MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 2, 1961

VPLYV NEPRUŽNÉHO VNÚTORNÉHO ODPORU NA RÝCHLOSŤ POSTUPU OHYBOVÝCH VĹN V PRUŽNÝCH TYČIACH

IVAN NÁTER, SOŇA HORVÁTHOVÁ, DRAHOMILA NETSCHOVÁ, Bratislava

Úvod

Je známe, že rýchlosť postupu ohybových vĺn v pružných tyčiach nezávisí len od fyzikálnych vlastností materiálu tyčí, príp. od ich rozmerov, ale aj od vlnovej dĺžky týchto vĺn. Teoretické výsledky, ktoré to potvrdzujú, možno získať z elementárnej teórie ohybových kmitov i z teórií presnejších, ktoré berú do úvahy zotrvačnosť rotačného pohybu jednotlivých elementov kmitajúcej tyče, príp. deformáciu v šmyku, ktorá sa pri takýchto kmitoch tiež uplatňuje [1]. Vo svojej práci vyšetrujeme, aký vplyv má nepružný vnútorný odpor na rýchlosť postupu ohybových vĺn v tyčiach.

Označenie pre jednotlivé fyzikálne veličiny používame v celom článku v tomto význame:

A – amplitúda kmitov,
b – koeficient útlmu,
c – rýchlosť postupu ohybových kmitov (vĺn),
$c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{s}}$,
E – modul pružnosti v ťahu,
$f = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,
F – priečna sila účinkujúca v priereze tyče,
G – modul pružnosti v šmyku,
I – plošný moment zotrvačnosti kolmého priečneho rezu tyče vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom prierezu a je kolmá na rovinu kmitov,
i – imaginárna jednotka,
$k = \sqrt{\dfrac{I}{S}}$,
M – moment ohybovej dvojice síl účinkujúcej v kolmom priečnom priereze,

r – polomer kruhového prierezu tyče,
s – špecifická hmota materiálu tyče,
S – plošný obsah kolmého priečneho rezu tyče,
t – čas,
x – pravouhlá súradnica meraná na rovnovážnej polohe pozdĺžnej osi tyče,
y – výchylka jednotlivých bodov pozdĺžnej osi tyče, meraná v rovine kmitov kolmo od jej rovnovážnej polohy,
γ – relatívne posunutie pri deformácii v šmyku,
ε – relatívne predĺženie pri deformácii v ťahu,
λ – vlnová dĺžka,
μ – konštanta, ktorá závisí od tvaru priečneho kolmého rezu tyče,
σ – normálové napätie,
τ – tangenciálne napätie,
ψ – koeficient vnútorného pohlcovania energie (rozptylu),

ω – kruhová frekvencia kmitov, $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$.

1. Riešenie úlohy bez vnútorného odporu

a) V najjednoduchšej teórii ohybových kmitov tyčí neuvažujeme zotrvačnosť rotačného pohybu jednotlivých elementov tyče, ani deformáciu v šmyku, ku ktorej pri tomto druhu kmitov dochádza [1], [5]. V tomto prípade vychádzame z diferenciálnej rovnice

$$c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Ak predpokladáme, že sa v tyči šíria sínusové ohybové vlny, vtedy

$$y = A \cos(\omega t - fx), \tag{2}$$

pričom $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$, $f = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Po dosadení funkcie (2) do rovnice (1) dostaneme podmienečnú rovnicu

$$c = \frac{2\pi c_0 k}{\lambda}, \tag{3}$$

ktorá vyjadruje závislosť rýchlosti ohybových vĺn od ich vlnovej dĺžky.

b) V presnejšej teórii, ktorú vypracoval Rayleigh [2], uvažujeme aj zotrvačnosť rotačného pohybu elementov tyče a príslušná diferenciálna rovnica má v tomto prípade tvar

$$c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Ak zas predpokladáme riešenie v tvare (2), pre závislosť rýchlosti c od vlnovej dĺžky λ dostávame vyjadrenie

$$c = c_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

c) Keď popri Rayleighovej korekcii vezmeme do úvahy ešte skutočnosť, že sa pri ohybových kmitoch uplatňuje aj deformácia v šmyku, dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{k^2}{c_0^2} \frac{E}{\mu G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0, \tag{6}$$

ktorú odvodil Timoshenko [5]. Konštanta μ, ktorej hodnota závisí od tvaru kolmého priečneho rezu tyče, súvisí s tým, že priemerné šmykové napätie v celom priečnom reze tyče je iné ako šmykové napätie v ťažisku tohto rezu. Pre kruhový prierez uvádza Timoshenko [6] hodnotu 3/4, Kolsky [1] 9/10.

Z rovnice (6) odvodzuje Timoshenko [5] závislosť kruhovej frekvencie ω od vlnovej dĺžky λ a uvádza tento približný výsledok

$$\omega = c_0 k \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right]. \tag{7}$$

Porovnávajúc tento výsledok s podobnými vzťahmi, získanými z rovníc (1) a (4), dochádza k záveru, že oprava, ktorú pre tento vzťah poskytuje rovnica (6) voči rovnici (1), je štyrikrát väčšia ako oprava, ktorú voči rovnici (1) dáva rovnica (4). Výsledok (7) a uvedené závery sú však nesprávne. Pri odvodzovaní výsledku (7) dopustil sa totiž Timoshenko zásadnej chyby v tom, že rozvinul do Taylorovho radu istú funkciu a zanedbal členy s vyššími mocninami, pričom však uvažovaný rad vôbec nekonverguje. Vo svojich neskorších prácach (r. 1922) uviedol Timoshenko presné riešenie rovnice (6). Pre vyšetrenie závislosti rýchlosti c od vlnovej dĺžky λ nepoužijeme vzťah (7), ale odvodíme presnú závislosť priamo z rovnice (6).

Predpokladajme riešenie rovnice (6) v tvare (2). Po dosadení príslušných derivácií do rovnice (6) dostaneme podmienku

$$c_0^2 k^2 f^4 - \omega^2 \left[1 + k^2 f^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] + \frac{k^2}{c_0^2} \frac{E}{\mu G} \omega^4 = 0.$$

Ak do tejto rovnice dosadíme $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$ a $f = \frac{2\pi}{\lambda}$, dostávame pre c bikvadratickú rovnicu

$$\frac{k^2}{c_0^2} \frac{E}{\mu G} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^4 - \left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] c^2 + c_0^2 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 = 0,$$

ktorá má dve reálne kladné riešenia

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right) \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right]^2 - 4\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 \frac{E}{\mu G}}}{\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \frac{E}{\mu G}}}$$

Diskriminant

$$\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right]^2 - 4\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 \frac{E}{\mu G}$$

je totiž vždy kladný, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť, ak uvážime, že (pozri napr. [7])

$$2G < E < 3G \quad \text{a} \quad \mu < 1.$$

Poslednú závislosť c od λ možno upraviť na prehľadnejší tvar

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left\{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]\right\}^2 - 4\frac{\mu G}{E}}}.$$

Získaný výsledok by poukazoval na to, že v tyčiach sú možné dva druhy ohybových vĺn, postupujúce rozličnými rýchlosťami (pre tú istú vlnovú dĺžku). Z výsledkov, ktoré rozliční autori [8, 9, 10, 11] získali riešením všeobecných rovníc pružnosti, však vyplýva, že rýchlosť ohybových vĺn je jednoznačnou funkciou vlnovej dĺžky. Porovnaním s výsledkami tejto presnej teórie sme zistili, že z oboch našich koreňov fyzikálnej skutočnosti odpovedá ten, ktorý má pred vnútornou druhou odmocninou záporné znamienko, teda

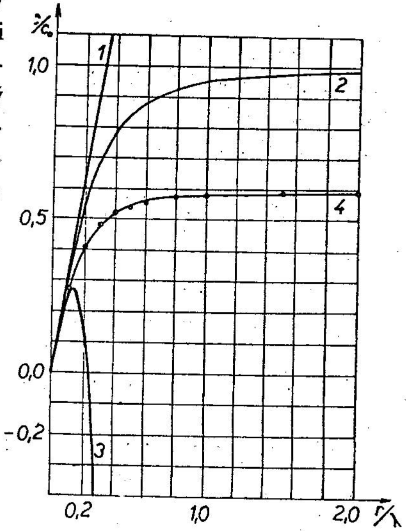
$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right] - \sqrt{\left\{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]\right\}^2 - 4\frac{\mu G}{E}}}. \tag{8}$$

Pre kruhový prierez tyče s polomerom r, pre ktorý je $k = r/2$, je na obr. 1 graficky znázornená závislosť c/c_0 od r/λ. Krivka 1 predstavuje závislosť vyjadrenú rovnicou (3), krivka 2 závislosť vyjadrenú rovnicou (5), krivka 3 je zostrojená z nesprávnej závislosti Timoshenkovej (7), krivka 4 predstavuje závislosť odvodenú zo všeobecných rovníc pružnosti. Body, ktoré sú v grafe vyznačené krúžkami, vypočítali sme z rovnice (8). Pritom sme uvažovali $\mu = 9/10$ a $G/E = 0{,}39$. Krivka 4, odpovedajúca presnej teórii, je prevzatá bez zmeny z [1], ostatné krivky a body sú zostrojené podľa našich výpočtov. Krivky 1 a 2 presne súhlasia s grafmi v [1].

Z grafu dobre vidieť, akej chyby sa dopustil Timoshenko. Graf potvrdzuje aj to, že závislosť (8) veľmi presne súhlasí s krivkou 4, získanou riešením všeobecných rovníc pružnosti.

2. Vyjadrenie nepružného vnútorného odporu

Ak pružné teleso podlieha periodickým dynamickým deformáciám, dochádza v ňom k rozptyľovaniu energie, ktoré pripisujeme nepružnému vnútornému odporu. Tento odpor sa prejavuje napr. hysteréznou slučkou v diagrame závislosti vnútorného napätia od relatívnej deformácie [3]. Plošný obsah hysteréznej slučky je úmerný energii pohltenej materiálom počas jedného deformačného cyklu. Ak má deformácia sínusový priebeh, hysteréznu slučku možno veľmi približne považovať za úzku elipsu, ktorú v prípade jednoduchej deformácie v ťahu môžeme vyjadriť rovnicou



$$\sigma = E\varepsilon \pm \frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}, \tag{9}$$

kde ε_0 je amplitúda relatívneho predĺženia. Koeficient pohlcovania energie ψ je definovaný podielom

$$\psi = \frac{\Delta W}{W_0},$$

kde ΔW je energia pohltená počas jedného deformačného cyklu, W_0 celková elastická energia odpovedajúca maximálnej deformácii ε_0.

Ak je však $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$, môžeme rovnicu (9) písať aj v tvare

$$\sigma = E\left(\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi\omega}\frac{d\varepsilon}{dt}\right).$$

Posledná rovnica vyjadruje Bokovu hypotézu o vnútornom trení [3]. Dvojznačnosť, vyjadrujúca dve vetvy eliptickej hysteréznej slučky, ostáva tu zachovaná.

Ak pre deformáciu použijeme komplexné vyjadrenie

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi)},$$

dostáva závislosť napätia od relatívneho predĺženia tvar

$$\sigma = \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) E\varepsilon, \tag{10}$$

čo je Sorokinova hypotéza o vnútornom trení [3]. Fyzikálnej skutočnosti odpovedá pritom reálna časť alebo reálna hodnota imaginárnej časti rovnice (10).

Analogický vzťah by sme dostali aj pre čistú deformáciu v šmyku medzi tangenciálnym napätím τ a relatívnym posunutím γ:

$$\tau = \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) G\gamma. \tag{11}$$

Koeficient ψ má teraz, pravda, inú hodnotu.

Vo svojej poslednej práci [12] uvádza Sorokin vylepšenú teóriu, podľa ktorej závislosť napätia od relatívneho predĺženia je vyjadrená vzťahom

$$\sigma = (u + iv) E\varepsilon, \tag{10a}$$

kde

$$u = \frac{1 - \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}, \qquad v = \frac{\frac{\psi}{2\pi}}{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}. \tag{12}$$

Podobne pre deformáciu v šmyku je

$$\tau = (u + iv) G\gamma. \tag{11a}$$

Keďže podľa [3] výsledky získané teoreticky s použitím Sorokinovej hypotézy veľmi dobre súhlasia s experimentálnymi výsledkami, budeme v nasledujúcich úvahách používať túto hypotézu, a to aj preto, že je veľmi vhodná na výpočet kruhových frekvencií. V následujúcej časti nami uvažované kmity sú, pravda, tlmené, ale pri malom tlmení možno predpokladať, že sa charakter vnútorného nepružného odporu znateľne nezmení.

3. Riešenie úlohy so zreteľom na nepružný vnútorný odpor

A. Vnútorný nepružný odpor vyjadrený vzťahmi (10) a (11) podľa pôvodnej Sorokinovej hypotézy

Ak je tyč deformovaná ohybom, v jej ľubovoľnom priečnom reze vzniká ohybová dvojica síl s momentom M a priečna sila F. Medzi nimi platí známy vzťah [1]:

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Ohybová dvojica je vyvolaná normálovými napätiami, ktoré sú v našom prípade vyjadrené vzťahom (10). Relatívne predĺženie ε v ľubovoľnom mieste prierezu tyče pri malých ohybových deformáciách možno písať [7]:

$$\varepsilon = u\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

kde u je kolmá vzdialenosť uvažovaného miesta od priamky, ktorá je kolmá na rovinu ohybu tyče a prechádza ťažiskom prierezu tyče (neutrálnym vláknom). Moment ohybovej dvojice síl je potom

$$M = \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int_S u^2 \mathrm{d}S,$$

kde integrujeme cez celý prierez tyče. Tento integrál je rovný momentu zotrvačnosti I prierezu tyče, teda

$$M = \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{13}$$

a) Diferenciálnu rovnicu vlastných (voľných) ohybových kmitov tyče so zreteľom na nepružný vnútorný odpor dostaneme s použitím vzťahu (13) v tvare

$$\left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{14}$$

(Spôsob odvodenia pozri napr. [1].) Rovnica (14) je analogická rovnici (1). Aby sme dostali výsledok porovnateľný so vzťahom (3), hľadajme riešenie rovnice (14) v komplexnom tvare

$$y = A\,e^{\alpha t + \beta x},$$

v ktorom α a β sú komplexné veličiny. Voľme ešte počiatočné podmienky tak, aby pre $t = 0$ bolo

$$\Re e\, y_{t=0} = A\cos(-fx).$$

Z porovnania vychádza

$$\beta = -if. \tag{15}$$

Po dosadení do rovnice (14) dostaneme podmienku

$$c_0^2 k^2 f^4 + i\frac{\psi}{2\pi} c_0^2 k^2 f^4 + \alpha^2 = 0.$$

Píšme ďalej $\alpha = -b + i\omega$ a rozložme poslednú rovnicu na reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme tak dve podmienky

$$\frac{\psi}{2\pi} c_0^2 k^2 f^4 - 2b\omega = 0,$$

$$c_0^2 k^2 f^4 + b^2 - \omega^2 = 0,$$

z ktorých môžeme vypočítať neznámy koeficient útlmu b a kruhovú frekvenciu ω. Z prvej rovnice vychádza

$$b = \frac{c_0^2 k^2 f^4}{2\omega} \cdot \frac{\psi}{2\pi}. \tag{16}$$

Ak ešte použijeme vzťahy $\omega = 2\pi c/\lambda$ a $f = 2\pi/\lambda$, po dosadení dostávame pre c bikvadratickú rovnicu

$$c^4 - c_0^2\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c^2 - \frac{1}{4} c_0^4 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 = 0,$$

ktorá má jediný reálny kladný koreň

$$c = \frac{2\pi c_0 k}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}\right]}. \tag{17}$$

Rovnica (17) vyjadruje závislosť rýchlosti c od vlnovej dĺžky λ. Pre $\psi = 0$ prejde rovnica (17) do (3). Korekčný faktor

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}\right]} \tag{18}$$

je väčší ako 1, čo znamená, že nepružný vnútorný odpor zapríčiňuje zväčšenie rýchlosti postupu ohybových vĺn.

b) Ak priberieme Rayleighovu opravu na zotrvačnosť rotačného pohybu elementov tyče a uvažujeme vzťah (13), diferenciálna rovnica ohybových kmitov tyče prejde do tvaru

$$\left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \tag{19}$$

(Odvodenie pozri napr. [1].) Rovnica (19) je analogická rovnici (4). Ak hľadáme riešenie v komplexnom tvare

$$y = A\, e^{\alpha t + \beta x},$$

podobným postupom ako v prípade a) dostaneme rovnice

$$\frac{\psi}{2\pi} c_0^2 k^2 f^4 - 2(1 + k^2 f^2)\, b\omega = 0,$$

$$c_0^2 k^2 f^4 + (1 + k^2 f^2)(b^2 - \omega^2) = 0.$$

Pre koeficient útlmu z prvej rovnice vychádza

$$b = \frac{c_0^2 k^2 f^4}{(1 + k^2 f^2)\, 2\omega} \frac{\psi}{2\pi} \tag{20}$$

a pre rýchlosť c dostávame zas bikvadratickú rovnicu

$$c^4 - \frac{c_0^2}{1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2}\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c^2 - \frac{1}{4}\frac{c_0^4}{\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2\right]^2}\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 = 0.$$

Táto rovnica má tiež len jeden reálny kladný koreň

$$c = c_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}\right]}. \tag{21}$$

Ak do výsledku (21) dosadíme $\psi = 0$, dostaneme vzťah (5). Korekčný faktor je taký istý ako v prípade a).

c) Aby sme dostali diferenciálnu rovnicu analogickú Timoshenkovej rovnici (6), musíme vziať do úvahy aj deformáciu v šmyku zapríčinenú priečnou silou F. Podľa [5] s ohľadom na rovnice (11) a (13) je

$$M = \left(1 + i\frac{\psi_1}{2\pi}\right) EI \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad F = \left(1 + i\frac{\psi_2}{2\pi}\right) \mu G S \gamma.$$

Φ je odklon neutrálneho vlákna tyče od jeho rovnovážnej polohy, zapríčinený ohybom, γ je odklon zapríčinený deformáciou v šmyku. Celkový odklon $\partial y/\partial x = \Phi + \gamma$. ψ_1 a ψ_2 sú koeficienty pohlcovania energie odpovedajúce deformácii v ťahu, resp. deformácii v šmyku. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že hodnoty týchto koeficientov sa navzájom veľmi nelíšia a do výpočtov vezmeme priemerný koeficient pohlcovania energie

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \doteq \psi_1 \doteq \psi_2.$$

Použijúc všetky uvedené vzťahy, dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\left[1 - \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + 2i\frac{\psi}{2\pi}\right] c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \\ - \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right) k^2 \left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{k^2}{c_0^2}\frac{E}{\mu G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \tag{22}$$

Ak hľadáme jej riešenie ako v prípade a) a b) a použijeme rovnakú počiatočnú podmienku, dostaneme podmienečné rovnice

$$\left.\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2\right] c_0^2 k^2 f^4 + \left[1 + k^2 f^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right]\left(b^2 - \omega^2 + 2\frac{\psi}{2\pi} b\omega\right) + \\ &\qquad + \frac{k^2}{c_0^2}\frac{E}{\mu G}(b^4 + \omega^4 - 6b^2\omega^2) = 0, \\ &2\frac{\psi}{2\pi} c_0^2 k^2 f^4 + \left[1 + k^2 f^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right]\left[\frac{\psi}{2\pi}(b^2 - \omega^2) - 2b\omega\right] - \\ &\qquad - 4\frac{k^2}{c_0^2}\frac{E}{\mu G}(b^3\omega - b\omega^3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Pri riešení tejto sústavy rovníc pre b a ω nenarážame na zásadné matematické ťažkosti; možno ich riešiť exaktne. Výsledky takého riešenia sú však príliš komplikované a neprehľadné. Uvedieme preto približné riešenie.

Z rozboru výsledkov (16) a (20) vychádza približne platný vzťah

$$b \doteq \frac{\omega}{2} \frac{\psi}{2\pi}. \tag{24}$$

Tento vzťah platí všeobecne (pozri [3], [4]). Okrem toho riešenie, ktoré hľadáme, má pre $\psi = 0$ prejsť do vzťahu (8). Tejto podmienke – po dosadení vzťahu (24) – vyhovuje prvá z rovníc (23). Z nej dostaneme pre rýchlosť c bikvadratickú rovnicu

$$\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^4\right] \frac{E}{c_0^2 \mu G}\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c^4 - \left[1 - \frac{5}{4}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] c^2 + \left[1 - \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2\right] c_0^2 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 = 0.$$

Ak v exaktnom riešení tejto rovnice – s ohľadom na malú hodnotu ψ – zanedbáme $\frac{1}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^6$ a uvážime ešte, čo sme povedali o dvojznačnosti riešenia pre c vyplývajúceho z Timoshenkovej rovnice (6), môžeme závislosť rýchlosti c od vlnovej dĺžky λ vyjadriť rovnicou

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right] - \sqrt{\left\{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]\right\}^2 - 4\frac{\mu G}{E}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{4}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^4}}. \tag{25}$$

Korekčný faktor, ktorý výsledok (8) prevádza na (25), je

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{4}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^4}} \doteq \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^4} \tag{26}$$

a je zas väčší ako 1.

B. Vnútorný nepružný odpor vyjadrený vzťahmi (10a) a (11a) podľa novej Sorokinovej hypotézy

Moment ohybovej dvojice síl, ak vnútorný nepružný odpor vyjadríme vzťahom (10a), bude zrejme

$$M = (u + iv)\, EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{27}$$

a) Ak použijeme vzťah (27), dostaneme diferenciálnu rovnicu vlastných kmitov tyče v tvare

$$(u + iv)\, c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{28}$$

S tými istými predpokladmi a tým istým postupom ako vo všetkých troch predchádzajúcich prípadoch dostaneme teraz podmienečné rovnice

$$v c_0^2 k^2 f^4 - 2b\omega = 0;$$
$$u c_0^2 k^2 f^4 + b^2 - \omega^2 = 0.$$

Z prvej z nich vychádza koeficient útlmu

$$b = \frac{v c_0^2 k^2 f^4}{2\omega} \tag{29}$$

a pre rýchlosť c dostávame potom bikvadratickú rovnicu

$$c^4 - u c_0^2 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c^2 - \frac{1}{4} v^2 c_0^4 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 = 0,$$

ktorá zas má jediný reálny kladný koreň

$$c = \frac{2\pi c_0 k}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2 + v^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi c_0 k}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + u)}.$$

Použili sme tu vzťah $u^2 + v^2 = 1$, ktorý vychádza priamo z hodnôt veličín u a v daných vzťahmi (12).

Ak ešte do posledného výsledku dosadíme hodnotu veličiny u, vyjadrenie rýchlosti postupu ohybových vĺn nadobudne tvar

$$c = \frac{2\pi c_0 k}{\lambda}\left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Korekčný faktor

$$\left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{31}$$

je teraz menší ako 1, rýchlosť postupu ohybových vĺn vychádza menšia ako v tom prípade, keď sme nepružný vnútorný odpor nebrali do úvahy. Tento výsledok je z fyzikálneho hľadiska prijateľnejší ako predchádzajúce vzťahy, podľa ktorých vnútorný nepružný odpor zapríčiňoval zväčšenie rýchlosti c.

b) S Rayleighovou opravou na zotrvačnosť rotačného pohybu elementov tyče má diferenciálna rovnica ohybových kmitov tvar

$$(u + iv)\, c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \tag{32}$$

Z nej zas dostaneme podmienečné rovnice

$$v c_0^2 k^2 f^4 - 2(1 + k^2 f^2)\, b\omega = 0,$$
$$u c_0^2 k^2 f^4 + (1 + k^2 f^2)(b^2 - \omega^2) = 0,$$

z ktorých vychádza koeficient útlmu

$$b = \frac{v c_0^2 k^2 f^4}{2(1 + k^2 f^2)\, \omega} \tag{33}$$

a bikvadratická rovnica pre rýchlosť c

$$c^4 - \frac{u c_0^2}{1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2} \cdot \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c_0^2 - \frac{1}{4} \frac{v c_0^2}{\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2\right]^2} \cdot \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^4 = 0.$$

Jediné kladné reálne riešenie tejto rovnice je

$$c = c_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Korekčný faktor, ktorý výsledok (5) prevádza na (34), je taký istý ako v prípade a); je vyjadrený výrazom (31).

c) Pri použití opravenej Sorokinovej hypotézy moment M ohybovej dvojice síl a priečna sila F sú vyjadrené vzťahmi

$$M = (u_1 + iv_1)\, EI \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad F = (u_2 + iv_2)\, \mu G S \gamma,$$

kde Φ je odklon neutrálneho vlákna tyče od jeho rovnovážnej polohy, zapríčinený ohybom, γ je odklon zapríčinený deformáciou v šmyku. u_1 a v_1, resp. u_2 a v_2 sú dané vzťahmi (12) pre rôzne hodnoty koeficientov pohlcovania energie odpovedajúce deformácii v ťahu, resp. deformácii v šmyku. Do našich výpočtov vezmeme zas priemerný koeficient pohlcovania energie

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \doteq \psi_1 \doteq \psi_2 .$$

Potom môžeme písať $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v_2 = v$. Po týchto úpravách dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$(u + iv)^2 c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (u + iv)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}\right] + \frac{k^2 E}{c_0^2 \mu G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \tag{35}$$

Známym už spôsobom dostaneme z nej podmienečné rovnice

$$\left.\begin{aligned} &(u^2 - v^2)\, c_0^2 k^2 f^4 + [u(b^2 - \omega^2) + 2vb\omega]\left[1 + k^2 f^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] + \\ &\qquad + \frac{k^2 E}{c_0^2 \mu G}(b^4 + \omega^4 - 6b^2\omega^2) = 0, \\ &2uvc_0^2 k^2 f^4 + [v(b^2 - \omega^2) - 2ub\omega]\left[1 + k^2 f^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] - \\ &\qquad - 4\frac{k^2 E}{c_0^2 \mu G}(b^3\omega - b\omega^3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Ak do prvej z nich dosadíme približnú hodnotu koeficientu útlmu zo vzťahu (24) a súčasne aj hodnoty u a v zo vzťahov (12), pre rýchlosť c dostaneme bikvadratickú rovnicu

$$\begin{aligned} &\left[1 - 6\left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^4\right]\frac{E}{c_0^2 \mu G}\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 c^4 - \\ &- \frac{1 - 6\left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^4}{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}\left[1 + \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2\left(1 + \frac{E}{\mu G}\right)\right] c^2 + \\ &+ \frac{1 - 6\left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^2} c_0^2 \left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Fyzikálnej skutočnosti odpovedajúce riešenie tejto rovnice je

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right] - \sqrt{\left\{1 + \frac{\mu G}{E}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)^2\right]\right\}^2 - 4\frac{\mu G}{E}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Toto riešenie sa od výsledku (8) odlišuje korekčným faktorom, ktorý je zas totožný s výrazom (31).

4. Záver

Z výsledkov (17), (21) a (25), ktoré sme dostali s použitím pôvodnej Sorokinovej hypotézy – s použitím vzťahov (10) a (11) – by vyplývalo, že nepružný vnútorný odpor má za následok zväčšovanie rýchlosti postupu ohybových vĺn v pružných tyčiach. Korekčné faktory, vypočítané z elementárnej teórie ohybových kmitov – z rovníc (1) a (14) – i z Rayleighovej rovnice (4), resp. (19), majú rovnaké hodnoty a sú vyjadrené výrazom (18). Ak vezmeme priemernú hodnotu $\psi = 0{,}2$, je

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + 1}\right]} \doteq 1{,}0002.$$

Korekčný faktor vypočítaný z Timoshenkovej rovnice (6), resp. (22) je pre $\psi = 0{,}2$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^4} \doteq 1{,}000\,14.$$

Z fyzikálneho hľadiska prijateľnejšie sú však výsledky (30), (34) a (38), ktoré sme získali s použitím vylepšenej Sorokinovej hypotézy – s použitím vzťahov (10a) a (11a). Podľa týchto výsledkov nepružný vnútorný odpor má za následok zmenšenie rýchlosti postupu ohybových vĺn. Zo všetkých troch uvažovaných teórií ohybových kmitov vychádza tu rovnaký korekčný faktor vyjadrený výrazom (31). Pre $\psi = 0{,}2$ je

$$\left[1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \doteq 0{,}999\,987.$$

Podľa toho zmenšenie rýchlosti zapríčinené nepružným vnútorným odporom predstavuje len asi 0,0013 % rýchlosti. Vplyv nepružného vnútorného odporu je teda mizivo malý, prakticky zanedbateľný. Znateľnejšie by sa prejavil len pri materiáloch s väčšou hodnotou koeficientu ψ (napr. železobetón).

Analýza našich výsledkov ukazuje ďalej, že vylepšená Sorokinova teória nepružného vnútorného odporu lepšie vystihuje skutočnosť ako jeho pôvodná teória, ktorá dávala uspokojivé výsledky pri aplikácii na výpočet útlmu kmitov.

LITERATÚRA

[1] Кольский Г., *Волны напряжения в твердых телах*, Москва 1955.
[2] Релей, *Теория звука*, Москва—Ленинград 1940.
[3] Сорокин Е. С., *Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания*, Сборник ЦНИПС, 1951.
[4] Давиденков Н. Н., Журн. тех. Физики 8 (1938), 483.
[5] Timoshenko S., Phil. Mag. 41 (1921), 744.
[6] Timoshenko S., *Pružnost a pevnost*, Praha 1951.
[7] Ilkovič D., *Fyzika*, Bratislava 1959.
[8] Pochhammer L., J. reine angew. Math. 81 (1876), 324.
[9] Bancroft D., Phys. Rev. 59 (1941), 588.
[10] Hudson G. E., Phys. Rev. 63 (1943), 46.
[11] Davies R. M., Phil. Trans. A 240 (1948), 375.
[12] Сорокин Е. С., *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*, Москва 1960.

Došlo 15. 6. 1960.

Katedra fyziky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГОГО ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Иван Натер, Соня Горватова, Драгомила Нечова

Резюме

В статье решаются дифференциальные уравнения изгибных колебаний стержней (14), (19), (22) с учетом неупругого внутреннего сопротивления. Если неупругое внутреннее сопротивление выражено согласно первоначальному гипотезу Сорокина (10), (11), то зависимость скорости распространения изгибных волн от длины волны дают выражения (17), (21), (25). В этом случае неупругое внутренне сопротивление вызывает незначительное увеличение скорости. Если же неупругое внутренне сопротивление представлено согласно новому улучшенному гипотезу Сорокина (10a), (11a) [уравнения (28), (32), (35)] то указанная зависимость дается выражениями (30), (34), (38). Неупругое внутреннее сопротивление вызывает здесь незначительное уменьшение скорости. Результаты показывают, что новый гипотез Сорокина является более удобным.

ON THE INFLUENCE OF INELASTIC INTERNAL RESISTANCE UPON THE VELOCITY OF BENDING WAVES IN ELASTIC BARS

Ivan Náter, Soňa Horváthová, Drahomila Netschová

Summary

Differential equation of transverse vibrations of bars (14), (19), (22) are solved, when the "inelastic internal resistance" is taken into consideration. If the inelastic internal resistance is expressed according to original Sorokin's hypothesis (10), (11), the dependence of the velocity of bending waves on the wavelength is expressed by the expressions (17), (21), (25). Within these expressions the inelastic internal resistance causes a slight augmentation of velocity. If the inelastic internal resistance is expressed according to new ameliorated Sorokin's hypothesis (10a), (11a) [the equations (28), (32), (35)], this dependence is expressed by the expressions (30), (34), (38). Here the inelastic internal resistance causes a slight diminution of velocity. The results show that the new Sorokin's hypothesis is more suitable.