadrice se středem v počátku prostoru.

Nejdříve provedeme některé předběžné úvahy. Souřadnice bodu $\boldsymbol{R}$ v souřadném systému $\{0, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''\}$ označme u_0, u_1, u_2, takže platí $\boldsymbol{R} = u_i \, . \, \boldsymbol{r}^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$. Podle známé konvence vynecháváme sumační znamení. Dále platí zřejmě vzorce

(2,1) $$\boldsymbol{r}^{(i)\prime} = B_k^i(\tau)\, \boldsymbol{r}^{(k)},$$

kde

(2,2) $$\begin{array}{lllll} B_0^0 = 0, & B_1^0 = 1, & B_2^0 = 0, & B_0^1 = 0, & B_1^1 = 0, \\ & B_2^1 = 1, & B_0^2 = \lambda, & B_1^2 = \nu, & B_2^2 = 0. \end{array}$$

Hledejme nyní vztah mezi souřadnými systémy $\{0, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{r}_0''\}$ bodě $\tau = 0$ a $\{0, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''\}$ v bodě τ. Zřejmě platí

(2,3) $$\boldsymbol{r}^{(i)} = A_k^i(\tau)\, \boldsymbol{r}_0^{(k)}.$$

Pro stanovení koeficientů A_k^i platí

Pomocná věta 2,1. *Koeficienty $A_k^i(\tau)$ dostaneme jako jednoznačné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic*

(2,4) $$A_k^{i\prime} = B_l^i A_k^l$$

při počátečních podmínkách

(2,5) $$A_k^i(0) = \delta_k^i,$$

kde δ_k^i je Kroneckerovo delta.

Důkaz. Buďte A_k^i definovány rovnicí (2,3). Derivací (2,3) dostaneme $\boldsymbol{r}^{(i)\prime} = A_k^{i\prime}\boldsymbol{r}_0^k$. Odtud pak pomocí (2,1) plyne $B_l^i \boldsymbol{r}^{(l)} = A_k^{i\prime}\boldsymbol{r}_0^{(k)}$ a podle (2,3) je tedy $B_l^i A_k^l \boldsymbol{r}_0^{(k)} = A_k^{i\prime}\boldsymbol{r}_0^{(k)}$. Z této poslední rovnice pak porovnáním koeficientů dostaneme, že pro A_k^i musí platit (2,4). Z rovnice (2,3) také snadno plyne vztah (2,5). Z jednoznačnosti řešení A_k^i soustavy (2,4) při počátečních podmínkách (2,5) plyne potom okamžitě dokazované tvrzení.

Mějme nyní kvadriku se středem v počátku prostoru, která má v souřadné soustavě $\{0, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{r}_0''\}$ se souřadnicemi x_0, x_1, x_2 rovnici $a^{ik}x_i x_k = \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0,1$. V souřadné soustavě $\{0, \boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{r}'(\tau), \boldsymbol{r}''(\tau)\}$ se souřadnicemi u_0, u_1, u_2 má tato kvadrika rovnici

(2,6) $$a^{ij} A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau)\, u_k u_l = \varepsilon.$$

Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z transformačních vzorců $x_i = A_i^k u_k$ pro souřadnice x_i a u_k. Tyto transformační rovnice dostaneme snadno z rovnic (2,3).

Nyní odvodíme pomocné věty, které mají pro další vyšetřování základní význam.

Pomocná věta 2,2. *Nechť ke každému bodu křivky je přiřazena nekuželová kvadrika se středem v počátku prostoru, která má v souřadném systému $\{0, \boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{r}'(\tau), \boldsymbol{r}''(\tau)\}$ se souřadnicemi u_0, u_1, u_2 rovnici*

(2,7) $$b^{kl}(\tau)\, u_k u_l = 1,$$

kde $b^{kl}(\tau)$ jsou analytické funkce. Potom nutná a postačující podmínka k tomu, aby všechny uvažované kvadriky splynuly, je

(2,8) $$B_r^k b^{lr} + B_s^l b^{ks} = (b^{kl})'.$$

Důkaz. Kvadrika $b^{kl}(0)\, x_k x_l = 1$ má v souřadné soustavě $\{0, \boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{r}'(\tau), \boldsymbol{r}''(\tau)\}$ podle (2,6) rovnici

$$b^{ij}(0)\, A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau)\, u_k u_l = 1.$$

Odtud plyne srovnáním s rovnicí (2,7), že nutná a postačující podmínka k tomu, aby kvadriky v bodě τ a v bodě $\tau = 0$ splynuly, jest

(2,9) $$b^{ij}(0)\, A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau) = b^{kl}(\tau).$$

Derivací této rovnice obdržíme

(2,10) $$b^{ij}(0)\, [A_i^{k\prime}(\tau)\, A_j^l(\tau) + A_i^k(\tau)\, A_j^{l\prime}(\tau)] = (b^{kl}(\tau))'.$$

Pomocí (2,4) odtud dostaneme

$$b^{ij}(0)\, [B_r^k(\tau)\, A_i^r(\tau)\, A_j^l(\tau) + A_i^k(\tau)\, B_s^l(\tau)\, A_j^s(\tau)] = (b^{kl}(\tau))'.$$

Odtud pomocí (2,9) dostaneme hledanou podmínku (2,8).

Je-li naopak splněna podmínka (2,8), dostaneme obráceným postupem (2,10) a pak integrací

$$b^{ij}(0)\, A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau) = b^{kl}(\tau) + \text{konst.}$$

Dosazením $A_i^k(0) = \delta_i^k$ dostaneme snadno konst. = 0 a tedy (2,9). Tím je věta dokázána.

Pomocná věta 2,3. *Nechť ke každému bodu τ křivky je přiřazen kužel s vrcholem v počátku prostoru, který má v souřadném systému $\{0, \boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{r}'(\tau), \boldsymbol{r}''(\tau)\}$ se souřadnicemi u_0, u_1, u_2 rovnici*

(2,11) $$b^{kl}(\tau)\, u_k u_l = 0,$$

kde $b^{kl}(\tau)$ jsou analytické funkce. Potom nutná a postačující podmínka k tomu, aby všechny kužele splynuly, jest, aby existovala funkce $k(\tau)$, že platí

(2,12) $$k(B_r^k b^{lr} + B_s^l b^{ks}) = (k b^{kl})',$$

(2,13) $$k(0) = 1.$$

Důkaz. Podobně jako v předchozí větě se dokáže, že nutná a postačující podmínka k tomu, aby kužele v bodě τ a v bodě $\tau = 0$ splynuly, jest, aby existovala funkce k tak, že platí $k(0) = 1$ a

$$b^{ij}(0)\, A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau) = k b^{kl}(\tau). \tag{2,14}$$

Odtud derivací a užitím (2,4) a (2,14) dostaneme podmínku (2,12).

Je-li naopak splněna podmínka (2,12) a (2,13), dostaneme obráceným postupem a integrací

$$b^{ij}(0)\, A_i^k(\tau)\, A_i^l(\tau) = k b^{kl}(\tau) + \text{konst.}$$

Dosazením $A_i^k(0) = \delta_i^k$, $k(0) = 1$ dostaneme konst. $= 0$, tj. (2,14). Tím je věta dokázána.

Pomocná věta 2,4. *Nechť ke každému bodu τ křivky je přiřazen svazek kvadrik se středy v počátku prostoru, který má v souřadném systému $\{0, \mathbf{r}(\tau), \mathbf{r}'(\tau), \mathbf{r}''(\tau)\}$ se souřadnicemi u_0, u_1, u_2 rovnici*

$$(b^{kl}(\tau) + \alpha c^{kl}(\tau))\, u_k u_l = 1, \tag{2,15}$$

kde $b^{kl}(\tau)$, $c^{kl}(\tau)$ jsou analytické funkce a α je parametrem svazku. Potom nutná a postačující podmínka k tomu, aby všechny uvažované svazky splynuly v jediný, jest, aby existovala funkce $\beta(\tau, \alpha)$, která má následující vlastnosti:

1. *Pro každé pevné τ nabývá $\beta(\tau, \alpha)$ každé reálné hodnoty právě jednou.*
2. *Platí:*

$$\beta(0, \alpha) = \alpha. \tag{2,16}$$

3. *Platí:*

$$B_r^k(b^{lr} + \beta c^{lr}) + B_s^l(b^{ks} + \beta c^{ks}) = (b^{lk} + \beta c^{lk})'. \tag{2,17}$$

Důkaz. Snadno se nahlédne, že nutná a postačující podmínka k tomu, aby uvažované svazky v bodě τ a v bodě $\tau = 0$ splynuly, jest, aby ke každému α existovalo vhodné $\beta(\tau, \alpha)$, takže platí $\beta(0, \alpha) = \alpha$ a

$$(b^{ij}(0) + \alpha c^{ij}(0))\, A_i^k(\tau)\, A_j^l(\tau) = b_i^k(\tau) + \beta(\tau, \alpha)\, c_i^k(\tau). \tag{2,18}$$

Odtud plyne důkaz věty zcela analogicky jako důkaz pomocných vět 2,2 a 2,3.

Věta 2,1. *Nechť $2\lambda - v' \neq 0$. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka ležela na nekuželové kvadrice se středem v počátku prostoru, jest, aby pro každé τ platila rovnice*

$$(2\lambda - v')[(\lambda'' - 4\lambda v)' + 2\lambda(2\lambda - v')] - (\lambda'' - 4\lambda v)(2\lambda - v')' = 0. \tag{2,19}$$

Důkaz. a) Jestliže v případě $2\lambda - v' \neq 0$ leží křivka na kvadrice, je tato kvadrika její hyperoskulační kvadrikou v každém bodě a tudíž podle věty 1,4 platí v každém bodě křivky s $2\lambda - v' \neq 0$ rovnice (2,19).

b) Nechť v každém bodě křivky platí $2\lambda - v' \neq 0$ a (2,19). V každém bodě pak podle věty 1,4 existuje nekuželová hyperoskulační kvadrika s rovnicí

$$x^2 + a_{22}y^2 - \left(\frac{\lambda'}{3} + a_{22}v\right)z^2 - 2a_{22}xz - \frac{2\lambda}{3}yz = 1, \tag{2,20}$$

při čemž

$$a_{22} = \frac{\lambda'' - 4\lambda v}{3(2\lambda - v')}. \tag{2,11}$$

Jestliže dokážeme, že všechny tyto hyperoskulační kvadriky splývají, bude tím dokázáno, že křivka leží na nekuželové kvadrice se středem v počátku prostoru. K důkazu použijeme pomocné věty 2,2, kde za kvadriky tam zmíněné vezmeme hyperoskulační nekuželové kvadriky (2,20). Snadným výpočtem zjistíme, že tam uvedené podmínky se pomocí (2,2) redukují na podmínky

$$\begin{gathered} \text{a) } 2a_{12} = a'_{11}, \quad \text{b) } a_{22} + a_{13} = a'_{12}, \quad \text{c) } 2a_{23} = a'_{22}, \\ \text{d) } a_{23} + \lambda a_{11} + va_{12} = a'_{13}, \quad \text{e) } a_{33} + \lambda a_{12} + va_{22} = a'_{23}, \\ \text{f) } 2(\lambda a_{13} + va_{23}) = a_{33}. \end{gathered} \tag{2,22}$$

Dosazením za a_{ik} z rovnic (2,20) a (2,21) plyne, že rovnice (2,22) se redukují, za předpokladu vyjádřeného rovnicí (2,19), na identitu. Tím je věta dokázána.

Věta 2,2. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka ležela na kuželi se středem v počátku prostoru, jest, aby pro každé τ platila rovnice $2\lambda - v' = 0$.*

Důkaz. a) Jestliže křivka leží na kuželi, je tento jejím hyperoskulačním kuželem v každém bodě a podle věty 1,3 platí tudíž v každém bodě rovnice $2\lambda - v' = 0$.

b) Nechť v každém bodě křivky platí $2\lambda - v' = 0$. Pak podle věty 1,3 existuje v každém bodě hyperoskulační kužel s rovnicí

$$-y^2 + vz^2 + 2xz = 0. \tag{2,23}$$

Jestliže dokážeme, že všechny tyto hyperoskulační kužele splývají, bude tím dokázáno, že křivka leží na kuželi se středem v počátku prostoru. K důkazu použijeme pomocné věty 2,3, kde za kužele tam zmíněné vezmeme oskulační kužele. Snadným výpočtem zjistíme, že tam uvedené podmínky (2,12) se pomocí (2,2) redukují na podmínky

$$\begin{gathered} \text{a) } 2ka_{12} = (ka_{11})', \quad \text{b) } k(a_{22} + a_{13}) = (ka_{12})', \quad \text{c) } 2ka_{23} = (ka_{22})', \\ \text{d) } k(a_{23} + \lambda a_{11} + va_{12}) = (ka_{13})', \\ \text{e) } k(a_{33} + \lambda a_{12} + va_{22}) = (ka_{23})', \quad \text{f) } 2k(\lambda a_{13} + va_{23}) = (ka_{33})'. \end{gathered} \tag{2,24}$$

Dosadíme-li za a_{ik} z rovnice (2,23) a položíme-li $k = 1$, plyne, že rovnice (2,24) se za předpokladu vyjádřeného rovnicí $2\lambda - v' = 0$ redukují na identitu. Tím je věta dokázána.

Věta 2,3. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka byla součástí base svazku nekuželových kvadrik se středem v počátku prostoru jest, aby pro každé* τ *platilo* $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$.

Důkaz. a) Jestliže křivka je součástí base svazku nekuželových kvadrik se středem v počátku prostoru, tvoří tyto kvadriky v každém bodě svazek oskulačních nekuželových kvadrik se středem v počátku prostoru a podle věty 1,2 platí tedy v každém bodě $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$.

b) Nechť v každém bodě křivky platí $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$. V každém bodě křivky existuje podle věty 1,2 svazek oskulačních nekuželových kvadrik. Jejich rovnice můžeme psát ve tvaru (2,20), kde a_{22} je parametrem svazku. Jestliže dokážeme, že všechny svazky kvadrik splynou v jediný, bude tím dokázáno, že křivka je součástí base svazku nekuželových kvadrik se středem v počátku prostoru. K důkazu použijeme pomocné věty 2,4, kde za zmíněné svazky kvadrik vezmeme svazky právě vzpomenuté. Snadným výpočtem zjistíme, že tam uvedené podmínky (2,17) se redukují na rovnice (2,22), kde ovšem za a_{22} je třeba položit $\beta(\tau, a_{22})$. Položme nyní $\beta(\tau, a_{22}) = a_{22} - \frac{2}{3}\int_0^\tau \lambda \, d\tau$. První dva požadavky kladené na funkci $\beta(\tau, a_{22})$ v pomocné větě 2,4 jsou triviálně splněny. Dosazením do (2,22) za a_{ik} z rovnice (2,20) plyne, že rovnice (2,22) se za předpokladu vyjádřeného rovnicemi $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$ redukují na identitu. Tak je splněn i třetí požadavek kladený v pomocné větě 2,4 na funkci $\beta(\tau, a_{22})$. Tím je věta 2,3 dokázána.

Poznámka 2,1. V pomocných větách jsme nijak podstatně nepoužívali toho, že prostor je ekvicentroaffinní. Věty lze zřejmě vyslovit a dokázat pro libovolný prostor založený na některé podgrupě centroaffinní grupy. Přitom se ovšem změní význam koeficientů B^i_k. Věty se také dají bezprostředně rozšířit na prostor libovolné dimense.

Poznámka 2,2. Podmínka (2,19) byla odvozena pro případ křivek s $2\lambda - \nu' \neq 0$, které leží na nekuželové kvadrice. Je však vidět, že tato podmínka je splněna i v případě $2\lambda - \nu' = 0$, kdy křivka leží na kuželi se středem v počátku. Můžeme tedy vyslovit větu: *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka ležela na kvadrice (kuželové nebo nekuželové) se středem v počátku jest, aby byla splněna podmínka* (2,19) *pro každé* τ.

Poznámka 2,3. Všimněme si, že křivky s $\lambda = 0$ splňují podmínku (2,19) a leží tedy podle poznámky 2,2 na kvadrice. Snadno se nahlédne (pomocí rovnice (1,11)), že křivka leží dokonce v rovině která neprochází středem prostoru. Na druhé straně je ze vztahu $\lambda = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']$ zřejmé, že pro rovinnou křivku, která neprochází středem prostoru, platí $\lambda = 0$. Máme tedy větu: *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka ležela v rovině, neprocházející počátkem prostoru, jest* $\lambda = 0$.

Poznámka 2,4. Ukažme, že *křivky s konstantními křivostmi, které leží na kvadrice se středem v počátku, jsou kuželosečky v rovinách, které neprocházejí středem prostoru:*

Podmínka (2,19) dává $\lambda = 0$. Odtud a z $\nu' = 0$ plyne $2\lambda - \nu' = 0$. Z poznámky 2,3 plyne, že křivka leží v rovině, jež neprochází středem prostoru. Podle věty 2,1 pak plyne dále, že leží na kvadratickém kuželi. Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka 2,5. Ukažme ještě, že platí následující věta: *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby křivka byla kuželosečkou v rovině, která neprochází středem prostoru, jest* $\lambda = 0$, $\nu =$ konst. *V případě* $\nu = 0$ *je tato kuželosečka parabolou, v případě* $\nu < 0$ *elipsou a v případě* $\nu > 0$ *hyperbolou.*

Důkaz. Z důkazu poznámky 2,4 plyne, že křivka, pro kterou platí $\lambda = 0$, $\nu =$ konst. je kuželosečkou v rovině, neprocházející středem prostoru. Je-li naopak křivka kuželosečkou v rovině, která neprochází středem prostoru, musí pro ni podle poznámky 2,3 platit $\lambda = 0$ a podle věty 2,2 rovnost $2\lambda - \nu' = 0$ a tedy také $\nu' = 0$. Tím je prvá část věty dokázána.

Nechť uvažovaná kuželosečka má parametrické rovnice $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$. Zvolme v prostoru souřadnou soustavu $\{0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0\}$. Platí tedy $\mathbf{r} = x\mathbf{r}_0 + y\mathbf{r}'_0 + z\mathbf{r}''_0$. Pomocí vět 1,2 a 1,3 a podmínek $\lambda = 0$, $\nu =$ konst. se snadno nahlédne, že kuželosečka leží v rovině $x = 1$ a na kuželi $-y^2 + \nu z^2 + 2xz = 0$ a tedy také na válci $-y^2 + \nu z^2 + 2z = 0$. Tento válec je parabolický, eliptický, hyperbolický podle toho, zda $\nu = 0$, $\nu < 0$, $\nu > 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Obdobným způsobem jako v této práci jest možno zkoumat analogické otázky v prostorech založených na jiné podgrupě affinní grupy. V případě centroaffinního prostoru je situace podobná jako v případě našem, jenom výpočty jsou komplikovanější. Kdybychom místo kvadrik s pevným středem použili obecných kvadrik, stala by se situace značně komplikovanější, neboť by bylo třeba uvažovat styk osmého a devátého řádu.

Došlo 6. 4. 1960.

Katedra matematiky
Stavební fakulty
Českého vysokého učení technického
v Praze

СОПРИКАСАЩИЕСЯ КВАДРИКИ КРИВЫХ В ЭКВИЦЕНТРОАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Честмир Винтер

Резюме

Работа состоит из двух частей. В первой части исследуется касание кривой в эквицентроаффинном пространстве с квадрикой, центр которой в начале пространства. Между прочим здесь показано, что в каждой точке кривой, к котором $2\lambda - \nu' \neq 0$, существует точно одна неконическая квадрика, имеющая с кривой касание пятого порядка (λ и ν представляют собой эквицентроаффинные кривизны). В случае $2\lambda - \nu' = 0$ такая квадрика или вообще не существует (если $\lambda'' - 4\nu\lambda \neq 0$) или (если $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$) существует целая связка таких квадрик.

В случае $2\lambda - \nu' = 0$ и только в этом случае существует однозначно определенный конус второго порядка с вершиной в начале пространства, имеющий с кривой касание пятого порядка. Итак, точки кривых можно подразделить на разные группы, смотря по аффинному характеру упомянутых выше однозначно определенных квадрик. В первой части работы найдены также условия того, чтобы упомянутые здесь квадрики имели с кривой касание шестого порядка.

Во второй части найдено необходимое и достаточное условие того, чтобы кривая лежала на поверхности второго порядка с центром в начале пространства, а именно: в каждой точке должно иметь место $(2\lambda - \nu')[(\lambda'' - 4\lambda\nu)' - 2\lambda(2\lambda - \nu')] - (\lambda'' - 4\lambda\nu)(2\lambda - \nu')' = 0$. Притом в случае $2\lambda - \nu' \neq 0$ кривая лежит на одной единственной неконической квадрике (и не лежит на конусе второго порядка), в случае же $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu \neq 0$ кривая лежит на единственном конусе второго порядка (и не лежит на неконической квадрике). В случае $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$ и только в этом случае кривая входит в состав базы связки неконических квадрик. (В этом случае кривая лежит, конечно, и на конусе, который при надлежащем выборе неоднородного параметра не принадлежит к связке.)

Работа заканчивается несколькими замечаниями о плоских кривых, плоскость которых не проходит через начало ($\lambda = 0$), в частности о конических сечениях ($\lambda = 0$, $\nu' = 0$).

OSKULATIONSQUADRIKE DER KURVEN IM ÄQUIZENTROAFFINEN RAUM

Čestmír Vitner

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die Berührung von Kurven im äquizentroaffinen Raum mit einer Quadrik behandelt, deren Mittelpunkt im Ursprung des Raumes liegt. Unter anderem wird gezeigt, daß in jedem Punkt der Kurve, für welchen $2\lambda - \nu' \neq 0$ gilt, gerade eine einzige nicht konische Quadrik, welche mit der Kurve die Berührung 5-ter Ordnung hat, existiert (λ und ν sind äquizentroaffine Krümmungen). Für den Fall, daß $2\lambda - \nu' = 0$ ist, existiert eine derartige Quadrik entweder nicht (für $\lambda'' - 4\lambda\nu \neq 0$), oder (für $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$) existiert ein ganzes Bündel dieser Quadrik. Für den Fall $2\lambda - \nu' = 0$ und nur für diesen Fall existiert ein eindeutig bestimmter quadratischer Kegel mit dem Scheitel im Ursprung des Raumes, welcher mit der Kurve die Berührung 5-ter Ordnung hat. Man Kann daher die Punkte der Kurve in verschiedene Gruppen einteilen je nach dem affinen Charakter der oben genannten Quadrik. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit befinden sich auch die Bedingungen für die Beruhrung 6-ter Ordnung der oben erwähnten Quadrik mit einer Kurve.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurve auf einer quadratischen Fläche mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Raumes liegt, die Gültigkeit von $(2\lambda - \nu')[(\lambda'' - 4\lambda\nu)' - 2\lambda(2\lambda - \nu')] - (\lambda'' - 4\lambda\nu)(2\lambda - \nu')' = 0$ in jedem Punkt ist. Für den Fall, daß $2\lambda - \nu \neq 0$ ist, liegt die Kurve auf einer einzigen nicht konischen Quadrik (und liegt nicht auf einem quadratischen Kegel); im Fall von $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu \neq 0$ liegt die Kurve auf einem einzigen quadratischen Kegel (sie liegt jedoch nicht auf einer nicht konischen Quadrik). Für den Fall $2\lambda - \nu' = 0$, $\lambda'' - 4\lambda\nu = 0$ und nur für diesen Fall ist die Kurve ein Teil der Basis eines Bündels von nicht konischen. Quadriken. (In diesem Fall jedoch liegt die Kurve natürlich auch auf einem Kegel, welcher bei passender Wahl des nichthomogenen Parameters dem Bündel nicht angehört.)

Die Arbeit wird mit einigen Bemerkungen über ebene Kurven, deren Ebene nicht durch den Ursprung geht ($\lambda = 0$), abgeschlossen. Speziell werden Kegelschnitte ($\lambda = 0$, $\nu' = 0$) behandelt.