O SÚČTE DVOCH LINEÁRNYCH PODPRIESTOROV

TATIANA MEDEKOVÁ, Bratislava

V n-rozmernom projektívnom priestore $\mathfrak{P}$ zavedieme sčítanie dvoch bodov takto (podrobnejšie pozri [1]): Zvolíme sčítaciu nadrovinu ω a počiatok sčítania bod $O \notin \omega$. Za súčet dvoch bodov A, B, neležiacich súčasne v nadrovine ω, budeme považovať bod $(A + B)$, ktorý zostrojíme ako priesečník spojníc $[\bar{A}B]$ a $[\bar{B}A]$, pričom body $\bar{A}$ a $\bar{B}$ sú priesečníky spojníc $[OA]$ a $[OB]$ s nadrovinou ω. Ak $\bar{A} \equiv \bar{B}$, ležia body A a B na priamke o, prechádzajúcej bodom O. Potom ich súčet bude bod $(A + B)$, ktorý sa zostrojí pomocou involúcie na priamke o, ktorej samodružný bod je bod $\bar{A}$ a body A, B sú párom zodpovedajúcich si bodov. Bod $(A + B)$ je bod zodpovedajúci v involúcii počiatku O. Ak zvolíme súradnicový systém tak, že nadrovina ω má rovnicu $x_1 = 0$, bod O je jednotkový a body A a B majú súradnice a_i a b_i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$), potom súradnice ich súčtu $(A + B)$ sú

$$x_i' = -a_1b_1 + a_ib_1 + a_1b_i. \qquad (\alpha)$$

Pod súčtom dvoch množín bodov $\mathfrak{M}_1$ a $\mathfrak{M}_2$ budeme rozumieť množinu súčtov všetkých bodov množiny $\mathfrak{M}_1$ so všetkými bodmi množiny $\mathfrak{M}_2$ (ak pre takéto dvojice bodov je súčet definovaný).

Pre jednoduchosť vyjadrovania budeme body nadroviny ω nazývať nevlastnými bodmi; všetky ostatné body budeme nazývať vlastnými.

V tejto práci sa budeme zaoberať súčtami bodov dvoch lineárnych podpriestorov priestoru $\mathfrak{P}$.

Veta 1. *Súčty vlastného bodu A s bodmi X priestoru $\mathfrak{P}$ vyplnia celý priestor $\mathfrak{P}$. Geometrická príbuznosť medzi bodmi X a ich súčtami $(A + X)$ s bodom $A \notin \omega$ je elácia, kde samodružnou je sčítacia nadrovina ω a stredom elácie je nevlastný bod $\bar{A}$ – priesečník spojnice $[OA]$ s nadrovinou ω.*

Dôkaz. Nech bod A má súradnice $a_i (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ a bod X súradnice x_i. Súradnice x_i' ich súčtu $(A + X)$ podľa (α) sú $x_i' = x_1(-a_1 + a_i) + a_1x_i$. Z tvaru rovníc pre súradnicu bodu $(A + X)$ vyplýva, že medzi bodmi X a $(A + X)$ je kolineárny vzťah. Determinant matice tejto kolineácie má tvar

$$
\begin{vmatrix}
a_1, & 0, & 0, & 0, \ldots \\
-a_1 + a_2, & a_1 & 0, & 0, \ldots \\
-a_1 + a_3, & 0, & a_1 & 0, \ldots \\
 & 0, & 0, & a_1 \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{vmatrix}
$$

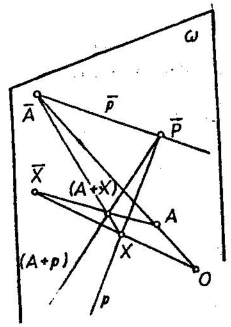
a jeho hodnota je $a_1^{n+1} \neq 0$, pretože bod A neleží v nadrovine ω. Uvedená kolineácia je preto regulárna a nadrovina ω je v tejto kolineácii samodružná. Spojnica každého bodu X s bodom $(A + X)$ pretína nadrovinu ω v priesečníku $\bar{A}$ o súradniciach $(0, -a_1 + a_2, \ldots, -a_1 + a_{n+1})$. Pretože bod A je pevne zvolený, súradnice bodu A sú tiež konštantné, ak $X \notin \omega$. (Ak $X \in \omega$, potom $X \equiv (A + X)$). Výpočtom zistíme, že bod $\bar{A}$ je priesečník spojnice $[OA]$ s nadrovinou ω. Keďže spojnice všetkých dvojíc bodov X, $(A + X)$ prechádzajú spoločným bodom, ktorý leží v samodružnej nadrovine, je uvedená kolineácia eláciou.

Poznámka. Ak bod A je nevlastný, súčty všetkých vlastných bodov X sa s ním stotožnia; v tomto prípade nemá zmysel hovoriť o súčtoch bodu A s bodmi $X \in \omega$. Ak je bod A totožný so stredom sčítania O, jeho súčet s ľubovoľným bodom X je tenstý bod (pozri [1], str. 131) a príbuznosť je identita.

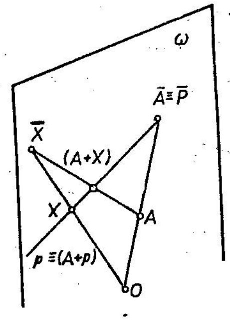
Dôsledok. Súčtom vlastného bodu A a lineárneho podpriestoru $\mathfrak{A}$ priestoru $\mathfrak{P}$ je lineárny podpriestor $(A + \mathfrak{A})$ tej istej dimenzie; pritom podpriestory $\mathfrak{A}$ a $(A + \mathfrak{A})$ si odpovedajú v elácii, opísanej vo vete 1. Jednoduchá konštrukcia lineárneho podpriestoru $(A + \mathfrak{A})$, pričom $\mathfrak{A} \notin \omega$ je táto: Stačí nájsť súčet $(A + X)$ bodu A s jedným vlastným bodom $X \in \mathfrak{A}$. Spojenie bodu $(A + X)$ s nevlastnými bodmi lineárneho podpriestoru $\mathfrak{A}$ je už podpriestor $(A + \mathfrak{A})$.

Zaoberajme sa podrobnejšie súčtom bodu a priamky. Sčítavame vlastný bod A s priamkou p (obr. 1 pre $n = 3$), ktorej nevlastný bod označme $\bar{P}$. Bod $\bar{A}$ je nevlastný bod spojnice $[OA]$. Ak na priamke p neleží ani jeden z bodov A, O, $\bar{A}$, súčet je priamka $(A + p)$, ktorá prechádza bodom $\bar{P}$. Priamky p a $(A + p)$ ležia s bodom $\bar{A}$ v spoločnej rovine, ktorej priesečnica $\bar{p}$ s nadrovinou ω je spojnica $[\bar{P}\bar{A}]$. Ak priamka p prechádza bodom $\bar{A}$ (body A, O na nej neležia), t. j. $\bar{P} \equiv \bar{A}$ (obr. 2 pre $n = 3$), vtedy priamka p sa stotožní s priamkou $(A + p)$. Medzi bodmi $X \in p$ a súčtami $(A + X)$ je parabolická projektivita so samodružným bodom $\bar{A}$. Stotožnenie priamky p a súčtu $(A + p)$ nastane aj v tom prípade, ak priamka p prechádza bodmi A a O. Vtedy prechádza totiž aj bodom $\bar{A}$. Špeciálne ak $A \equiv O$, vzťah medzi bodmi X a $(A + X)$ je identita. Keď na priamke p leží bod A (body $\bar{A}$ a O nie sú jej bodmi), jej súčet s vlastným bodom A je priamka $(A + p)$, štvrtá harmonická k spojnici $[O\bar{P}]$ vzhľadom na priamky $\bar{p} \equiv [\bar{P}\bar{A}]$ a p (obr. 3 pre $n = 3$). Totiž súčet bodu A so sebou je podľa [1] bod S, pre ktorý platí $(A\bar{A}OS) = -1$. Ak z bodov O, A, $\bar{A}$ patrí priamke p len bod O (obr. 4 pre $n = 3$), jej súčet $(A + p)$ s vlastným bodom A je spojnica $[\bar{P}A]$.

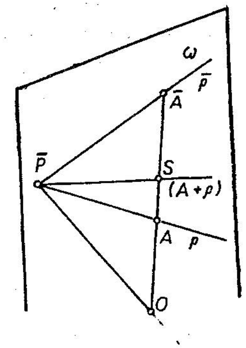
Veta 2. *Nech nevlastné body $\bar{P}$ a $\bar{N}$ priamok p a n sú od seba rôzne. Potom súčty každého bodu priamky p s priamkou n ležia v rovine σ, ktorá ide bodmi $\bar{P}$ a $\bar{N}$. Sčítaním dostaneme všetky vlastné body roviny σ a body $\bar{P}$ a $\bar{N}$.*



Obr. 1.

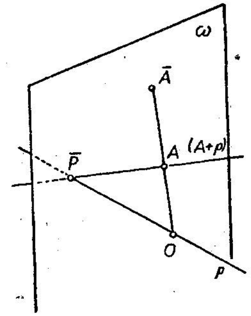


Obr. 2.

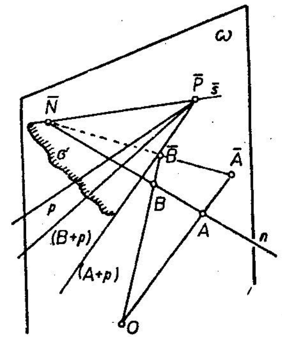


Obr. 3.

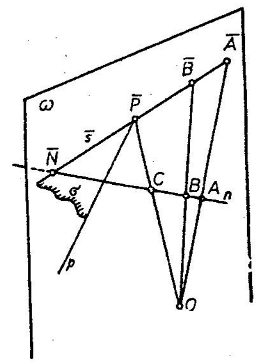
V ďalšom kvôli jednoduchosti pod rovinou σ budeme myslieť vždy rovinu, z ktorej vynecháme nevlastné body, okrem dvoch bodov $\bar{P}$ a $\bar{N}$.



Obr. 4.



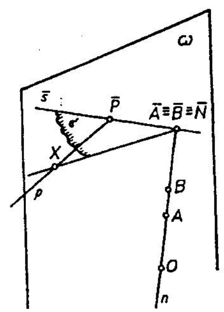
Obr. 5.



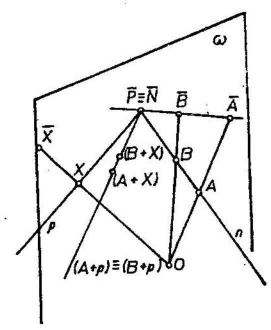
Obr. 6.

Dôkaz. a) Nech body $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{P}$ a $\bar{N}$ neležia na jednej priamke (obr. 5 pre $n = 3$). Zvoľme na priamke n dva rôzne vlastné body A a B. Podľa vety 1 súčet bodu A a priamky p je priamka $(A + p)$, ktorá prechádza bodom $\bar{P}$ a leží v rovine α, určenej priamkou p a bodom $\bar{A}$ (nevlastným bodom spojnice $[OA]$). Súčet bodu B a priamky p je priamka $(B + p)$, rôzna od priamky $(A + p)$, pretože leží v rovine $\beta \neq \alpha$, ktorá prechádza priamkou p a bodom $\bar{B}$, ktorý podľa predpokladu je od bodu $\bar{A}$ rôzny. Jednoduchým výpočtom zistíme, že súčet ľubovoľného bodu $M = \rho_1 A + \rho_2 B$ s priamkou p je priamka $m = \rho_1(A + p) + \rho_2(B + p)$. Z toho vyplýva, že všetky súčty bodov priamky n s priamkou p ležia v rovine σ, ktorá prechádza bodmi $\bar{P}$ a $\bar{N}$. Ďalšie body jej priesečnice $\bar{s}$ s nadrovinou ω nemožno vzhľadom na definíciu sčítania dostať ako súčty. Medzi bodovým radom na priamke n a zväzkom priamok m je projektivita, pretože bod M na priamke $[AB]$ a priamka m vo zväzku $[(A+p)(B+p)]$ majú rovnaké projektívne súradnice.

b) Ak body $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{P}$ a $\bar{N}$ sú bodmi jednej priamky ($\bar{N} \not\equiv \bar{P}$, $\bar{A} \not\equiv \bar{B}$), potom primka n, bod O a spojnica $[\bar{P}\bar{N}]$ ležia v jednej rovine (obr. 6 pre $n = 3$). Zvoľme si na priamke n



Obr. 7.



Obr. 8.

ďalší bod C tak, aby ležal na spojnici $[\bar{P}O]$. Súčtová priamka $(C + p)$ je totožná s priamkou p. Súčtom bodu $A \not\equiv C$ priamky p je priamka $(A + p) \not\equiv p$, lebo zodpovedá priamke p v elácii o strede $\bar{A}$. Súčtom priamok n a p je teda opäť rovina σ, ktorá v tomto špeciálnom prípade prechádza priamkou p.

c) Ak nastane $\bar{A} \equiv \bar{B}$, priamka n prechádza bodom O (obr. 7 pre $n = 3$). Súčet ľubovoľného vlastného bodu $X \in p$ s priamkou n je spojnica $[X\bar{A}]$ (pretože súčtom bodov O a X je bod X). Z toho vyplýva, že súčty všetkých vlastných bodov priamky p s priamkou n tvoria zväzok priamok o strede v bode $\bar{A}$ (s výnimkou spojnice $[\bar{A}\bar{P}]$). Súčty bodov priamok p a n vyplnia opäť rovinu σ, prechádzajúcu priamkou p.

Veta 3. *Nech priamky p a n majú spoločný nevlastný bod $\bar{P}$. Potom ich súčtom je priamka, prechádzajúca týmto bodom.*

Dôkaz. Sčítajme vlastný bod A priamky n s bodom X priamky p (obr. 8 pre $n = 3$), čím dostaneme bod $(A + X)$. Ak sčítame bod A s celou priamkou p, súčet je priamka $(A + p)$, ktorá prechádza bodom $\bar{P}$ a bodom $(A + X)$. Podobne súčet bodu $B \not\equiv A$ priamky n s priamkou p je priamka $(B + p)$, prechádzajúca tiež bodmi $\bar{P}$ a $(B + X)$. Pretože však súčet bodu $X \in p$ s priamkou n musí byť priamka, na ktorej ležia aj súčty jej bodov A a B s bodom X, priamky $(A + p)$ a $(B + p)$ splynú.

Poznámka: Ak rovina ω je nevlastná rovina n-rozmerného euklidovského priestoru, zodpovedá sčítanie dvoch bodov sčítaniu dvoch vektorov so spoločným počiatkom v bode O a koncovými bodmi v bodoch A, B. Súčtom je koncový bod vektora

ich súčtu (jeho počiatok je opäť v bode O). Vo vete 2 a 3 ide potom o súčty dvoch sústav terminokolineárnych vektorov. Všetky súčtové vektory sú podľa viet 2 a 3 terminokomplanárne (rovina, v ktorej ležia ich koncové body, je rovnobežná s priamkami, na ktorých ležia koncové body vektorov dvoch sčítavaných sústav), okrem toho prípadu, ak priamky, na ktorých ležia koncové body sčítavaných terminokolineárnych sústav, sú rovnobežné. Vtedy aj súčtové vektory sú terminokolineárne.

Veta 4. *Nech lineárny podpriestor $\mathfrak{A} \not\subset \omega$ má dimenziu a, lineárny podpriestor $\mathfrak{B} \not\subset \omega$ dimenziu b a lineárny podpriestor $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \omega$ má dimenziu c. Potom súčet podpriestorov $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ je podpriestor $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ (s výnimkou všetkých nevlastných bodov, ktoré nepatria do žiadneho z podpriestorov $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$), ktorý má dimenziu $d = a + b - c - 1$.*

Dôkaz: Z predchádzajúceho je zrejmé, že veta platí pre $a = b = 1$. Predpokladajme, že platí aj pre dva podpriestory $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ o dimenziach a a b. Dokážeme, že platí aj pre podpriestory $\mathfrak{A}'$ (dimenzie $a + 1$) a $\mathfrak{B}$. Prienik $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cap \omega$ má dimenziu $a - 1$ a prienik $\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \cap \omega$ dimenziu $b - 1$. Súčtový podpriestor $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ má podľa predpokladu dimenziu $d = a + b - c - 1$ a pretože neleží celý v nadrovine ω (obsahuje z nej súčty takých dvojíc bodov $A \in \mathfrak{A}$ a $B \in \mathfrak{B}$, že vždy jeden sčítavaný bod je nevlastný), má jeho prienik $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ s nadrovinou ω dimenziu $a + b - c - 2$. Podpriestor $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ je zrejme spojením podpriestorov $\bar{\mathfrak{A}}$ a $\bar{\mathfrak{B}}$. Pretože podpriestor $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ poznáme, stačí na určenie podpriestoru $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ nájsť jeho jeden vlastný bod ako súčet dvoch ľubovoľných bodov podpriestorov $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. Vezmime jeden vlastný bod A podpriestoru $\mathfrak{A}$ a jeden vlastný bod A', ktorý neprislúcha podpriestoru $\mathfrak{A}$. Potom spojením priamky $m \equiv [AA']$ a podpriestoru $\mathfrak{A}$ vznikne podpriestor $\mathfrak{A}'$ dimenzie $a + 1$. Podpriestor $\mathfrak{A}'$ môžeme vytvoriť aj ako súhrn podpriestorov ${}^{x}\mathfrak{A}$, ktoré vzniknú spojením bodov X priamky m s podpriestorom $\bar{\mathfrak{A}}$. Súhrn podpriestorov $(\mathfrak{B} + {}^{x}\mathfrak{A})$ je súčtom podpriestorov $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}'$. Všetky tieto podpriestory dostaneme tak, že sčítame vlastný bod B podpriestoru $\mathfrak{B}$ s priamkou m. Súčtom je priamka $(B + m)$. Zjednotením priamky $(B + m)$ a podpriestoru $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ dostávame podpriestor $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B})$ (s výnimkou nevlastných bodov, neprislúchajúcich $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$). Tento má dimenziu $a + b - c$, ak priamka $(B + m)$ nemá s podpriestorom $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ nijaký spoločný bod, alebo dimenziu $a + b + c - 1$, ak priamka $(B + m)$ a podpriestor $\overline{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$ majú spoločný bod. V prvom prípade musia mať podpriestory $\bar{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{A}'}$, prienik dimenzie c, v druhom prípade má ich prienik dimenziu $c + 1$.

LITERATÚRA

[1] Medeková T., *O súčte bodov dvoch nadrovín*, Matematicko-fyzikálny časopis IX (1959), 129—134.
[2] Bertini, *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*, Wien 1924.

Došlo 26. 4. 1960.

Katedra matematiky
Stavebnej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ÜBER DIE SUMME VON ZWEI LINEAREN UNTERRÄUMEN

Tatiana Medeková

Zusammenfassung

In einem projektiven n-dimensionalen Raume $\mathfrak{P}$ ist mittels eines Anfangspunktes O und einer Hyperebene ω eine Addition der Punktepaare eingeführt. Diese Addition ist eine Verallgemeinerung der Vektoraddition im euklidischen Raume [1].

In dieser Arbeit untersucht man zuerst die Summe eines Punktes A und des Raumes $\mathfrak{P}$. Es zeigt sich, daß zwischen den Punkten des Raumes $\mathfrak{P}$ und den Summen seiner Punkte mit dem Punkte A eine Homologie ist. Dann beschäftigt man sich mit der Summe zweier Geraden. Zuletzt beweist dieser Satz: Wenn ein linearer Unterraum $\mathfrak{A}$ die Dimension a, ein linearer Unterraum $\mathfrak{B}$ die Dimension b und ein linearer Unterraum $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \omega$ die Dimension c hat, dann ist die Summe der Unterräume $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein Unterraum mit der Dimension $a + b - c - 1$.

О СУММЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Татьяна Медекова

Резюме

В проективном n-мерном пространстве $\mathfrak{P}$ определено посредством фиксированной точки O и гиперплоскости ω сложение точек, которое является обобщением сложения векторов в евклидовом пространстве (см. [1]).

В настоящей статье прежде всего рассматривается сумма одной точки A и пространства $\mathfrak{P}$. Показывается, что между точками пространства $\mathfrak{P}$ и их суммами с точкой A существует определенная связь — особая гомология. Затем изучается сумма двух прямых. Наконец доказывается следующая теорема:

Пусть линейное подпространство $\mathfrak{A}$ имеет размерность a, линейное подпространство $\mathfrak{B}$ размерность b и линейное подпространство $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \omega$ размерность c. Потом сумма подпространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ является подпространством размерности $a + b - c - 1$.