MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 2, 1961

O STRUKTUŘE FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH NA KONEČNÝCH MNOŽINÁCH

OLDŘICH KOWALSKI, Brno

Úvod

Ke vzniku této práce přispěly dva hlavní podněty. Jedním z nich byl článek V. I. Arnolda uveřejněný ve 3. čísle sborníku Matěmatičeskoje prosvješčenije s názvem *O vyjádření funkcí několika proměnných ve tvaru superpozice funkcí menšího počtu proměnných.* Článek informuje populárně o komplexu otázek z teorie funkcí, které souvisí s tzv. 13. Hilbertovým problémem. V této problematice dosáhli velkých úspěchů mladí sovětští matematici pod vedením akademika Kolmogorova. V článku je také načrtnut důkaz jednoho ze stěžejních výsledků: Bylo dokázáno, že *každá spojitá funkce k reálných proměnných definovaná na kompaktním intervalu, se dá vyjádřit ve tvaru superpozice konečného počtu spojitých funkcí jedné proměnné a funkce* $f(u, v) = u + v$.

Druhý podnět ke své práci jsem nalezl v knize R. Péterové *Rekurzivní funkce.* Jde o následující výsledek: „*Všechny vícemístné primitivně rekurzivní funkce lze sestrojit z jednomístných primitivně rekurzivních funkcí a jediné dvoumístné funkce a + n pouze pomocí substitucí*“. (Viz ruský překlad knihy, vyd. Moskva 1954, str. 81.)

Zaujala mě tato formální podobnost dvou výsledků zcela odlišné matematické povahy, z nichž jeden se týká jistých funkcí na číselném kontinuu a druhý jistých funkcí definovaných na množině celých nezáporných čísel. Snažil jsem se nalézt formální analogii ve struktuře funkcí několika proměnných na konečných množinách. Taková analogie byla také snadno nalezena a je nejlépe vyjádřena ve větě 2 této práce.

1. Uvažujme množinu $\mathbf{R}$ o $n + 1$ prvcích, kde n je přirozené číslo. V dalším bude účelné předpokládat, že prvky množiny $\mathbf{R}$ jsou čísla $0, 1, \ldots, n$. Znaků $+, \Sigma$ budeme užívat výhradně pro vyjádření operace sčítání podle modulu $n + 1$ na množině $\mathbf{R}$. Funkcemi k proměnných na množině $\mathbf{R}$ budeme v dalším nazývat zobrazení kartézské mocniny $\mathbf{R}^k$ do množiny $\mathbf{R}$. V naší práci se zabýváme možností vyjádření funkcí k proměnných na množině $\mathbf{R}$ ve tvaru superpozice funkcí menšího počtu proměnných.

2. Nejobecnějším výsledkem v této práci je následující věta:

Věta 1. *Každá funkce k proměnných na množině* $\mathbf{R}$ $(k \geqq 2)$ *se dá vyjádřit ve tvaru superpozice funkcí jedné proměnné a funkcí dvou proměnných na* $\mathbf{R}$ *a konstant.*

Důkaz. Definujme $n + 1$ funkcí jedné proměnné $\delta(0, x), \delta(1, x), \ldots, \delta(n, x)$ vztahy: $\delta(i, x) = 1$ pro $x = i$ $\quad x, i = 0, 1, \ldots, n.$
$\delta(i, x) = 0$ pro $x \neq i$.

Dále definujme pro libovolné přirozené číslo r funkci $g_r(u_1, u_2, \ldots, u_{r+1})$ $r + 1$ proměnných vztahy:

$$g_r(u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}) = u_{r+1}, \text{ jsou-li } u_1, u_2, \ldots, u_{r+1} \neq 0,$$
$$g_r(u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}) = 0, \text{ je-li aspoň jedno } u_i \text{ rovno } 0.$$

Potom pro libovolnou funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ na množině $\mathbf{R}$ platí vztah

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} \ldots \sum_{i_k=0}^{n} g_k(\delta(i_1, x_1), \ldots, \delta(i_k, x_k), f(i_1, \ldots, i_k)). \tag{1}$$

O platnosti formule (1) se můžeme přesvědčit přímým dosazením libovolné, ale pevné k-tice hodnot $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ z množiny $\mathbf{R}$ za proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Dále zřejmě platí

$$g_k(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) = g_{k-1}(g_1(u_1, u_2), u_3, \ldots, u_{k+1}) = \ldots$$
$$\ldots = g_1[g_1(g_1(\ldots g_1(u_1, u_2), \ldots), u_k), u_{k+1}];$$

funkce $g_k(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ $k + 1$ proměnných je tedy $(k - 1)$-násobnou superpozicí funkce $g_1(u, v)$ dvou proměnných. Pravou stranu formule (1) pak můžeme považovat za mnohonásobnou superpozici funkcí $\delta(0, x), \delta(1, x), \ldots, \delta(n, x), g_1(u, v), \varrho(u, v) = u + v \pmod{n + 1}$ a konstant. Tím je důkaz proveden.

3. Z dokázané formule (1) snadno plyne známá věta o možnosti vyjádření všech booleovských funkcí nad dvouprvkovou Booleovou algebrou v tzv. úplné normální spojové formě. (V dalším užijeme obvyklého označování svazových operací.)

Položme k tomu účelu $n = 1$ a považujme množinu $\mathbf{R}_1 = \{0, 1\}$ za dvouprvkovou Booleovu algebru. Snadno se vidí, že pro funkce $\delta(0, x), \delta(1, x)$ definované na množině $\mathbf{R}_1$ platí

$$\begin{aligned} \delta(1, x) &= x && \text{pro } x \in \mathbf{R}_1, \\ \delta(0, x) &= \bar{x} && \text{pro } x \in \mathbf{R}_1 \text{ (operace doplňku).} \end{aligned} \tag{2}$$

Dále pro libovolné přirozené číslo r zřejmě platí

$$g_r(u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}) = u_1 \cap u_2 \ldots \cap u_{r+1}.$$

Povšimněme si konečně, že pro každou k-tici hodnot $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ z $\mathbf{R}_1$ nabývá nejvýš jeden sčítanec na pravé straně formule (1) nenulové hodnoty. Sumační znaménko ve formuli (1) lze tedy nahradit znaménkem operace spojení. Z těchto poznámek plyne, že vzorec (1) vyjadřuje booleovskou funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ v úplné normální spojové formě.

4. Vraťme se zpět k případu obecného n.

Věta 2. *Každá funkce k proměnných na množině $\mathbf{R}$ o $n + 1$ prvcích,* kde $n \geqq 2$, *dá se vyjádřit ve tvaru superpozice pevných tří funkcí jedné proměnné a funkce* $\varrho(x, y) = x + y \pmod{n + 1}$.

Důkaz. Zaveďme další funkce jedné proměnné $\sigma(x)$, $s(x)$ vztahy:

$$\sigma(x) = 1 + \ldots + (x - 1) \text{ pro } x = 1, \ldots, n,\ \sigma(0) = 1 + \ldots + n),$$
$$s(x) = n + 1 - x = -x (\bmod n + 1).$$

V odstavci 2 jsme vyjádřili každou funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k proměnných na množině $\mathbf{R}$ ve tvaru superpozice funkcí $\delta(0, x)$, $\delta(1, x)$, …, $\delta(n, x)$, $g_1(u, v)$, $\varrho(u, v)$ a konstant. Věta bude dokázána, podaří-li se nám vyjádřit funkce $\delta(1, x)$, …, $\delta(n, x)$, $g_1(u, v)$ a všechny konstanty z $\mathbf{R}$ ve tvaru superpozice tří základních funkcí $\delta(x) = \delta(0, x)$, $s(x)$, $\sigma(x)$, jedné proměnné a funkce $\varrho(u, v)$.

Možnost takového vyjádření pro funkce $\delta(1, x)$, …, $\delta(n, x)$ a konstanty plyne ihned z následujícího systému vztahů:

$$\begin{aligned}
x &= s[s(x)],\\
0 &= \varrho(x, s(x)),\\
1 &= \delta(0),\\
2 &= \varrho(1, 1),\\
&\ldots,\\
n &= \varrho(n - 1, 1),\\
\delta(i, x) &= \delta[\varrho(x, s(i))] \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Jen o málo složitěji lze vyjádřit funkci $g_1(u, v)$; v tomto případě se ukazuje podstatnou podmínka $n \geqq 2$:

$$g_1(u, v) = \sigma[v + \sigma(v) + \sigma(\delta(u))] + s[\sigma(v + \delta(v))] + \delta[\delta(u) + \delta(v)] + s[\delta(\delta(u))]. \tag{4}$$

Předně, přihlédneme-li k prvému ze vztahů (3), vidíme, že vyjádření (4) má požadovaný tvar. K samotnému důkazu pak označme $h(u, v)$ pravou stranu formule (4). Platí

$$h(0, v) = \delta[\delta(v) + \delta(0)] + s[\delta(\delta(0))] = \delta[\delta(v) + 1] + s[\delta(1)] = 0,$$

pro $u \neq 0$ $\quad h(u, 0) = \sigma(2) + s[\sigma(1)] + \delta(1) + s[\delta(0)] = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

a pro $u \neq 0$, $v \neq 0$ dostáváme

$$h(u, v) = \sigma(v + 1) + s[\sigma(v)] + \delta(0) + s[\delta(0)] = v.$$

Odtud plyne $g_1(u, v) = h(u, v)$ podle definice funkce g_1 a formule (4) je dokázána. Tím je současně dokázána věta 2.

5. Věta 2 se nedá rozšířit pro případ $n = 1$. Podrobně je tento fakt vyjádřen následující větou:

Věta 3. *Na množině $\mathbf{R}_1 = \{0, 1\}$ existují funkce libovolného počtu (nejméně ovšem dvou) proměnných, které se nedají vyjádřit ve tvaru superpozice funkcí jedné proměnné a funkce $\varrho(u, v) = u + v \pmod 2$.*

Věta je důsledkem následujícího lemmatu:

Lemma. *Pro každé přirozené číslo k existuje na množině $\mathbf{R}_1 = \{0, 1\}$ přesně 2^{k+1} funkcí k proměnných, které jsou superpozicemi funkcí jedné proměnné a funkce $\delta(u, v) = u + v \pmod 2$. Všechny tyto funkce jsou tvaru*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_k x_k + \varepsilon_0 \,.\, 1, \tag{5}$$

kde ε_i pro $i = 0, 1, \ldots, k$ nabývá hodnoty 0 nebo 1.

Důkaz. Na množině $\mathbf{R}_1$ jsou definovány právě čtyři funkce jedné proměnné, a to funkce $0, 1, x, x + 1$, které jsou vesměs tvaru (5). Předpokládejme, že také všechny funkce, které jsou nejvýše r-násobnými superpozicemi těchto funkcí a funkce $\varrho(u, v)$, jsou tvaru (5). Nechť funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k proměnných se dá vyjádřit ve tvaru nejvýše $(r + 1)$-násobné superpozice funkcí $0, 1, x, x + 1, \varrho(u, v)$. Potom buďto existují dvě funkce g, h takové, že $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) + h(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p})$ a funkce g, h jsou nejvýše r-násobnými superpozicemi základních funkcí, jsou tedy podle předpokladu tvaru (5). Nebo existuje jediná funkce g tvaru (5) taková, že

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) + \varepsilon \,.\, 1,$$

kde ε může mít hodnotu 0 nebo 1. Odtud snadno plyne, že také funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je tvaru (5). Tím je lemma dokázáno úplnou indukcí.

Jak je známo, všech booleovských funkcí k proměnných na množině $\mathbf{R}_1$ je právě 2^{2^k}. Poněvadž však pro $k \geqq 2$ je $2^{2^k} > 2^{k+1}$, existují nutně booleovské funkce k proměnných, které se nedají vyjádřit ve tvaru (4). Tím je dokázána věta 3.

Dodatek. V době, kdy tato práce byla již v tisku, byl jsem upozorněn na práci Jablonského [1], která se zabývá podobnou problematikou, totiž konstruktivní teorií funkcí k-hodnotové logiky. V tomto odstavci bych chtěl srovnat některé pojmy a výsledky práce [1] s výsledky předchozích odstavců.

Funkcí k-hodnotové logiky se u Jablonského nazývá funkce libovolného počtu proměnných, jejíž argumenty jsou definovány na množině $E^k = \{0, 1, \ldots, k - 1\}$ a oborem hodnot je táž množina. Množinu všech funkcí k-hodnotové logiky pro dané k označuje autor P^k. Systém funkcí z P^k se nazývá *funkcionálně úplný* v P^k, jestliže každá funkce z P^k se dá vyjádřit ve tvaru superpozice funkcí tohoto systému.

Pojem superpozice u Jablonského se při tom poněkud liší od téhož pojmu v naší práci: Při postupném konstruování nových funkcí ze základního systému lze v našem pojetí za proměnné některé konstruktivně určené funkce dosazovat zásadně jen další, rovněž konstruktivně určené funkce; v pojetí Jablonského je možno za proměnné kromě funkcí dosazovat také libovolné nové proměnné. Superpozice funkcí v našem pojetí je tedy i superpozicí podle Jablonského.

V [1] se předně uvádí na str. 62 věta:

Systém funkcí $0, 1, \ldots, k - 1, \max(x, y), \min(x, y), j_i(x)\ (0 \leqq i \leqq k - 1)$, *kde*

$$j_i(x) = \begin{cases} k - 1 & \text{pro } x = i, \\ 0 & \text{pro } x \neq i, \end{cases}$$

je funkcionálně úplný v P^k.

Přitom vyjádření každé funkce z P^k je dáno formálním výrazem, který je zobecněním úplné spojové normální formy. Tím je dána analogie s naším vzorcem (1) z odst. 2.

V dalším se autor snaží snížit počet základních funkcí hořejšího systému a dochází k výsledku, že *jediná funkce* $\max(x, y) + 1$ *tvoří již funkcionálně úplný systém v* P^k (str. 63).

Užijeme-li nové terminologie, dokázali jsme ve větě 2 naší práce, že *systém funkcí* $\delta(x), \sigma(x), s(x), \varrho(x, y)$ *je funkcionálně úplný v* P^{n+1} *při* $n \geqq 2$. To, že náš úplný systém obsahuje větší počet funkcí, je ovšem způsobeno speciálními vlastnostmi funkce $\varrho(x, y)$.

LITERATURA

[1] Яблонский С. В., *Функциональные построения в к-значной логике*, Труды мат. инст. им Стеклова, т. LI (1958), 5—142.

Došlo 10. 9. 1959.

О СТРУКТУРЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Олдржих Ковалски

Резюме

В настоящей работе изучается структура функций, отображающих прямое произведение $\boldsymbol{R}^k$ к экземпляров конечного множества $\boldsymbol{R} = \{0,1,\ldots, n\}$ в множество $\boldsymbol{R}$. Функции этого рода мы здесь называем функциями k переменных на множестве $\boldsymbol{R}$.

Прежде всего приводится формула (1), которая выражает любую функцию k переменных, заданную на множестве $\boldsymbol{R}$ в виде-суперпозиции функций двух переменных, функций одной переменной и постоянных из $\boldsymbol{R}$ (пункт 2).

Полагая в нашей формуле $n = 1$, т. е. $\boldsymbol{R} = \{0,1\}$, мы получим легко теорему о возможности представления всех Булевых функций, заданных на Булевой алгебре с двумя элементами в т. наз. совершенной дизъюнктивной нормальной форме (пункт 3).

Если, однако, множество $\boldsymbol{R}$ имеет более чем два элемента, то мы придем на основе более детального анализа исходной формулы к заключению, что каждую функцию к переменных на множестве $\boldsymbol{R}$ можно выразить в виде суперпозиции трех стандартных функций $\delta(x)$, $\sigma(x)$, $s(x)$ одной переменной и единственной функции $\varrho(u, v) = u + v$ (мод $n + 1$) двух переменных (пункт 4).

С другой стороны показывается, что на множестве $\boldsymbol{R}_1 = \{0, 1\}$ имеются функции нескольких переменных, которые нельзя выразить в виде суперпозиции функций одной переменной и функции $u + v$ (мод 2) (пункт 5).

В конце работы указаны некоторые связы с работой Яблонского [1].

ÜBER DIE STRUKTUR DER FUNKTIONEN VON MEHREREN VERÄNDERLICHEN AUF DEN ENDLICHEN MENGEN

Oldřich Kowalski

Zusammenfassung

In dieser Arbeit studiert man die Struktur der Funktionen, die die k-fache kartesische Potenz $\boldsymbol{R}^k$ der endlichem Menge $\boldsymbol{R} = \{0, 1,\ldots, n\}$ in die Menge $\boldsymbol{R}$ abbilden. Die Funktionen von dieser Art werden als Funktionen von k Veränderlichen auf der Menge $\boldsymbol{R}$ genannt. Vor allem wird eine Formel eingeführt, die eine beliebige Funktion von k Veränderlichen auf $\boldsymbol{R}$ in der Form einer Superposition der Funktionen von zwei Veränderlichen, der Funktionen von einer Veränderlichen und Konstanten aus $\boldsymbol{R}$ ausdrückt (siehe (1), Absatz 2).

Setzen wir in unserer Formel $n = 1$, also $\boldsymbol{R} = \{0, 1\}$, so bekommen wir leicht den Satz über die Darstellung aller Booleschen Funktionen über einer aus zwei Elementen bestehenden Booleschen Algebra in der sogenannten *normalen Vereinigungsform* (Absatz 3).

Besitzt die Menge $\boldsymbol{R}$ dagegen mehr als zwei Elemente, so kann man durch ausführlichere Analyse der Ausgangsformel zeigen, daß jede Funktion von k Veränderlichen auf der Menge $\boldsymbol{R} = \{0, 1,\ldots, n\}$ als eine Superposition der drei festen Funktionen von einer Veränderlichen $\delta(x)$, $\sigma(x)$, $s(x)$ und der einzigen Funktion von zwei Veränderlichen $\varrho(u, v) = u + v$(mod $n + 1$) ausgedrückt werden kann (Absatz 4).

Es läßt sich dagegen die Existenz der Funktionen auf der Menge $\boldsymbol{R}_1 = \{0, 1)\}$ beweisen, die nicht als Superposition der Funktionen einer Veränderlichen und der Funktion $u + v$(mod 2) ausgedrückt werden können (Absatz 5).

Im Schluß sind einige Zusammenhänge mit den Resultaten von Jablonskij [1] gezeigt.