MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 2, 1961

POZNÁMKA O JEDNEJ VLASTNOSTI DVOJPRVKOVÉHO TELESA

ŠTEFAN ZNÁM, Bratislava

Nech M je modul nad komutatívnym telesom K; nech $L \subset M$. Hovoríme, že L má vlastnosť (A), keď platí: ak $a \in L$, $b \in L$, $\alpha \in K$, $\beta \in K$, $\alpha + \beta = 1$, potom $\alpha a + \beta b \in L$. Je zrejmé, že každá lineárna podmnožina modulu M má vlastnosť (A). Cieľom tejto poznámky je ukázať, že opačné tvrdenie platí len vtedy, keď K má viac ako dva prvky (tento predpoklad je omylom vynechaný na str. 23 rozmnoženého textu „Přednášky z funkcionální analysy I. část" prof. M. Katětova).

Veta. *Nech M je modul nad komutatívnym telesom K. Keď K má viac ako dva prvky, potom neprázdna množina $L \subset M$ je lineárna vtedy a len vtedy, keď spĺňa podmienku* (A). *Keď K má práve dva prvky, potom každá množina $L \subset M$ spĺňa podmienku* (A).

Dôkaz. I. Nech K má viac ako dva prvky. Keď $L \subset M$ je lineárna, potom zrejme splňuje podmienku (A). Nech $0 \neq L \subset M$ spĺňa podmienku (A). Dokážeme, že potom L je lineárna. Zvoľme $u \in L$; stačí dokázať, že $P = L - u$ je podmodul v M. Ak je $a \in P$, potom $a + u \in L$, a teda pre $\alpha \in K$ na základe podmienky (A) platí $\alpha(a + u) + (1 - \alpha) u \in L$; z toho vyplýva, že $\alpha a + u \in L$, a teda $\alpha a \in P$. Ak je $a \in P$, $b \in P$, zvoľme $\alpha \in K$ tak, aby bolo $0 \neq \alpha \neq 1$. Potom, ako sme už dokázali $\alpha a \in P$, $(1 - \alpha) b \in P$, a teda $\alpha a + u \in L$, $(1 - \alpha) b + u \in L$. Podľa podmienky (A) dostaneme $(1 - \alpha)(\alpha a + u) + \alpha[(1 - \alpha) b + u] \in L$. Nakoľko $(1 - \alpha)(\alpha a + u) + \alpha[(1 - \alpha) b + u] = \alpha(1 - \alpha)(a + b) + u$, dostávame $\alpha(1 - \alpha)(a + b) \in P$. Z toho vyplýva $a + b \in P$, pretože $\alpha(1 - \alpha) \neq 0$.

II. Nech K má práve dva prvky: 0,1. Nech $L \subset M$. Keď $a \in L$, $b \in L$, $\alpha \in K$, $\beta \in K$, $\alpha + \beta = 1$, potom buď $\alpha = 1$, $\beta = 0$, čiže $\alpha a + \beta b = a \in L$; alebo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, čiže $\alpha a + \beta b = b \in L$. Tým je dôkaz ukončený.

Došlo 24. 1. 1961.

Katedra matematiky
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТЕЛА С ДВУМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ

Штефан Знам

Резюме

Пусть M — линейное пространство над телом K; пусть $L \subset M$. Говорим, что множество L обладает свойством (А), если выполняется условие: $\alpha a + \beta b \in L$ для всяких $a \in L$, $b \in L$, $\alpha \in K$, $\beta \in K$, $\alpha + \beta = 1$. В заметке доказывается:

Если K имеет больше двух элементов, то не пустое множество $L \subset M$ обладает свойством (А) тогда и только тогда, если существуют элемент $c \in M$ и подпространство $N \subset M$ такие, что $L = c + N$. Если K имеет точно два элемента, то всякое множество $L \subset M$ обладает свойством (А).