

ОБ РАЗЛОЖЕНИИ ПУЧКОВ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПРЯМОЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК (Václav Medek), Братислава

В статье [1] описано отображение проективных преобразований вещественной проективной прямой P_1 на точки вещественного проективного пространства P_3 . Проективное преобразование определенное уравнениями

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \varrho(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2) &\neq 0 \\ \varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

отображается на точку с координатами $y_0 = a_{11}$, $y_1 = a_{12}$, $y_2 = a_{21}$, $y_3 = a_{22}$. Вырожденные проективные преобразования отображаются на невырожденную линейчатую кватрику Q , уравнение которой имеет вид

$$y_0 y_3 - y_1 y_2 = 0. \quad (2)$$

Тождественное преобразование отображается на точку $E(1, 0, 0, 1)$ и инволюции на точки полярной плоскости ε точки E относительно кватрики Q . Плоскость ε имеет уравнение

$$y_0 + y_3 = 0 \quad (3)$$

и пересекает кватрику Q в невырожденном конечном сечении ε .

Пучком проективных преобразований на прямой P_1 мы назовем множество всех тех проективных преобразований, которые отображаются на точки одной прямой пространства P_3 .

В этой статье рассматриваются возможности разложения пучка проективных преобразований на два пучка инволюций.

1. И прежде всего мы будем рассматривать свойства образа произведения двух инволюций.

Теорема 1. Если I невырожденная инволюция, то множество образов всех произведений вида IV и VI , где V принадлежит множеству всех инволюций, является полярной плоскостью $\varepsilon \in P_3$, точки I относительно кватрики Q . При этом соответствие между точками IV и V является невырожденной

коллинеацией (эта коллинеация посредничена точкой I) и соответственно между точками IY и YI является инволюционной коллинеацией плоскости ϵ с центром E и осью $\epsilon' \equiv [\epsilon' \epsilon]$.

Доказательство. Пусть инволюция I отображается на точку $I(i_0, i_1, i_2 - i_0)$, и инволюция Y на точки $Y(u_0, y_1, y_2, -y_0)$; то произведение YI отображается на точку $YI(i_0, i_0 + i_1, i_2, -i_0)$, $i_2 y_0 - i_0 y_2$ и произведение IY отображается на точку $IY(i_0 y_0 + i_2 y_1, i_1 y_0 - i_0 y_2 - i_2 y_0, i_1 y_2 + i_0 y_0)$. Координаты точек YI и IY удовлетворяют уравнению $i_0 x_0 + i_2 x_1 + i_1 x_2 - i_0 x_3 = 0$, и поэтому эти точки принадлежат плоскости, которая является полярной плоскостью точки I относительно квадрики Q . В плоскости ϵ точки $YI(1, 0, 0, -1)$, $YI(0, 1, 0, 0)$, $YI(0, 0, 1, 0)$ линейно независимы. Произведения YI, YI, YI отображаются на точки $YI(i_0, -i_1, i_2, i_0)$, $YI(0, i_0, i_2)$, $YI(i_1, 0, -i_0, 0)$ плоскости ϵ . Матрица

$$\begin{pmatrix} i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ 0 & i_0 & 0 & i_2 \\ i_1 & 0 & -i_0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 3. Действительно, определитель из первых трех столбцов имеет величину $-i_0(i_0^2 + i_1 i_2)$ и определитель из первого, второго и четвертого столбцов имеет величину $-i_1(i_0^2 + i_1 i_2)$. Из невырожденности инволюции I следует, что $i_0^2 + i_1 i_2 \neq 0$ и по крайней мере одно из чисел i_0, i_1 отлично от нуля. Точки YI, YI, YI тоже линейно независимы в плоскости ϵ . Взяв точку $Y \in \epsilon$ можно выразить посредством точек Y, Y, Y и координат $(u_0, y_1, y_2, -y_0)$ точки Y в этом виде: $Y = y_0 Y + y_1 Y + y_2 Y$. Легко убедиться в том, что $YI = y_0 Y + y_1 Y + y_2 Y$. Из этого вытекает, что соответствия $Y \rightarrow YI$ есть невырожденной коллинеацией между плоскостями ϵ и ϵ и если точки Y заполняют всю плоскость ϵ , то также точки YI заполняют всю плоскость ϵ .

Точно так же можно показать, что соответствие $Y \rightarrow IY$ является тоже невырожденной коллинеацией между плоскостями ϵ и ϵ и если точки Y заполняют всю плоскость ϵ , то точки IY тоже заполняют всю плоскость ϵ . Соответствие $YI \rightarrow IY$ является невырожденной коллинеацией IY , так как точки $YI = y_0 Y + y_1 Y + y_2 Y$ соответствуют точке $IY = y_0 Y + y_1 Y + y_2 Y$. Коллинеация IY является инволюционной. Действительно, пусть точка $Z = YI$ соответствует точке $Z = IY$; пусть $Z = ZI$, то $Z = ZI$ и $Z = IZ = I^2 ZI = YI$. Коллинеация IY имеет неподвижную точку E , кроме того будет точечная инвариантная и прямая ϵ' . Это последнее утверждение доказывается следующим образом: а) пусть $i_0 \neq 0$; то точки $IY(i_2, -2i_0, 0, -i_2)$ и $IY(i_1, 0, -2i_0, -i_1)$ прямой ϵ' линейно независимы. Произвольную точку $Y \in \epsilon'$ можно выразить посредством точек IY, IY в следующем виде: $Y = \lambda_1 IY + \lambda_2 IY$. Потом $IY = YI = Y'$ и точка Y' имеет координаты $[i_0(-i_2 \lambda_1 + i_1 \lambda_2), (i_1 i_2 + 2i_0^2) \lambda_1 +$

$+ i_1^2 \lambda_2, -i_2^2 \lambda_1 - (i_1 i_2 + 2i_0^2) \lambda_2, i_0(i_2 \lambda_1 - i_1 \lambda_2)]$ и принадлежит прямой ϵ' . Точку Y' можно выразить также посредством точек IY, IY : $Y' = \lambda_1' IY + \lambda_2' IY$, где

$$\begin{aligned} \epsilon \lambda_1' &= (i_1 i_2 + 2i_0^2) \lambda_1 + i_1^2 \lambda_2, \\ \epsilon \lambda_2' &= -i_2^2 \lambda_1 - (i_1 i_2 + 2i_0^2) \lambda_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Соответствие $Y \rightarrow Y'$ является инволюцией и путем простого вычисления определим, что эта инволюция того же рода как и инволюция I . Одновременно точки Y, Y' являются сопряженными полюсами относительно квадрики Q . б) пусть $i_0 = 0$; то точки $IY(1, 0, 0, -1)$, $IY(0, i_1, -i_2, 0)$ линейно независимы и принадлежат прямой ϵ' . Если $Y = \lambda_1 IY + \lambda_2 IY$, то $YI = IY = Y'$ и точка Y' имеет координаты $(i_1 i_2 \lambda_2, i_1 \lambda_1, -i_2 \lambda_1, -i_1 i_2 \lambda_2)$; точка Y' принадлежит также прямой ϵ' . Если выразить точку Y' посредством точек IY и IY : $Y' = \lambda_1' IY + \lambda_2' IY$, то мы получим

$$\epsilon \lambda_1' = i_1 i_2 \lambda_2, \quad \epsilon \lambda_2' = \lambda_1.$$

Соответствие $Y \rightarrow Y'$ является снова инволюцией сопряженных полюсов квадрики Q и того же рода что инволюция I .

Наконец мы доказали, что если $Y \in \epsilon'$, то $YI = IY$ и точки прямой ϵ' в коллинеации IY инвариантны. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть I вырожденная инволюция ($I \in \epsilon$); то множеством образов произведений IY ($Y \in \epsilon$) является прямая квадрики Q проходящая через точку I . Множеством образов всех произведений YI ($Y \in \epsilon$) является вторая прямая квадрики Q проходящая через точку I .

Доказательство. Пусть точка I имеет координаты $(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, где $i_0^2 + i_1 i_2 = 0$; то точки YI и IY имеют координаты приведенные в доказательстве предыдущей теоремы. Следовательно точки YI и IY принадлежат касательной плоскости ϵ квадрики Q в точке I . Так как инволюция I вырожденная, то произведения YI и IY являются вырожденными проективными преобразованиями и их образы принадлежат прямой, в которых плоскость ϵ пересекает квадрат Q . Точки $YI(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, $YI(1, 0, 0, -1)$, $YI(0, 1, 1, 0)$ плоскости ϵ линейно независимы, так как прямая $[YI^2 Y^3 Y]$ не пересекает квадрат Q и, следовательно, точка $Y \in Q$ не принадлежит прямой $[YI^2 Y^3 Y]$. Взяв точку $Y \in \epsilon$ можно потом выразить в виде: $Y = \lambda_1 Y + \lambda_2 Y + \lambda_3 Y$. Точка YI имеет координаты $(i_0 \lambda_2 + i_1 \lambda_3, -i_1 \lambda_2 + i_0 \lambda_3, i_2 \lambda_2 - i_0 \lambda_3, i_0 \lambda_2 + i_2 \lambda_3)$ и точку YI мы потом выразить в виде $YI = \lambda_2 i_0, -i_1, i_2, i_0) + \lambda_3(i_1, i_0, -i_0, i_2) = \lambda_2 YI + \lambda_3 YI$.

Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_1 & i_0 & -i_0 & i_2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как величины определителей из первых двух и последних двух

столбцов равны соответственно $i_0^2 + i_1^2$, $i_0^2 + i_2^2$ и оба эти числа не могут одновременно равняться нулю. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & -i_0 \\ i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_1 & i_0 & -i_0 & i_2 \end{pmatrix}$$

также равен 2, так как величины определителей из первых и последних трех столбцов равны нулю и ранг матрицы из последних двух строк равен 2. Следовательно, точки I , 2U , 3U принадлежат одной и той же прямой, и так как параметры λ_2 , λ_3 произвольные, заполняют точки U всю эту прямую.

Доказательство для произведений вида IU совсем аналогичное.

Следует еще доказать, что точки UI принадлежат одной, и точки IU второй прямой квадрики Q . Прежде всего предположим, что $i_0^2 + i_1^2 + i_2^2 \neq 0$ и $i_0^2 \neq 0$. Из этих предположений следует $i_0 \neq 0$, так как из условия вырожденности инволюции I следует для $i_0 = 0$ одновременно $i_1 = 0$, или $i_2 = 0$ и эти случаи мы исключаем. Если эти предположения выполнены, то точки I , 2U и I^2U линейно независимы. Матрица из координат этих точек имеет вид

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & -i_0 \\ i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_0 & i_1 & -i_2 & i_0 \end{pmatrix}$$

Определитель из первых двух и последнего столбца имеет величину $-4i_0^2i_1$ и определитель из первого и последних двух столбцов имеет величину $4i_0^2i_2$. Оба эти числа не могут одновременно равняться нулю и поэтому точки 2UI и I^2U не принадлежат одной и той же прямой квадрики Q . Теперь пусть $i_0 = i_1 = 0$; то точка I имеет координаты $(0, 0, 1, 0)$ и точки 3UI и I^3U имеют координаты $(0, 0, 0, 1)$ и $(1, 0, 0, 0)$. Эти три точки линейно независимы. Если $i_0 = i_2 = 0$, то точка I имеет координаты $(0, 1, 0, 0)$ и точки 3UI и I^3U имеют координаты $(1, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$; эти три точки также линейно независимы.

Теорема 3. *Невырожденная инволюция I перестановочна со всеми инволюциями, которые отображаются на точки поляр I точки I относительно конического сечения e , и только на эти точки. Вырожденная инволюция I перестановочна со всеми невырожденными инволюциями, которые отображаются на касательную I конического сечения e в точке I , и только на эти точки.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из доказательства теоремы 1. Две перестановочные невырожденные инволюции 1I , 2I и их произведение отображаются на точки 1I , 2I , 3I , которые образуют автополярный треугольник конического сечения e .

Пусть теперь I вырожденная инволюция, которая отображается на точку I $(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, где $i_0^2 + i_1^2 = 0$. Если невырожденная инволюция U должна

быть перестановочной с I , то $UI = IU = I$. Если точка U имеет координаты $(y_0, y_1, y_2, -y_0)$, то

$$\begin{aligned} i_0y_0 + i_1y_2 &= \varrho i_0, & i_2y_0 - i_0y_2 &= \varrho i_2, \\ i_0y_1 - i_1y_0 &= \varrho i_1, & i_2y_1 + i_0y_0 &= -\varrho i_0. \end{aligned}$$

Из первого и последнего уравнения выходит

$$2i_0y_0 + i_2y_1 + i_1y_2 = 0.$$

Итак если инволюции I и U перестановочны, то точка U принадлежит касательной конического сечения e в точке I . Предположим обратное, что точка U принадлежит касательной конического сечения e в точке I . Потом для случая возможны: а) $i_0 \neq 0$; то точка U имеет координаты $[-(i_2y_1 + i_1y_2), 2i_0y_1, 2i_0y_2, i_2y_1 + i_1y_2]$ и произведение инволюций I и U является инволюцией I . б) $i_0 = 0$; то точка U имеет координаты $(y_0, i_1, -i_2, -y_0)$ и произведение инволюций I и U снова является инволюцией I и теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольный пучок инволюций и умножим эти инволюции взаимно. О множестве образов всех таким образом полученных проективных преобразований вытекает

Теорема 4. *Если прямая i является образом пучка инволюций и точки M и N две произвольные точки прямой i , то образы всех произведений вида MN принадлежат прямой i' , и прямые i , i' , сопряженные полярно относительно квадрики Q .*

Доказательство. Пусть точка $A \in i$ имеет координаты $(a_0, a_1, a_2, -a_0)$ и точка $B \in i$ имеет координаты $(b_0, b_1, b_2, -b_0)$. Если точки $M(\lambda_1a_0 + \lambda_2b_0, \lambda_1a_1 + \lambda_2b_1, \lambda_1a_2 + \lambda_2b_2, -\lambda_1a_0 - \lambda_2b_0)$, $N(\mu_1a_0 + \mu_2b_0, \mu_1a_1 + \mu_2b_1, \mu_1a_2 + \mu_2b_2, -\mu_1a_0 - \mu_2b_0)$ две произвольные точки прямой $[AB]$, тогда образ произведения NM имеет координаты

$$\begin{aligned} x_0 &= C\lambda_1\mu_1 + D\lambda_1\mu_2 + E\lambda_2\mu_1 + F\lambda_2\mu_2, \\ x_1 &= G\lambda_1\mu_2 - G\lambda_2\mu_1, \\ x_2 &= H\lambda_1\mu_2 - H\lambda_2\mu_1, \\ x_3 &= C\lambda_1\mu_1 + E\lambda_1\mu_2 + D\lambda_2\mu_1 + F\lambda_2\mu_2; \end{aligned} \quad (5)$$

где $C = a_0^2 + a_1a_2$, $D = a_0b_0 + a_1b_1$, $E = a_0b_0 + a_2b_1$, $F = b_0^2 + b_1b_2$, $G = a_0b_1 - a_1b_0$, $H = a_2b_0 - a_0b_2$. Путем элиминации параметров λ , μ из уравнений (5) мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} (a_2b_0 - a_0b_2)x_1 + (a_1b_0 - a_0b_1)x_2 &= 0, \\ (a_2b_1 - a_1b_2)x_1 + (a_1b_0 - a_0b_1)x_3 - x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) являются уравнениями двух плоскостей, которые совпадают только тогда, когда $a_0 : a_1 = b_0 : b_1$. Если плоскости определены уравнениями (6) не совпадают мы убедимся простым вычислением, что их общая

прямая i' является сопряженной поляркой к прямой i относительно квадратики Q . Пусть теперь $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$; если хотим чтобы точки A , B не совпадали, то $a_2 \neq b_2$. Произведение NM отображается в этом случае на точку с координатами

$$\begin{aligned}x_0 &= C\lambda_1\mu_1 + D\lambda_1\mu_2 + C\lambda_2\mu_1 + D\lambda_2\mu_2, \\x_1 &= 0, \\x_2 &= E\lambda_1\mu_2 - E\lambda_2\mu_1, \\x_3 &= C\lambda_1\mu_1 + C\lambda_1\mu_2 + D\lambda_2\mu_1 + D\lambda_2\mu_2,\end{aligned}\quad (7)$$

где $C = a_0^2 + a_1a_2$, $D = a_0^2 + a_1b_2$, $E = a_0(a_2 - b_2)$. Путем элиминации параметров λ , μ из уравнений (7) приходим к уравнениям

$$x_1 = 0, \quad a_1x_2 - a_0(x_3 - x_0) = 0, \quad (8)$$

двух плоскостей, которые пересекаются опять в сопряженной полярке к прямой i относительно квадратики Q .

2. К разложению произвольного невырожденного проективного преобразования на две инволюции применяется

Теорема 5. Пусть $Y \neq E$ произвольное невырожденное проективное преобразование; пусть $y = [EY]$ и пусть y' сопряженная полярка к прямой y относительно квадратики Q ; то существует бесконечное множество пар инволюций x_1, x_1' ($x_1' \in y'$, $x_1 \in y$) и таких, что $x_1'x_1 = Y$; соответствие $x_1' \rightarrow x_1$ является невырожденным проективным преобразованием с инвариантными точками в точках пересечения прямой y' с квадратиком Q .

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что произведение двух инволюций x_1, x_1' является только тогда проективным преобразованием Y , если точки x_1, x_1' принадлежат полярке сопряженной к прямой $[EY]$ относительно квадратики Q . а) Пусть $y_0 \neq y_3$; то точки $O_1 [-y_1, 0, (y_0 - y_3), y_1], O_2 [-y_2, (y_0 - y_3), 0, y_2]$ принадлежат прямой y' и они линейно независимы. К произвольной точке $x_1' I = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2$ существует такая точка $x_1' I' = \lambda_1' O_1 + \lambda_2' O_2$, что $x_1' x_1' I' = Y$. Для параметров λ_1', λ_2' мы находим

$$\begin{aligned}\varrho\lambda_1' &= [y_1 y_2 + y_0(y_0 - y_3)]\lambda_1 + y_2^2\lambda_2, \\ \varrho\lambda_2' &= -y_1^2\lambda_1 - [y_1 y_2 - y_3(y_0 - y_3)]\lambda_2.\end{aligned}\quad (9)$$

Уравнения (9) являются уравнениями невырожденного проективного преобразования прямой y' , так как определитель из коэффициентов уравнений (9) имеет значение $(y_1 y_2 - y_0 y_3)(y_0 - y_3)^2 \neq 0$. Инвариантные точки этого преобразования преобразования имеют значения параметров λ , которые удовлетворяют уравнению $y_1^2\lambda_1^2 + [2y_1 y_2 + (y_0 - y_3)^2]\lambda_1\lambda_2 + y_2^2\lambda_2^2 = 0$. Тому же уравнению удовлетворяют также значения параметров λ для точек пересечения прямой y' и квадратики Q .

б) Пусть $y_0 = y_3$; то точки $O_1(0, -y_1, y_2, 0), O_2(1, -y_1, y_2, -1)$ линейно независимы и принадлежат прямой y' . Точно также как в случае а) мы приходим к проективному преобразованию определенному уравнениями

$$\begin{aligned}\varrho\lambda_1' &= (y_0 + y_1 y_2)\lambda_1 + (y_1 y_2 - 1)\lambda_2, \\ \varrho\lambda_2' &= -y_1 y_2 \lambda_1 + (y_0 - y_1 y_2)\lambda_2.\end{aligned}\quad (10)$$

Определитель из коэффициентов уравнений (10) имеет величину $y_0^2 - y_1 y_2 \neq 0$, итак это проективное преобразование невырожденное. Параметры λ его инвариантных точек удовлетворяют уравнению $y_1 y_2 \lambda_1^2 + 2y_1 y_2 \lambda_1 \lambda_2 + (y_1 y_2 - 1)\lambda_2^2 = 0$ и тому же уравнению удовлетворяют также параметры λ точек пересечения прямой y' с квадратиком Q .

Вспомогательная теорема. Пусть k невырожденное коническое сечение плоскости α и пусть точка $R \in \alpha$ не принадлежит коническому сечению k ; пусть $t \in \alpha$ пусть R полярка точки R относительно конического сечения k ; пусть t $\in \alpha$ произвольная прямая через точку R , и пусть она не является касательной конического сечения k ; пусть $^1 M$ инволюция сопряженных полюсов индуцируемая коническим сечением k на прямой t ; пусть a и b произвольные прямые плоскости α не проходящие точкой R и пусть они пересекают прямую t в точках $^a M, ^b M$; пусть $^R P$ проективное преобразование прямой t такое, что ему сопряженной инволюцией (с.м. напр. [2], стр. 117) является $^1 M$ и точке $^a M$ соответствует инволюцией $^b M$; то точки соответствующие точкам $^b M$ в проективных преобразованиях $^R P$ принадлежат коническому сечению k . Коническое сечение состоит, ввиду $^R P$ принадлежат коническому сечению k . Коническое сечение состоит из двух прямых (одна из этих прямых соединяет точку R с точкой пересечения R из двух прямых a, b) тогда, и только тогда, когда прямая b проходит точкой пересечения прямой a и конического сечения k .

Доказательство. а) Пусть точка R внешняя точка конического сечения k ; в плоскости α существует такая система координат, что точка R имеет координаты $(0, 0, 1)$ и точки пересечения прямой R с коническим сечением имеют координаты $(0, 1, 0), (1, 0, 0)$. Уравнение конического сечения k мы можем привести к виду $x_3^2 - x_1 x_2 = 0$; прямые t имеют уравнения $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$, вести к виду $x_3^2 - x_1 x_2 = 0$; прямые t имеют уравнения $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$, где $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ и точки пересечения $^1 M, ^2 M$ прямой t с коническим сечением k имеют координаты $(-\mu_2, \mu_1, \pm \sqrt{-\mu_1 \mu_2})$. Всякую точку L прямой t мы можем выразить в виде: $L = \lambda_1 ^1 M + \lambda_2 ^2 M$ и параметры λ являются координатами координатами точки L на прямой t . Точка R в этой системе координат имеет координаты $(1, -1)$. Если прямые a, b имеют соответственно уравнения $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ и $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$, то точки $^a M, ^b M$ имеют на прямой t координаты $(a_1 \mu_2 - a_2 \mu_1 + a_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2}, -a_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 + a_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2}), (b_1 \mu_2 - b_2 \mu_1 + b_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2}, -b_1 \mu_2 + b_2 \mu_1 + b_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2})$. Для уравнений проективного преобразования $^R P$ мы получаем

$$\begin{aligned}\varrho\lambda_1 &= (a_1 \mu_2 - a_2 \mu_1 + a_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2})\lambda_1', \\ \varrho\lambda_2 &= (a_1 \mu_2 - a_2 \mu_1 - a_3 \sqrt{-\mu_1 \mu_2})\lambda_2',\end{aligned}\quad (11)$$

Координаты точек ${}^bM'$ соответствующих точкам bM в преобразованных mP имеют вид

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mu_1\mu_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mu_2^2, \\x_2 &= (a_3b_2 - a_2b_3)\mu_1^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\mu_1\mu_2, \\x_3 &= a_2b_2\mu_1^2 + (a_3b_3 - a_1b_2 - a_2b_1)\mu_1\mu_2 + a_1b_1\mu_2^2.\end{aligned}\quad (12)$$

Из уравнений (12) следует, что точки ${}^bM'$ принадлежат коническому сечению, которое вырожденное тогда, и только тогда, когда определитель из коэффициентов у μ_1^2 , $\mu_1\mu_2$, μ_2^2 равен нулю, или если

$$a_3b_3[(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_3b_1 - a_1b_3)(a_2b_3 - a_3b_2)] = 0.$$

В силу условия $a_3b_3 \neq 0$ (ни одна из прямых a , b не переходит через точку P), следует

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_3b_1 - a_1b_3)(a_2b_3 - a_3b_2) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) удовлетворено тогда, и только тогда, если точка пересечения R прямых a , b принадлежит коническому сечению k .

Для того, чтобы найти прямые, из которых состоит коническое сечение (12), если выполнено условие (13), выразим коническое сечение k в параметрическом представлении: $x_1 = t_1^2$, $x_2 = t_2^2$, $x_3 = t_1t_2$. Рассмотрим на коническом сечении k три точки $R(t_1^2, t_2^2, t_1t_2)$, $A(a_1^2, a_2^2, a_1a_2)$, $B(b_1^2, b_2^2, b_1b_2)$, и притом одна из точек A , B может совпадать с точкой R . Прямые $[AR]$ и $[BR]$ (касательная конического сечения k , если точка R совпадает с одной из точек A , B) имеют уравнения

$$\begin{aligned}t_2a_2x_1 + t_1a_1x_2 - (t_1a_2 + t_2a_1)x_3 &= 0, \\t_2b_2x_1 + t_1b_1x_2 - (t_1b_2 + t_2b_1)x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения конического сечения (12) получают, следовательно, вид

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_2b_1 - a_1b_2)\mu_2(t_1^2\mu_1 + t_2^2\mu_2), \\x_2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)\mu_1(t_1^2\mu_1 + t_2^2\mu_2), \\x_3 &= (a_1b_1\mu_1 + a_2b_2\mu_2)(t_1^2\mu_1 + t_2^2\mu_2).\end{aligned}\quad (14)$$

Коническое сечение (14) состоит из прямой $t_2^2x_1 - t_1^2x_2 = 0$ (и это прямая $[PR]$) и из прямой

$$x_1 = (a_2b_1 - a_1b_2)\mu_2, \quad x_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)\mu_1, \quad x_3 = a_1b_1\mu_1 + a_2b_2\mu_2.$$

Уравнения прямой b' мы можем выразить в виде

$$a_2b_2x_1 - a_1b_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_3 = 0.$$

6) Пусть точка P внутренняя точка конического сечения k ; то существует система координат плоскости α такова, что точка P имеет координаты $(0, 0, 1)$ и точки P , $(0, 1, 0)$ и $(1, 0, 0)$ составляют автополярный треугольник кони-

ческого сечения k . Уравнение конического сечения k имеет в этом случае вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Прямая m имеет уравнение $\mu_1x_1 + \mu_2x_2 = 0$ и ей точки пересечения с коническим сечением k являются точки ${}^1M(-\mu_2, \mu_1, \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2})$, ${}^2M(-\mu_2, \mu_1, -\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2})$. Если прямые a , b имеют уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, то точки соответствующие в проективном преобразовании точкам прямой b имеют координаты

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mu_1\mu_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mu_2^2, \\x_2 &= (a_3b_2 - a_2b_3)\mu_1^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\mu_1\mu_2, \\x_3 &= (a_2b_2 - a_3b_3)\mu_1^2 - (a_2b_1 + a_1b_2)\mu_1\mu_2 + (a_1b_1 - a_2b_3)\mu_2^2.\end{aligned}\quad (15)$$

Уравнения (15) являются опять параметрическим представлением точек конического сечения, которое вырожденное тогда, и только тогда, когда определитель из коэффициентов уравнений (15) равен нулю:

$$a_3b_3[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2] = 0.$$

Так как $a_3b_3 \neq 0$, то

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0. \quad (16)$$

Условие (16) однако эквивалентно требованию, чтобы точка пересечения прямых a , b принадлежала коническому сечению k .

Уравнение прямой b' мы можем получить точно также как и в предыдущем случае путем параметрического представления конического сечения k .

Теорема 6. *Всякий пучок проективных преобразований можно получить как множество произведений одной инволюции с инволюциями одного пучка.*

Доказательство. Прежде всего пусть пучок проективных преобразований не отображается на прямую соединяющую точку E с точкой конического сечения e ; то возможны три случая: а) пучок отображается на прямую a через точку E . Положим через прямую a произвольную плоскость α_e , которая не касается кватрики Q и ей полюс обозначим A . Поляр a' сопряженная к прямой a относительно кватрики Q проходит через точку A . Из теорем 1 и 4 следует, что в коллинеации посредниченой точкой A между плоскостями e и α_e соответствует в коллинеации посредниченой точкой A между плоскостями α_e и α_e инволюция A ствует прямой a именно прямая a , а следовательно, произведение инволюции A с инволюциями пучка, который отображается на прямую a' , является точно пучок проективных преобразований отображающихся на прямую a .

б) Пусть образ пучка является прямой a , которая не проходит через точку E и не принадлежит кватрике Q ; то плоскость α_e проходящая через точку E и через прямую a не является касательной плоскостью кватрики Q и ей полюс A не принадлежит коническому сечению e . Точкой A снова посредничена не вырожденная коллинеация между плоскостями e и α_e и в этой коллинеации прямой a соответствует прямая $a' \in e$. Произведения инволюции A с инволю-

прямыми пучка отображающегося на прямую a' составляют пучок проективных преобразований отображающихся на прямую a .

в) Пусть образом пучка является прямая a квадратики Q , то плоскость α проходящая через точку E и через прямую a является касательной плоскостью квадратики Q в точке $A \equiv [ae]$. Пусть m произвольная прямая плоскости ε не проходящая через точку A . Произведения инволюции A с инволюциями отображающимися на точки прямой m принадлежат, согласно теореме 2, прямой a . Вместе с тем мы получим таким образом все точки прямой a . Пусть например точка M произвольная точка прямой a и пусть полира сопряженная с прямой $[EM]$ относительно квадратики Q пересекает прямую m в точке M' . Следовательно, образ произведения инволюции A и M' (в определенном порядке) принадлежит прямой a и прямой $[EM]$ и он является точно точкой M .

Пусть теперь образом пучка проективных преобразований являются прямая соединяющая точку E с точкой $A \in e$; в этом случае мы рассмотрим произвольную плоскость α проходящую через прямую a и отличную от касательной плоскости квадратики Q в точке A . Пусть точка $P \in \alpha$ полнос плоскости α относительно квадратики Q . Точкой R посредничена невырожденная коллинеация между точками плоскостей ε и α ; в этой коллинеации точками прямой a соответствуют точки касательной a' конического сечения e в точке A . Следовательно, образы произведений инволюции P с инволюциями отображающимися на точки прямой a' , составляют точно прямую a .

Определение. Мы будем говорить, что пучок проективных преобразований можно разложить на два пучка инволюций, если существуют такие два пучка инволюций (они могут и совпадать) и такое проективное преобразование между точками прямых, на которые они отображаются, что произведения соответствующих инволюций составляют данный пучок проективных преобразований.

Теорема 7. Невырожденный пучок проективных преобразований (т. е. такой, который не содержит только вырожденные преобразования) можно разложить на два пучка инволюций тогда, и только тогда, когда он содержит по крайней мере одно вырожденное преобразование с исключением пучков, которые содержат можественное преобразование и вырожденную инволюцию.

Доказательство. а) Пусть данный пучок проективных преобразований отображается на прямую a , которая не проходит точкой E и пусть плоскость α проходящая точкой E и прямой a не является касательной плоскостью квадратики Q ; то плоскость α пересекает плоскость ε в прямой p , которая не является касательной конического сечения e . Пусть P полнос прямой p относительно конического сечения e . Точкой R посредничена невырожденная коллинеация между плоскостями ε и α , в которой прямой $a \in \alpha$ соответствует прямая $a' \in e$. Пусть A произвольная точка прямой a и пусть m соединяет точки E и A ; то точка A индугирует на полире m' сопряженной с прямой m относительно квадратики Q проективное преобразование, которого сопряженная инволюция

является инволюцией сопряженных полюсов конического сечения e и одна пара соответствующих точек является точкой P и точка пересечения A' прямой m' и a' . Так как инволюцию A мы можем получить только как произведение инволюций, отображающихся на прямой m' , доказательство теоремы в настоящем случае следует прямо из вспомогательной теоремы.

б) Пусть теперь α касательная плоскость квадратики Q в точке $P \in e$ и прямая a не проходит точкой E . Введем систему координат на прямой p , таким образом, чтобы точка P имела координаты $(0, 1, 0, 0)$; то плоскость α имеет уравнение $x_2 = 0$. Плоскости проходящие точками E и P имеют уравнения

$$\mu_1 x_2 + \mu_2 (x_0 - x_3) = 0. \quad (17)$$

Пусть прямая $[EP]$ пересекает прямую a в точке A и пусть прямая соединяющая точку E с точкой $(1, 0, 0, -1)$ (она принадлежит касательной p конического сечения e в точке P) пересекает прямую a в точке B ; то точки A и B отличны и имеют координаты $(a_0, a_1, 0, a_0)$, $(b_0, 0, 0, b_3)$, где $a_1 \neq 0$, $b_0 \neq b_3$. Используя точки A, B мы можем всякую точку M прямой a привести к виду $M = \lambda_1 A + \lambda_2 B$. Полира m' сопряженная к прямой $m = [EM]$ является прямой пересечения одной из плоскостей (17) с плоскостью ε . Между параметрами λ точки M и параметрами соответствующей плоскости существует соотношение

$$\mu_1 = -2a_1 \lambda_1, \quad \mu_2 = (b_3 - b_0) \lambda_2. \quad (18)$$

Точки $O_1 [-\lambda_1 a_0, \lambda_2 (b_0 - b_3), \lambda_1 a_1, 0, 0]$ прямой m' линейно независимы. Точка M определяется на прямой m' проективное преобразование точек такое, что произведения инволюций отображающихся до соответствующих точек, совпадают точно с инволюцией M . Если O_1, O_2 базисные точки, то уравнения этого проективного преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \lambda_2 (\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0) (b_0 - b_3) \alpha_1, \\ \alpha'_2 &= [-\lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2 (\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_3) (b_0 - b_3)] \alpha_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Если b произвольная прямая плоскости ε не проходящая точкой P , то мы рассмотрим образы всех таких инволюций, которых произведение с инволюцией отображающимися на точки прямой b , отображаются на прямую a . Если плоскость β проходящая точкой E и прямой b имеет уравнение

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 - A_0 x_3 = 0, \quad (20)$$

то простым вычислением убедимся в том, что координаты требуемых точек имеют вид

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 a_1 A_1 \lambda_1^2 + a_1 b_0 A_1 \lambda_1 \lambda_2, \\ x_1 &= (a_1^2 A_1 - 2a_0 a_1 A_0) \lambda_1^2 + [a_0 A_2 (b_0 - b_3) - 2a_1 b_3 A_0] \lambda_1 \lambda_2 + b_3 A_2 (b_0 - b_3) \lambda_2^2, \\ x_2 &= -a_0 A_1 (b_0 - b_3) \lambda_1 \lambda_2 - b_0 A_1 (b_0 - b_3) \lambda_2^2, \\ x_3 &= -a_0 a_1 A_1 \lambda_1^2 - a_1 b_0 A_1 \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы найти условия вырожденности этого конического сечения, мы его будем проципировать из точки $(0, 0, 1)$ на плоскость $x_3 = 0$. Первые три координаты точек конического сечения останутся неизменными и четвертая равна нулю. Таким образом, для вырожденности конического сечения (21) необходимо и достаточно, чтобы

$$a_0^2(b_0 - b_3)^2 A_2 - 2a_0 a_1 b_0(b_0 - b_3) A_0 - a_1^2 b_0^2 A_1 = 0 \quad (22)$$

Условие (22) эквивалентно утверждению, что плоскость β проходит точкой $T[-a_0 a_1 b_0(b_0 - b_3), -a_1^2 b_0^2, a_0^2(b_0 - b_3)^2, a_0 a_1 b_0(b_0 - b_3)]$. Точка T принадлежит коническому сечению e . Так как прямая a в этом случае имеет всегда с квадратом Q по крайней мере одну точку общую, и в этом случае теорема доказана.

в) Пусть прямая a проходит точкой E и пусть пересекает плоскость e в точке A . Нужно различать три случая:

ва) Точка A внешняя точка конического сечения e ; то существует такова система координат на прямой P_1 , что точка A будет иметь координаты $(1, 0, 0, -1)$. Точки $O_1(0, 1, 0, 0)$, $O_2(0, 0, 1, 0)$ поляры a' сопряженной к прямой a относительно квадратики Q линейно независимы; на прямой a точки $E(1, 0, 0, 1)$, $A(1, 0, 0, -1)$ также линейно независимы. Пусть точки прямой a имеют параметры λ и пусть пары точек прямой a' имеют параметры λ' и λ'' и пусть например

$$\begin{aligned} \varrho \lambda'_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, & \varrho \lambda'_2 &= a \lambda_1 + b \lambda_2, & a &\neq b, \\ \sigma \lambda''_1 &= \lambda_1 - \lambda_2, & \sigma \lambda''_2 &= a \lambda_1 + b \lambda_2, & a &\neq b, \end{aligned}$$

то произведем инволюций $\lambda'_1 O_1 + \lambda'_2 O_2$ и $\lambda''_1 O_1 + \lambda''_2 O_2$ является точно проективное преобразование $\lambda_1 E + \lambda_2 A$. Так как прямая a пересекает квадратик Q в двух точках, теорема и в этом случае верна.

вб) Точка A внутренняя точка конического сечения e ; на прямой P_1 существует такова система координат, что точка A имеет координаты $(0, 1, -1, 0)$. Точки $O_1(0, 1, 1, 0)$, $O_2(1, 0, 0, -1)$ поляры a' сопряженной к прямой a относительно квадратики Q линейно независимы и также точки $A(0, 1, -1, 0)$, $E(1, 0, 0, 1)$ прямой линейно независимы. Предположим, что пучок отображаемый на прямую a можно разложить на произведение двух пучков инволюций. Из этого условия следует, что между параметрами $\lambda, \lambda', \lambda''$ существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varrho \lambda'_1 &= a_0 \lambda_1 + a_1 \lambda_2, & \varrho \lambda'_2 &= a_2 \lambda_1 + a_3 \lambda_2, & a_0 a_3 - a_1 a_2 &\neq 0, \\ \sigma \lambda''_1 &= b_0 \lambda_1 + b_1 \lambda_2, & \sigma \lambda''_2 &= b_2 \lambda_1 + b_3 \lambda_2, & b_0 b_3 - b_1 b_2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Инволюции O_1, O_2, A, E связаны соотношением $(\lambda'_1 O_1 + \lambda'_2 O_2)(\lambda''_1 O_1 + \lambda''_2 O_2) = \lambda_1 A + \lambda_2 E$. Из этого соотношения вытекает

$$\begin{aligned} (a_0 b_0 + a_2 b_2) \lambda_1^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 + a_3 b_2) \lambda_1 \lambda_2 + (a_1 b_1 + a_3 b_3) \lambda_2^2 &= \varrho \lambda_2^2 \\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) \lambda_1^2 + (a_2 b_1 + a_3 b_0 - a_0 b_3 - a_1 b_2) \lambda_1 \lambda_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \lambda_2^2 &= \varrho \lambda_1^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Условия разрешимости уравнений (24) мы найдем путем элиминации ϱ в этом виде

$$\begin{aligned} b_0 &= k a_2, b_1 = l a_1, b_2 = -k a_0, b_3 = l a_3, k l \neq 0, \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3 - a_0^2 - a_2^2) k + (a_0 a_1 + a_2 a_3) l &= 0, \\ -(a_0 a_1 + a_2 a_3) k + (a_1^2 + a_3^2 + a_0 a_3 - a_1 a_2) l &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Последние из уравнений (25) имеют решение тогда, и только тогда, если

$$(a_1 a_2 - a_0 a_3) [(a_1 - a_2)^2 + (a_0 + a_3)^2] = 0,$$

откуда

$$a_1 = a_2, \quad a_0 = -a_3. \quad (26)$$

Если соотношения (26) применить к первому уравнению (25), то

$$b_0 b_3 - b_1 b_2 = k l (a_2 a_3 + a_0 a_1) = 0$$

и это противоречит условию (23).

Значит, если точка внутренняя точка конического сечения e , или если прямая a не имеет с квадратиком Q никакой общей точку, то не возможно разложить пучок отображаемый на прямую a на два пучка инволюций.

вв) Точка A принадлежит коническому сечению e ; то существует на прямой P_1 такая система координат, что точка A имеет координаты $(0, 1, 0, 0)$. Полярной a' сопряженной к прямой a относительно квадратики Q является касательная конического сечения e в точке A ; на этой касательной точки $O_1 = A(0, 1, 0, 0)$, $O_2(1, 0, 0, -1)$ линейно независимы. Точки A, E прямой a также линейно независимы. Предположим, что пучок разлагается на два пучка инволюций, то между параметрами $\lambda, \lambda', \lambda''$ существовали бы соотношения (23). Из условия $(\lambda'_1 O_1 + \lambda'_2 O_2)(\lambda''_1 O_1 + \lambda''_2 O_2) = \lambda_1 E + \lambda_2 A$ вытекает

$$\begin{aligned} a_2 b_2 \lambda_1^2 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \lambda_1 \lambda_2 + a_3 b_3 \lambda_2^2 &= \varrho \lambda_2^2, \\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) \lambda_1^2 + (a_2 b_1 + a_3 b_0 - a_0 b_3 - a_1 b_2) \lambda_1 \lambda_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \lambda_2^2 &= \varrho \lambda_1^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Условия разрешимости уравнений (27) имеют вид

$$\begin{aligned} a_2 b_2 &= 0, \\ a_2 b_3 + a_3 b_2 - a_2 b_0 + a_0 b_2 &= 0, \\ a_3 b_3 - a_2 b_1 - a_3 b_0 + a_0 b_3 + a_1 b_2 &= 0, \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения разрешимы только тогда, если $a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$, или $b_0 b_3 - b_1 b_2 = 0$, что противоречит предположению. Теорема 7 вполне доказана.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Medek V., *Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 6 (1956), 98-108.
- [2] Vojtěch J., *Geometrie projektivní*, Praha 1932.
- Поступило в редакцию 24 июня 1960 г.

*Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave*

Václav Medek

Zusammenfassung

ÜBER DIE ZERLEGUNG DER PROJEKTIVITÄTEN EINER GERADEN

In vorliegender Abhandlung benutzt man eine Abbildung der Projektivitäten einer Geraden auf Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes. Unter einem Büschel von Projektivitäten versteht man ein System aller solchen Projektivitäten, welche sich auf Punkte einer Geraden abbilden. Man untersucht die Bedingungen, unter welchen man einen Büschel von Projektivitäten auf zwei Büschel von Involutionen zerlegen kann. Der Definition nach kann man einen Büschel von Projektivitäten dann auf zwei Büschel von Involutionen zerlegen, wenn eine solche projektive Verwandtschaft zwischen den Involutionen der beiden Büscheln existiert, dass die Produkte entsprechender Involutionen den gegebenen Büschel von Projektivitäten bilden. Das Hauptresultat ist: Einen regulären Büschel von Projektivitäten kann man auf zwei Büschel von Involutionen dann und nur dann zerlegen wenn er mindestens eine singuläre Projektivität enthält mit der Ausnahme der Büscheln, welche die Identität und eine singuläre Involution enthalten.