MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 1, 1961

POLOGRUPY, V KTORÝCH KAŽDÝ ĽAVÝ VLASTNÝ IDEÁL JE GRUPOU

RENÁTA HRMOVÁ, Bratislava

Nech S je pologrupa. Ľavým ideálom pologrupy S nazývame neprázdnu podmnožinu $L \subset S$, pre ktorú platí $SL \subset L$; pravý ideál pologrupy S je neprázdna podmnožina $R \subset S$, pre ktorú platí $RS \subset R$. Množina $N \subset S$, ktorá je súčasne ľavým i pravým ideálom, nazýva sa obojstranný ideál.

Ľavý ideál L nazýva sa minimálnym ľavým ideálom pologrupy S, ak neexistuje ľavý ideál $L' \neq L$, pre ktorý platí $L' \subset L$. Analogicky definujeme pojem minimálneho pravého a obojstranného ideálu.

Ľavý ideál L pologrupy S nazýva sa jej maximálnym ľavým ideálom, ak neexistuje ľavý ideál $\bar{L} \neq S$, pre ktorý platí $L \subsetneqq \bar{L}$. Analogicky definujeme maximálny pravý a obojstranný ideál.

Pologrupa P nazýva sa zľava jednoduchá, ak pre každé $a \in P$ platí $Pa = P$. Takáto pologrupa neobsahuje ľavý ideál $L \neq P$. Pologrupa P je teda zľava jednoduchá práve vtedy, keď ku každej dvojici $a, b \in P$ existuje také $x \in P$, že $xa = b$.

Š. Schwarz v práci [1] našiel konštrukciu všetkých pologrúp, ktoré nie sú grupami a v ktorých každý vlastný ľavý i pravý ideál je grupa. Takéto pologrupy nazval F-pologrupami.

V tejto práci sa budeme zaoberať pologrupami, v ktorých každý ľavý vlastný ideál je grupou. Pretože zľava jednoduchá pologrupa neobsahuje ľavý ideál $\neq P$, je účelné zaviesť túto definíciu:

Definícia 1. *Pologrupa S nazýva sa F_l-pologrupou, ak nie je zľava jednoduchá a každý jej vlastný ľavý ideál je grupou.*

V tejto práci nájdeme konštrukciu všetkých F_l-pologrúp.

Na začiatku uvedieme niekoľko pomocných viet, ktoré sú väčšinou známe.

Lemma 1. *Nech L je ľavý ideál pologrupy S a P zľava jednoduchá pologrupa, pre ktorú platí $P \subset S$. Ak $L \cap P \neq \emptyset$, potom $P \subset L$.*

Dôkaz. Nech $a \in L \cap P$. Potom $P = Pa \subset PL \subset L$, č. b. t. d.

Lemma 2. *Nech L je minimálny ľavý ideál pologrupy S. Nech $a \in S$. Potom aj La je minimálny ľavý ideál pologrupy S.*

Dôkaz. Pozri [1], Lemma 3.

Priamym dôsledkom lemmy 2 je

Lemma 3. *Ak pologrupa S obsahuje práve jeden minimálny ľavý ideál L, potom pre každý prvok $a \in S$ platí $La = L$ a L je aj minimálny obojstranný ideál pologrupy S.*

Lemma 4. *Nech N je maximálny obojstranný ideál, ktorý nie je obsažený v žiadnom ľavom ideáli $\neq S$. Označme $T = S - N$.*

a) *Ak T obsahuje viac elementov než jeden, alebo ak T obsahuje práve jeden idempotentný element, potom T je zľava jednoduchá pologrupa.*

b) *Ak T obsahuje práve jeden element u, ktorý nie je idempotent, je $u^2 \in N$.*

Dôkaz. Je obsiahnutý v dôkaze lemmy 4 práce [1].

Lemma 5. *Nech P je zľava jednoduchá pologrupa a G je grupa. Nech φ je homomorfné zobrazenie P do G. Potom $\varphi(P)$ je grupa.*

Dôkaz. Množina $\varphi(P)$ nevyhnutne obsahuje jednotku e grupy G. Pre každé $a \in P$ platí totiž $Pa = P$, takže ku každému prvku $a \in P$ existuje prvok $e_a \in P$ taký, že $e_a a = a$. Označme $\varphi(e_a) = x$, $\varphi(a) = y$. Potom $\varphi(e_a a) = \varphi(e_a)\,\varphi(a) = xy$. Pretože však $\varphi(e_a a) = \varphi(a) = y$, platí $y = xy$. Keďže $x, y \in G$, je $x = e$. Treba ešte ukázať, že ku každému prvku $\varphi(a) \in \varphi(P)$ existuje ľavý inverzný element. Podľa predošlého existuje ku každému prvku $c \in P$ také $e_c \in P$, že $e_c c = c$ a $\varphi(e_c) = e$. Pretože P je zľava jednoduchá pologrupa, existuje ku každej dvojici prvkov $a, e_c \in P$ prvok $b \in P$ taký, že $ba = e_c$. Teda $\varphi(ba) = \varphi(b)\,\varphi(a) = e$, t. j. ku každému prvku $\varphi(a) \in \varphi(P)$ existuje ľavý inverzný element $[\varphi(a)]^{-1} = \varphi(b)$.

* * *

Teraz si všimneme niektoré vlastnosti F_l-pologrúp.

Lemma 6. *V F_l-pologrupe je každý jej vlastný ľavý ideál súčasne jej maximálnym i minimálnym ľavým ideálom.*

Dôkaz. Nech S je F_l-pologrupa a nech L je jej vlastný ľavý ideál. Nech $L' \neq S$ je ľavý vlastný ideál pologrupy S, pre ktorý platí $L \subset L'$. Pretože L' je grupa, je nevyhnutne $L = L'$, a teda L je maximálnym ideálom pologrupy S. Podobne ukážeme, že L je minimálny ľavý ideál.

Na príkladoch možno ukázať, že existujú F_l-pologrupy, ktoré obsahujú dva ľavé vlastné ideály, i F_l-pologrupy iba s jedným vlastným ľavým ideálom.

Lemma 7. *Keď S je F_l-pologrupa, potom nastane práve jeden z týchto dvoch prípadov:*

A. *S má práve dva vlastné ľavé ideály L_1, L_2 a platí $S = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.*
B. *S má práve jeden ľavý vlastný ideál.*

Dôkaz je obsiahnutý v dôkaze lemmy 2 práce [1].

Lemma 8. *Nech S je F_l-pologrupa, ktorá obsahuje práve jeden minimálny ľavý ideál $L \neq S$. Potom L je súčasne jediným maximálnym ľavým i jediným maximálnym obojstranným vlastným ideálom pologrupy S.*

Dôkaz. Z lemmy 3 vyplýva, že L je vlastným obojstranným ideálom pologrupy S. Z lemmy 6 vyplýva, že L je maximálnym ľavým i maximálnym obojstranným vlastným ideálom pologrupy S.

V ďalšom sa budeme osobitne zaoberať prípadmi A a B z lemmy 7.

Prípad A

Podobne ako v práci [1] možno dokázať tvrdenia:

Nech S je F_l-pologrupa, ktorá obsahuje práve dva ľavé vlastné ideály L_1, L_2. Nech e_1, e_2 sú jednotkové elementy grúp L_1, L_2. Potom $L_1 \approx L_2$, platí $e_i e_k = e_k$ $(i, k = 1, 2)$ a S je sprava jednoduchá pologrupa, izomorfná s direktným súčinom $G \times \{e_1, e_2\}$, kde G je grupa, izomorfná s grupami L_1, L_2.

Naopak, keď G je ľubovoľná grupa a množina $\{e_1, e_2\}$ je pologrupa, v ktorej je definované násobenia vzťahom $e_i e_k = e_k$ $(i, k = 1, 2)$, potom direktný súčin $S = G \times \{e_1, e_2\}$ je F_l-pologrupa. Pologrupa S obsahuje práve dva vlastné ľavé ideály $G \times e_1$, $G \times e_2$, ktoré sú zrejme grupami.

Prípad B

Nech S je F_l-pologrupa, ktorá má práve jeden ľavý vlastný ideál L. V dôsledku lemmy 8 je L maximálnym obojstranným i maximálnym ľavým ideálom pologrupy S, a teda podľa lemmy 4 treba rozoznávať dva prípady:

α) $S - L = \{u\}$, kde u nie je idempotent, teda $u^2 \in L$. Nech e je jednotka grupy L. Označme $b = eu$. Potom $b \in L$ a zrejme $u^2 = b^2$. Ďalej pre každé $x \in L$ platí $bx = ux$ a $xu = xb$.

Nech teraz naopak G je grupa a nech u je ľubovoľný element, pre ktorý platí u non $\in G$. Zvoľme ľubovoľný prvok $b \in G$, utvorme množinu $S = G \cup \{u\}$ a definujme v nej násobenie takto:

a) $x \odot y = xy$, keď $x, y \in G$,
b) $u \odot u = b^2$,
c) $u \odot x = bx$, $x \odot u = xb$ pre každé $x \in G$.

Ľahko možno dokázať, že S je pologrupa. Budeme ju označovať znakom $S[G, u, b]$.

Rovnako je zrejmé, že S je F_l-pologrupa, ktorá obsahuje jediný vlastný ľavý ideál G.

β) Nech S je F_l-pologrupa, ktorá má práve jeden ľavý ideál L a nech množina $S - L = P$ pozostáva alebo z jedného idempotentného elementu, alebo nech pozostáva z viac prvkov než jedného. Podľa lemmy 8 a podľa lemmy 4 platí $S = L \cup P$, $L \cap P = \emptyset$, kde L je grupa a P zľava jednoduchá pologrupa.

Nech e_0 je jednotkový element grupy L. Pre každý prvok $a \in P$ platí $ae_0 \in aL \subset L$. Ukážeme, že zobrazenie $a \to ae_0$ je homomorfné zobrazenie pologrupy P do grupy L. Ak totiž $a \in P$, $b \in P$ a $a \to ae_0$, $b \to be_0$, platí $(ab)\,e_0 = a(be_0) = a[e_0(be_0)] = (ae_0)(be_0)$. Podľa lemmy 5 je teda zobrazenie $\varphi(a) = ae_0$ zobrazením zľava jednoduchej pologrupy P na istú podgrupu grupy L.

Nech naopak P je ľubovoľná zľava jednoduchá pologrupa a G ľubovoľná grupa, pre ktorú platí $G \cap P = \emptyset$. Nech φ je homomorfné zobrazenie pologrupy P do grupy G.*) Označme násobenie v pologrupe P znakom $(..)$, násobenie v grupe G znakom $(.)$. Zostrojme množinu $S = \{P \cup G\}$ s násobením $\odot$, definovaným takto:

$$x \odot y \begin{cases} x\,..\,y, & \text{keď } x, y \in P, \\ x\,.\,y, & \text{keď } x, y \in G, \\ \varphi(x)\,.\,y, & \text{keď } x \in P, y \in G \\ x\,.\,\varphi(y), & \text{keď } x \in G, y \in P \end{cases}$$

Ľahko dokážeme, že násobenie $\odot$ je asociatívne a že množina S je teda pologrupa. Budeme ju označovať znakom $S[P, G, \varphi]$.

Nech teraz e_0 je jednotkový prvok grupy G. Potom pre každý prvok $a \in P$ platí $\varphi(a) = \varphi(a)\,.\,e_0 = a \odot e_0$. Zobrazenie φ pologrupy P do grupy G je teda charakterizované vzťahom $\varphi(a) = a \odot e_0$.

Nakoniec ukážeme, že pologrupa $S = S[P, G, \varphi]$ je F_l-pologrupa, ktorá obsahuje práve jeden ľavý vlastný ideál. Grupa G je zrejme vlastný ľavý a dokonca obojstranný ideál pologrupy $S[P, G, \varphi]$. Nech $L \neq G$ je ľavý ideál pologrupy $S[P, G, \varphi]$. Potom $L \cap P \neq \emptyset$ a z lemmy 1 vyplýva $P \subset L$. Ďalej platí $S \odot L \subset L$. Keďže pre každý $a \in L$ vyplýva $e_0 \odot a = e_0\,.\,\varphi(a) \in G$, $G \cap L \neq \emptyset$. Preto je podľa lemmy 1 $G \subset L$. Úhrnom $S = P \cup G \subset L$, t. j. $S = L$ č. b. t. d.

Z úvah v odsekoch A a B vyplýva priamo tento konečný výsledok:

Veta. *Pologrupa S je F_l-pologrupou vtedy a len vtedy, keď je izomorfná s pologrupou, ktorá patrí do niektorej z týchto tried pologrúp:*

a) *trieda pologrúp typu $G \times H$, kde G je grupa a H je pologrupa pozostávajúca z dvoch idempotentov, medzi ktorými je definované násobenie vzťahom $e_i e_k = e_k$, $(i, k = 1, 2)$.*

b) *trieda pologrúp typu $S[G, u, b]$,*

c) *trieda pologrúp typu $S[P, G, \varphi]$.*

* Konštrukcia všetkých homomorfných zobrazení zľava jednoduchých pologrúp do grupy je opísaná v práci [3]. O homomorfizmoch špeciálnejších pologrúp hovorí práca [4].

LITERATÚRA

[1] Schwarz Š., *Semigroups in which every proper subideal is a group*, Acta scientiarum Mathematicarum, Szeged, 21, (1960), 125—134.

[2] Schwarz Š., Максимальные идеалы в теории полугрупп, Чех. Мат. Журнал 3 (78) (1953), 365—383.

[3] Глускин Л. М., Гомоморфизмы односторонне простых полугрупп на группу, Доклады АН СССР 102 (1955), 673—676.

[4] Cohn P. M., *On the structure of sesquilateral division semigroups*, Proc. London Math. Soc. (3) 8, (1958), 466—480.

Došlo 25. 5. 1960.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ПОЛУГРУППЫ, В КОТОРУХ ВСЯКИЙ ЛЕБЫЙ ИДЕАЛ ЯВЛЯЕТСЯ ГРУППОЙ

Рената Грмова

Резюме

В настоящей статье обобщаются результаты статьи [1].

Полугруппа S называется простой слева, если она не содержит отличных от S левых идеалов.

Полугруппа S называется F_l-полугруппой, если она не является простой слева и всякий ее левый идеал, отличный от S, является группой.

В статье доказываются эти результаты:

В F_l-полугруппе все отличные от S левые идеалы являются одновременно максимальными и минимальными идеалами этой полугруппы.

Если S является F_l-полугруппой, то имеет место один и только один из следующих случаев:

А. В S существует два различных левых идеала $L_1 \subsetneqq S$, $L_2 \subsetneqq S$ и имеет место $S = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Б. В S существует только один левый идеал $L \subsetneqq S$.

Будем говорить, что полугруппа S является полугруппой типа $S(G, u, b)$ если $S = G \cup \{u\}$, где G — группа, u — элемент $\notin G$ и мултипликация $\odot$ в S определена следующим образом: $x \odot y = xy$ для $x, y \in G$; $u \odot u = b^2$ для некоторого $b \in G$; $u \odot x = bx$, $x \odot u = xb$ для любого $x \in G$, где xb, bx являются произведениями элементов в группе G.

Пусть φ — гомоморфизм простой слева полугруппы P в группу G. Говорим, что полугруппа S является полугруппой типа $S(P, G, \varphi)$, если $S = G \cup P$, $G \cap P = \emptyset$ и мултипликация $\odot$ в S определена при помощи мултипликации $(..)$ в полугруппе P и мултипликации $(.)$ в группе G следующим образом: $x \odot y = x\,..\,y$ для $x, y \in P$; $x \odot y = x\,.\,y$ для $x, y \in G$; $x \odot y = \varphi(x)\,.\,y$ для $x \in P$, $y \in G$; $x \odot y = x\,.\,\varphi(y)$ для $x \in G$, $y \in P$.

В статье доказана теорема:

Полугруппа S является F_l-полугруппой тогда и только тогда если она изоморфна полугруппе, принадлежащей одному из следующих классов полугрупп:

а) Класс полугрупп типа $G \times H$, где G группа и $H = \{e_1, e_2\}$ — полугруппа, в которой $e_i e_k = e_k$ $(i, k = 1, 2)$,

б) Класс полугрупп типа $S(G, u, b)$,

в) Класс полугрупп типа $S(P, G, \varphi)$.

SEMIGROUPS IN WHICH EVERY PROPER LEFT IDEAL IS A GROUP

Renáta Hrmová

Summary

The purpose of this paper is a generalization of results of the paper [1].

A semigroup S is called to be left simple if it does not contain a proper left ideal.

A semigroup S is called to be an F_l-semigroup if it is not a left simple semigroup, but every left proper ideal of S is a group.

In this paper following results are proved:

If S is an F_l-semigroup, then every left proper ideal of S is a maximal and also a minimal proper ideal of S.

If S is an F_l-semigroup, then one and only one of the following cases holds:

A. S contains precisely two different proper left ideals $L_1 \subsetneqq S$, $L_2 \subsetneqq S$ and $S = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ holds.

B. S contains a unique left proper ideal.

By semigroup of the type $S(G, u, b)$ we mean a semigroup $S = \{G \cup u\}$, where G is a group, u is an element non $\in G$ with the multiplication $\odot$ defined as follows: $x \odot y = xy$ for $x, y \in G$, $u \odot u = b^2$ for some $b \in G$, $u \odot x = bx$, $x \odot u = xb$, for every $x \in G$; xy, bx, xb are the products of the elements in the group G.

Let φ is a homomorphic mapping of a left simple semigroup P into the group G. By the semigroup of the type $S(P, G, \varphi)$ we mean a semigroup $S = \{G \cup P\}$, $G \cap P = \emptyset$, with the multiplication $\odot$ defined by the multiplication (.) in the group G and by the multiplication (..) in the semigroup P, as follows: $x \odot y = x \,..\, y$, for $x, y \in P$, $x \odot y = x \,.\, y$ for $x, y \in G$, $x \odot y = \varphi(x) \,.\, y$ for $x \in P$, $y \in G$, $x \odot y = x \,.\, \varphi(y)$, for $x \in G$, $y \in P$.

In this paper following theorem is proved:

A semigroup S is an F_l-semigroup if and only if it is isomorphic with a semigroup bellonging to one of the following classes of semigroups:

a) The class of semigroups of the type $G \times H$, where G is a group and $H = \{e_1, e_2\}$ is a semigroup in which $e_i e_k = e_k$ $(i, k = 1, 2)$.

b) The class of semigroups of the type $S(G, u, b)$.

c) The class of semigroups of the type $S(P, G, \varphi)$.