# ZOBRAZENIE SÚČINU PROJEKTÍVNYCH PRÍBUZNOSTÍ NA PRIAMKE

JÁN HORNIAČEK, Bratislava

Práca [1] sa zaoberá zobrazením projektívnych príbuzností na priamke na projektívny trojrozmerný priestor. Rovnicami

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{22}$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, je určená projektívna príbuznosť na priamke, v ktorej bodu o projektívnych súradniciach $(x_1, x_2)$ odpovedá bod $(x_1', x_2')$. Táto príbuznosť sa nezmení, ak miesto čísel $a_{11}, \ldots, a_{22}$ dosadíme čísla $\lambda a_{11}, \ldots, \lambda a_{22}$. Teda každej takejto príbuznosti môžeme priradiť bod trojrozmerného projektívneho priestoru o súradniciach $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Príbuznosti, pre ktoré platí $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, sú regulárne projektivity; tie, pre ktoré platí $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, sú singulárne projektivity. Ak položíme

$$a_{11} = y_1, \quad a_{12} = y_2, \quad a_{21} = y_3, \quad a_{22} = y_4, \tag{1}$$

potom body odpovedajúce singulárnym projektivitám vyhovujú rovnici

$$y_1y_4 - y_2y_3 = 0, \tag{2}$$

čo je regulárna priamková kvadrika $Q$. Identická projektivita

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= \quad x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

sa zobrazí do bodu $E(1, 0, 0, 1)$.

Tento článok sa bude zaoberať kolineáciami určenými súčinmi projektívnych príbuzností **B**, **A**.

Nech príbuznosť **B** je pevná, určená rovnicami

$$\begin{aligned} x_1' &= b_1x_1 + b_2x_2, \\ x_2' &= b_3x_1 + b_4x_2; \end{aligned} \tag{4}$$

príbuznosť **A** nech je premenná, daná rovnicami

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ x_1'' &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2'. \end{aligned} \tag{5}$$

Príbuznosti **B** je priradený bod $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$, príbuznosti **A** bod $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Pre súčin **B** . **A** v tomto poradí po malej úprave dostávame:

$$
(6) \quad \begin{aligned} x_1' &= (a_{11}b_1 + a_{12}b_3)\,x_1 + (a_{11}b_2 + a_{12}b_4)\,x_2, \\ x_2' &= (a_{21}b_1 + a_{22}b_3)\,x_1 + (a_{21}b_2 + a_{22}b_4)\,x_2. \end{aligned}
$$

Súčin **B** . **A** je zase projektívna príbuznosť, ktorej je priradený bod $A'(a_{11}', a_{12}', a_{21}', a_{22}')$. Tak pri pevnom bode $B$ každému bodu $A$ odpovedá bod $A'$, pričom medzi ich súradnicami platí vzťah:

$$
(7) \quad \begin{aligned} a_{11}' &= b_1 a_{11} + b_3 a_{12}, \\ a_{12}' &= b_2 a_{11} + b_4 a_{12}, \\ a_{21}' &= b_1 a_{21} + b_3 a_{22}, \\ a_{22}' &= b_2 a_{21} + b_4 a_{22}. \end{aligned}
$$

Tieto rovnice sú rovnicami kolineácie **K** v priestore, ktorá každému bodu $A$ priestoru priraďuje bod priestoru $A'$. Vyšetrujme teraz bližšie túto kolineáciu. Jej samodružné body splňujú sústavu rovníc:

$$
(8) \quad \begin{aligned} (b_1 - \rho)\,a_{11} + b_3 a_{12} &= 0, \\ b_2 a_{11} + (b_4 - \rho)\,a_{12} &= 0, \\ (b_1 - \rho)\,a_{21} + b_3 a_{22} &= 0, \\ b_2 a_{21} + (b_4 - \rho)\,a_{22} &= 0. \end{aligned}
$$

Charakteristická rovnica je

$$
(9) \quad \begin{vmatrix} b_1 - \rho, & b_3, & 0, & 0 \\ b_2, & b_4 - \rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_1 - \rho, & b_3 \\ 0, & 0, & b_2, & b_4 - \rho \end{vmatrix} = 0,
$$

po úprave

$$
(9') \quad \rho^2 - \rho(b_4 + b_1) + b_1 b_4 - b_2 b_3 = 0.
$$

Jej korene sú

$$
\rho_{1,2} = \frac{b_3 + b_1 \pm \sqrt{(b_4 - b_1)^2 + 4b_2 b_3}}{2}.
$$

Druh tejto kolineácie závisí od počtu samodružných bodov a teda od koreňov charakteristickej rovnice, čiže od výrazu $(b_4 - b_1)^2 + 4b_2 b_3$. Podrobnejšie o tejto kolineácii povieme neskoršie, kde v súčine **B** . **A** za projektivitu **B** budeme uvažovať jednotlivé typy projektivít na priamke.



Všimnime si teraz súčin predchádzajúcich projektivít v opačnom poriadku, teda súčin **A** . **B**. Pre tento dostaneme rovnice:

$$
(10) \quad \begin{aligned} x_1' &= (b_1 a_{11} + b_2 a_{21})\,x_1 + (b_1 a_{12} + b_2 a_{22})\,x_2, \\ x_2' &= (b_3 a_{11} + b_4 a_{21})\,x_1 + (b_3 a_{12} + b_4 a_{22})\,x_2. \end{aligned}
$$

Súčin je zase projektivita, ktorej je priradený bod $\bar{A}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{22})$. Pre jeho súradnice platí:

$$
(11) \quad \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= b_1 a_{11} + b_2 a_{21}, \\ \bar{a}_{12} &= b_1 a_{12} + b_2 a_{22}, \\ \bar{a}_{21} &= b_3 a_{11} + b_4 a_{21}, \\ \bar{a}_{22} &= b_3 a_{12} + b_4 a_{22}. \end{aligned}
$$

Tieto rovnice určujú kolineáciu $\bar{\mathbf{K}}$, v ktorej bodu $A$ je priradený bod $\bar{A}$. Charakteristická rovnica tejto kolineácie je

$$
(12) \quad \begin{vmatrix} b_1 - \rho, & 0, & b_2, & 0 \\ 0, & b_1 - \rho, & 0, & b_2 \\ b_3, & 0, & b_4 - \rho, & 0 \\ 0, & b_3, & 0, & b_4 - \rho \end{vmatrix} = 0,
$$

po úprave

$$
\rho^2 - \rho(b_4 + b_1) + b_1 b_4 - b_2 b_3 = 0,
$$

čo je rovnica zhodná s charakteristickou rovnicou súčinu **B** . **A**.

Uvažujme teraz za projektivitu **B** (v predchádzajúcich súčinoch) postupne jednotlivé typy projektivít na priamke.

I. Nech projektivitou **B** je *regulárna hyperbolická projektivita.* Jej rovnice upravíme vhodnou voľbou súradnicového systému na tvar:

$$
(13) \quad \begin{aligned} x_1' &= b_1 x_1, \\ x_2' &= b_4 x_2, \end{aligned}
$$

kde je $b_1 \neq b_4$. V porovnaní zo (4) je teda $b_2 = b_3 = 0$.

a) Dosadením koeficientov tejto projektivity do (7) dostávame rovnice kolineácie $^h\mathbf{K}$, ktorú určuje súčin **B** . **A**:

$$
(14) \quad \begin{aligned} a_{11}' &= b_1 a_{11}, \\ a_{12}' &= b_4 a_{12}, \\ a_{21}' &= b_1 a_{21}, \\ a_{22}' &= b_4 a_{22}. \end{aligned}
$$

Charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} b_1-\rho, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_4-\rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_1-\rho, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_4-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

čiže $(b_1-\rho)^2(b_4-\rho)^2 = 0$. Korene sú: $\rho_{1,2} = b_1$, $\rho_{3,4} = b_4$.

Charakteristická rovnica má dva korene dvojnásobné. Hodnosť charakteristického determinantu je pre obidva dve. Teda v podmienke (8), pre samodružné body, dostávame pre každý koreň charakteristickej rovnice dve rovnice lineárne nezávislé. Pre $\rho_{1,2} = b_1$, po prepísaní podľa vzťahov (1), ich tvar je

$$(15) \equiv o_1 \qquad \begin{aligned} (b_4-b_1)\,y_2 &= 0,\\ (b_4-b_1)\,y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pre $\rho_{3,4} = b_4$

$$(16) \equiv o_2 \qquad \begin{aligned} (b_1-b_4)\,y_1 &= 0,\\ (b_1-b_4)\,y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dvojice rovníc (15), (16) určujú priamky, ktoré sú navzájom mimobežné a sú geometrickým miestom samodružných bodov. Podobne by sme dostali rovnice pre samodružné roviny. Tieto tvoria dva zväzky rovín, ktorých osi splývajú s priamkami $o_1$, $o_2$. Teda ${}^h\mathbf{K}$ je dvojosová kolineácia s osami $o_1$, $o_2$. Ak spojíme ľubovoľný bod jednej osi s ľubovoľným bodom druhej osi, dostaneme samodružnú priamku. Teda odpovedajúce si body v tejto kolineácii ležia na priečke mimobežných osí idúcej jedným z nich.

**Veta 1.** *Charakteristický dvojpomer kolineácie* ${}^h\mathbf{K}$ *sa rovná charakteristickému dvojpomeru hyperbolickej projektivity* (13).

Dôkaz: Vyjadrime charakteristický dvojpomer kolineácie ${}^h\mathbf{K}$. Je to dvojpomer bodov $(O_1O_2AA')$, kde $O_1$, $O_2$ sú samodružné body po jednom na priamkach $o_1$, $o_2$; $A$, $A'$ sú odpovedajúce si body v kolineácii ${}^h\mathbf{K}$ ležiace na priamke $O_1O_2$. Zvoľme na $o_1$ bod $O_1(z_1, 0, z_3, 0)$, na $o_2$ bod $O_2(0, z_2, 0, z_4)$. Priamka $O_1O_2$ má potom parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1z_1,\\ y_2 &= l_2z_2,\\ y_3 &= l_1z_3,\\ y_4 &= l_2z_4. \end{aligned}$$

Na tejto priamke si zvolíme bod $A(l_1z_1, l_2z_2, l_1z_3, l_2z_4)$. Dosadením do sústavy (14) za $a_{11}, \ldots, a_{22}$ dostaneme k nemu odpovedajúci bod $A'(b_1l_1z_1, b_4l_2z_2, b_1l_1z_3, b_4l_2z_4)$.



Parametre bodov $O_1$, $O_2$, $A$, $A'$ na priamke $O_1O_2$ sú tieto:

$$\begin{aligned} O_1 &\ldots 1, 0,\\ O_2 &\ldots 0, 1,\\ A &\ldots l_1, l_2,\\ A' &\ldots b_1l_1, b_4l_2. \end{aligned}$$

Potom charakteristický dvojpomer $(O_1O_2AA') = \dfrac{l_2}{-l_1} : \dfrac{b_4l_2}{-b_1l_1} = \dfrac{b_1}{b_4}$.

Pomer $b_1/b_4$ je konštantný, pretože $b_1$, $b_4$ sú stále hodnoty, vystupujúce ako koeficienty pevnej hyperbolickej projektivity (13).

Jednoduchým výpočtom zistíme, že charakteristický dvojpomer projektivity $\mathbf{B}$ je tiež $b_1/b_4$.

Z poslednej vety a z odseku pred ňou vyplýva táto konštrukcia bodu odpovedajúceho danému bodu:

*Daným bodom $A$, ku ktorému hľadáme odpovedajúci bod, zostrojíme priečku mimobežiek $o_1$, $o_2$, nájdeme jej priesečníky s osami $o_1$, $o_2$, t. j. body $O_1$, $O_2$ a na priamke $o_1$, $o_2$ nájdeme bod $A'$ tak, aby platilo $(O_1O_2AA') = b_1/b_4$.*

**Veta 2.** Osi kolineácie ${}^h\mathbf{K}$ $o_1$, $o_2$ sú tvoriace priamky toho istého regulu kvadriky $Q$, prechádzajúce priesečníkmi priamky $e \equiv E{}^hE'$ s kvadrikou. Pritom bod ${}^hE'$ je bód priradený bodu $E(1, 0, 0, 1)$, v kolineácii ${}^h\mathbf{K}$ a jeho súradnice podľa (14) sú ${}^hE'(b_1, 0, 0, b_4)$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že priamky $o_1$, $o_2$ ležia na kvadrike $Q$. Zvoľme dva body na priamke $o_1$: $O_1(z_1, 0, z_3, 0)$, $L_1(z_1, 0, 0, 0)$. Potom parametrické vyjadrenie osi $o_1$ je:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1'z_1 + l_2'z_1,\\ y_2 &= 0,\\ y_3 &= l_1'z_3,\\ y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vyjadrení do rovnice (2) kvadriky $Q$ zistíme, že táto je splnená pre každé $l_1'$, $l_2'$, teda priamka $o_1$ leží na kvadrike. Tým istým spôsobom by sme zistili, že i os $o_2$ leží na kvadrike $Q$. Ako sme už povedali, priamky $o_1$, $o_2$ sú navzájom mimobežné, z čoho vyplýva, že sú to priamky jedného regulu.

V nasledujúcej časti dôkazu určíme priesečníky priamky $e \equiv {}^hE'E$ s kvadrikou $Q$. Parametrické vyjadrenie priamky $e$ je

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1' + k_2'b_1,\\ y_2 &= 0,\\ y_3 &= 0,\\ y_4 &= k_1' + k_2'b_4. \end{aligned}$$

Dosadením do rovnice kvadriky zistíme, že parametre bodov, v ktorých priamka $e$ pretína kvadriku $Q$, sú $k_1' = -b_4, k_2' = 1$ pre jeden a $k_1' = -b_1, k_2' = 1$ pre druhý bod. Hľadané priesečníky potom sú

$$M(-b_4 + b_1, 0, 0, 0), \qquad N(0, 0, 0, -b_1 + b_4).$$

Dosadením súradníc bodu $M$ do rovníc (15) zistíme, že tieto sú pre bod $M$ splnené. Teda os $o_1$ určená rovnicami (15) prechádza bodom $M$. Dosadením súradníc bodu $N$ do (16) zistíme, že os $o_2$ prechádza bodom $N$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Charakteristický dvojpomer kolineácie ${}^h\mathbf{K}$, o ktorom sa hovorí ve vete 1, je rovný dvojpomeru bodov $(MNEB)$, pretože body $M$, $N$ sú samodružné body priamok $o_1$, $o_2$ a $E$, $B \equiv {}^hE'$ sú odpovedajúce.

b) Dosadením koeficientov hyperbolickej projektivity (13) do rovníc (11) dostaneme rovnice kolineácie ${}^h\overline{\mathbf{K}}$, ktorú určuje súčin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (súčin v opačnom poradí, ako bolo v predchádzajúcom):

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= b_1 a_{11}, \\
\bar{a}_{12} &= \quad b_1 a_{12}, \\
\bar{a}_{21} &= \qquad b_4 a_{21}, \\
\bar{a}_{22} &= \qquad\quad b_4 a_{22}.
\end{aligned}$$

Charakteristická rovnica

$$\begin{vmatrix} b_1 - \rho, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_1 - \rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_4 - \rho, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_4 - \rho \end{vmatrix} = 0$$

má korene $\rho_{1,2} = b_1$, $\rho_{3,4} = b_4$. Týmto koreňom odpovedajú v sústave (8) dve dvojice lineárne nezávislých rovníc, ktoré určujú množinu samodružných bodov Pre $\rho = b_1$ po dosadení vzťahov (1) je to

$$(17) \equiv \bar{o}_1 \qquad \begin{aligned} (b_4 - b_1)\,y_3 &= 0, \\ (b_4 - b_1)\,y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pre $\rho = b_4$

$$(18) \equiv \bar{o}_2 \qquad \begin{aligned} (b_1 - b_4)\,y_1 &= 0, \\ (b_1 - b_4)\,y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Teda samodružné body vyplňujú zase dve priamky, (17), (18), ktoré sú navzájom mimobežné. Tak ako v prípade a) by sme zistili, že priamky $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ ležia na kvadrike $Q$ a prechádzajú po rade bodmi $M$, $N$, priesečníkmi priamky $e \equiv E{}^h\bar{E}$ s kvadrikou $Q$. (${}^h\bar{E} \equiv {}^hE'$). Porovnaním rovníc priamok $o_1$, $\bar{o}_1$ a $o_2$, $\bar{o}_2$ vidíme, že každá z týchto dvojíc prechádza jedným spoločným bodom (prvá bodom $M$, druhá $N$), ale nesplývajú. Z toho všetkého ako vysledok vyplýva



**veta 3.** *Osi $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ kolineácie ${}^h\overline{\mathbf{K}}$ sú tvoriace priamky kvadriky $Q$ prechádzajúce priesečníkmi priamky $e$ s kvadrikou, a to združeného regulu, s regulom, do ktorého patria $o_1$, $o_2$.*

Ďalšie vlastnosti tejto kolineácie sú zhodné s vlastnosťami kolineácie ${}^h\mathbf{K}$.

II. Nech projektivitou $\mathbf{B}$ je *regulárna parabolická projektivita*. Vhodnou voľbou súradnicového systému nadobudnú jej rovnice tvar

$$(19) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + b_2 x_2, \\ x_2' &= \qquad \lambda x_2. \end{aligned}$$

V porovnaní so sústavou (4) je $b_1 = \lambda$, $b_2 = b_2$, $b_3 = 0$, $b_4 = \lambda$.

a) Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^p\mathbf{K}$ určenej súčinom $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$(20) \qquad \begin{aligned}
a_{11}' &= \lambda a_{11}, \\
a_{12}' &= b_2 a_{11} + \lambda a_{12}, \\
a_{21}' &= \qquad \lambda a_{21}, \\
a_{22}' &= \qquad b_2 a_{21} + \lambda a_{22}.
\end{aligned}$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie

$$\begin{vmatrix} \lambda - \rho, & 0, & 0, & 0 \\ b_2, & \lambda - \rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda - \rho, & 0 \\ 0, & 0, & b_2, & \lambda - \rho \end{vmatrix} = 0$$

má 4násobný koreň $\rho_{1,2,3,4} = \lambda$. Hodnosť charakteristického determinantu pre tento koreň je dve. Potom v sústave (8) sú dve rovnice lineárne nezávislé. Po dosadení vzťahov (1) ich tvar je

$$(21) \equiv o \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 &= 0, \\ b_2 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Samodružné body vyplňujú priamku – os kolineácie – určenú rovnicami (21).

Tak by sme zistili i to, že samodružné roviny tvoria zväzok rovín, ktorého osou je priamka $o$ (priamka samodružných bodov).

O vzájomnej polohe osi kolineácie a kvadriky $Q$ hovorí

**veta 4.** *Os $o$ kolineácie ${}^p\mathbf{K}$ je tvoriaca priamka kvadriky prechádzajúca dotykovým bodom priamky $e \equiv E{}^pE'$ s kvadrikou $Q$, pričom bod ${}^pE'$ je bod odpovedajúci v tejto kolineácii bodu $E$ a jeho súradnice podľa* (20) *sú:* ${}^pE'(\lambda, b_2, 0, \lambda)$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že os $o$ leží na kvadrike. Zvoľme si na priamke $o$ dva body: $C(0, 1, 0, 1)$, $D(0, 0, 0, 1)$. Jej parametrické vyjadrenie potom je:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= k_1, \\ y_3 &= 0, \\ y_4 &= k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Dosadením do rovnice kvadriky $Q$ zistíme, že táto je splnená pre každé $k_1$, $k_2$. Teda priamka $o$ leží na kvadrike $Q$.

Určíme teraz vzájomnú polohu priamky $e$ a kvadratiky $Q$. Parametrické vyjadrenie priamky $e$ je:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1\lambda + l_2, \\ y_2 &= l_1 b_2, \\ y_3 &= 0, \\ y_4 &= l_1\lambda + l_2. \end{aligned}$$

Po dosadení do rovníc kvadriky $Q$ zistíme, že priamka $e$ sa dotýka plochy $Q$ a parametre odpovedajúce dotykovému bodu sú:

$$l_2 = -\lambda, \qquad l_1 = 1.$$

Dotykový bod je potom $T(0, b_2, 0, 0)$. Týmto bodom prechádza priamka $o$, čo vidieť po jeho dosadení do rovníc (21).

b) Dosadením koeficientov projektivity (19) do (11) za $b_1, b_2, b_3, b_4$ dostaneme rovnice kolineácie ${}^{p}\bar{K}$, ktorú určuje súčin $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \lambda a_{11} + b_2 a_{21}, \\ \bar{a}_{12} &= \lambda a_{12} + b_2 a_{22}, \\ \bar{a}_{21} &= \lambda a_{21} + \quad, \\ \bar{a}_{22} &= \lambda a_{22}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica má tie isté korene ako pri kolineácii ${}^{p}K$, t. j. $\rho_{1,2,3,4} = \lambda$. Z podmienky (8) pre samodružné body dostávame os kolineácie $\bar{o}$, ktorej rovnice sú

$$(22) \equiv \bar{o} \qquad \begin{aligned} b_2 y_3 &= 0, \\ b_2 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

O tejto by sme zistili, tak ako v prípade a), že je to tvoriaca priamka kvadriky $Q$ idúca bodom $T$ regulu združeného s regulom v prípade a).

III. Nech projektivitou $\boldsymbol{B}$ je *regulárna eliptická projektivita.* Vhodnou voľbou súradnicovej sústavy dostaneme pre ňu rovnice:

$$(23) \qquad \begin{aligned} x_1' &= r_2 x_2, \\ x_2' &= r_1 x_1, \end{aligned}$$



kde $r_1$, $r_2$ sú opačných znamienok, čiže $r_1 r_2 < 0$. V porovnaní s rovnicami (4) je

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = r_2, \qquad b_3 = r_1, \qquad b_4 = 0.$$

Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^{e}K$ určenej súčinom $\boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a_{11}' &= r_1 a_{12}, \\ a_{12}' &= r_2 a_{11}, \\ a_{21}' &= r_1 a_{22}, \\ a_{22}' &= r_2 a_{21}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie je

$$\begin{vmatrix} -\rho, & r_1, & 0, & 0 \\ r_2, & -\rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\rho, & r_1 \\ 0, & 0, & r_2, & -\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave dostaneme

$$(\rho^2 - r_1 r_2)(\rho^2 - r_1 r_2) = 0.$$

Korene potom sú

$$\rho_{1,2,3,4} = \pm i\sqrt{|r_1 r_2|},$$

teda dva korene dvojnásobné. Pre každý tento koreň je hodnosť charakteristického determinantu dve. V rovniciach (8) pre samodružné body sú dve rovnice lineárne nezávislé. Ich tvar po prepísaní podľa (1) je

$$(24) \qquad \begin{aligned} r_2 y_1 - \left(\pm i\sqrt{|r_1 r_2|}\right) y_2 &= 0, \\ -\left(\pm i\sqrt{|r_1 r_2|}\right) y_3 + r_1 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Samodružné body vyplňujú dve komplexne združené priamky o rovniciach (24). Ďalšie vlastnosti tejto kolineácie sú obdobné ako pri dvojosovej kolineácii ${}^{h}K$.

IV. Nech projektivitou $\boldsymbol{B}$ je *identická projektivita*

$$\begin{aligned} x_1' &= t x_1, \\ x_2' & \quad t x_2. \end{aligned}$$

V porovnaní s rovnicami (4) máme

$$b_1 = t, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 0, \qquad b_4 = t.$$

Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^{i}K$ určenej súčinom $\boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a_{11}' &= t a_{11}, \\ a_{12}' &= t a_{12}, \\ a_{21}' &= t a_{21}, \\ a_{22}' &= t a_{22}. \end{aligned}$$

Dostávame jednoduchý prípad identickej kolineácie. Obdobne i kolineácia ${}^{i}\bar{K}$ by bola identická.

V. 1. Nech projektivitou **B** je *singulárna projektivita II. druhu.* (Jej obrazom je bod kvadriky $Q$ neležiaci v polárnej rovine bodu $E(1, 0, 0, 1)$ vzhľadom na kvadriku $Q$). Pre koeficienty tejto projektivity potom platí

$$b_1 b_4 = b_2 b_3. \tag{25}$$

Polárna rovina bodu $E$ vzhľadom na kvadriku $Q$ je

$$y_1 + y_4 = 0.$$

Teda bod $B$ priradený projektivite **B** (tu uvažovanej) splňuje vzťah

$$-b_1 \neq b_4. \tag{26}$$

Súčin projektivity **B** a ľubovoľnej projektivity **A** určuje kolineáciu ${}^{s}\mathbf{K}_2$, ktorej rovnicami sú rovnice (7). V charakteristickej rovnici (9) po použití podmienky (25) absolútny člen je rovný nule. Táto rovnica má potom dva dvojnásobné korene, a to

$$\rho_{1,2} = b_4 + b_1, \qquad \rho_{3,4} = 0.$$

Hodnosť charakteristického determinantu pre každý z týchto koreňov je dve. Pre $\rho_{1,2} = b_4 + b_1$ dostávame v sústave (8) dve rovnice lineárne nezávislé, ktoré po prepísaní podľa vzťahov (1) majú tvar

$$(27) \equiv o_1 \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 - b_1 y_2 &= 0, \\ -b_4 y_3 + b_3 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Je to priamka samodružných bodov. Pre $\rho_{3,4} = 0$ dostávame v sústave (8) tiež dve rovnice lineárne nezávislé

$$(28) \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 + b_4 y_2 &= 0, \\ b_1 y_3 + b_3 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Tieto určujú priamku, ktorej bodom neodpovedajú v kolineácii ${}^{s}\mathbf{K}_2$ žiadne body priastoru.

**Veta 5.** *Priamky $o_1$, $o_2$ navzájom mimobežné sú tvoriace priamky kvadriky $Q$ toho istého regulu. Priamka $o_1$ prechádza bodom ${}^{2}E' \equiv B$, priamka $o_2$ druhým priesečníkom $P$ priamky $e \equiv E^{h}E'$ s kvadrikou $Q$.*

Dôkaz by sa urobil obdobne ako vo vete 2.

**Veta 6.** *Bod $A'$ odpovedajúci ľubovoľnému bodu $A$ priestoru, neležiacemu na $o_2$, je na priamke $o_1$ a na priečke $p$ mimobežiek $o_1$, $o_2$ vedenej bodom $A$.*

Dôkaz. Bodu $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ podľa rovníc (7) odpovedá v kolineácii ${}^{s}\mathbf{K}_2$ bod

$$A'(b_1 a_{11} + b_3 a_{12}, \quad b_2 a_{11} + b_4 a_{12}, \quad b_1 a_{21} + b_3 a_{22}, \quad b_2 a_{21} + b_4 a_{22}).$$



Dosadením súradníc bodu $A'$ do rovníc (27) zistíme, že bod $A'$ leží na priamke $o_1$. Tým je prvá časť vety dokázaná. Zvoľme teraz ľubovoľný bod na priamke $o_1$. Nech je to bod $O_1(b_3, b_4, b_1, b_2)$. Podobne na $o_2$ bod $O_2(b_4, -b_2, b_3, -b_1)$. Priamka $p \equiv O_1 O_2$ je ľubovoľná priečka mimobežiek $o_1 o_2$. Jej ľubovoľný bod $A \neq O_2$ má súradnice:

$$A(k_1 b_3 + k_2 b_4, \quad k_1 b_4 - k_2 b_2, \quad k_1 b_1 + k_2 b_3, \quad k_1 b_2 - k_2 b_1),$$

kde $k_1 \neq 0$. Dosadením týchto súradníc do (7) dostaneme po malej úprave súradnice odpovedajúceho bodu $A'$ takto:

$$A'[b_3 k_1 (b_1 + b_4), \quad b_4 k_1 (b_1 + b_4), \quad b_1 k_1 (b_1 + b_4), \quad b_2 k_1 (b_1 + b_4)].$$

Porovnaním ľahko zistíme, že je $A' \equiv O_1$, teda $A'$ je priesečníkom priamky $o_1$ a priamky $p$.

Poznámka. Z dôkazu vidieť, že všetkým bodom priamky $p$ odpovedá jeden bod $A' \equiv O_1$.

2. Nech projektivitou **B** je *singulárna projektivita I. druhu.* (Jej obrazom je bod kvadriky ležiaci v polárnej rovine bodu $E$ vzhľadom na kvadriku $Q$.) Pre koeficienty tejto projektivity platí vzťah (25) a opak vzťahu (26), t. j.

$$-b_1 = b_4. \tag{29}$$

Rovnice kolineácie ${}^{s}\mathbf{K}_1$ určenej súčinom **B** . **A** dostaneme, ak do rovníc (7) dosadíme podmienku (29). Sú to:

$$(30) \qquad \begin{aligned} a'_{11} &= b_1 a_{11} + b_3 a_{12}, \\ a'_{12} &= b_2 a_{11} - b_1 a_{12}, \\ a'_{21} &= b_1 a_{21} + b_3 a_{22}, \\ a'_{22} &= b_2 a_{21} - b_1 a_{22}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie má štvornásobný koreň $\rho_{1,2,3,4} = 0$. Hodnosť charakteristického determinantu pre tento koreň je dve. V sústave (8) sú potom dve rovnice lineárne nezávislé. Po použití vzťahov (1) ich tvar je

$$(31) \equiv o \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 - b_1 y_2 &= 0, \\ b_1 y_3 + b_3 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Táto priamka je geometrickým miestom bodov, ktorým neodpovedá žiadny bod priestoru. Podobne ako v predchádzajúcich úvahách sa zistí, že priamka $o$ je tvoriaca priamka kvadriky $Q$ idúca bodom $B(b_1, b_2, b_3, -b_1)$. Ľubovoľnému bodu $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ priestoru, neležiacemu na $o$, odpovedá podľa rovníc (30) bod

$$A'(b_1 a_{11} + b_3 a_{12}, \quad b_2 a_{11} - b_1 a_{12}, \quad b_1 a_{21} + b_3 a_{22}, \quad b_2 a_{21} - b_1 a_{22}).$$

Dosadením jeho súradníc do (31) zistíme, že leží na priamke $o$.

## LITERATÚRA

[1] Medek V., *Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke,* Matematicko-fyzikálny časopis SAV, VI (1956), 98—108.
[2] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie,* JČMF, Praha 1948.

Došlo 22. 4. 1960.

*Katedra deskriptívnej geometrie*
*Slovenskej vysokej školy technickej*
*v Bratislave*

## ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Ян Горнячек

### Резюме

В этой статье рассматриваются произведения проективных преобразований прямой линии. Всякому проективному преобразованию **A** соответствует точка $A$ трехмерного проективного пространства. Пусть произведению **B** . **A** (при постояним преобразовании **B**) отвечает точка $A'$. Это соотношение между точками $A$, $A'$ является коллинеацией **K**. Последняя рассмотривается в таких случаях, когда **B** — регулярное проективное преобразование: гиперболическое, параболическое, эллиптическое, а также идентичное, как и в случае, когда **B**-сингулярное проективное преобразование. Здесь же рассмотривается произведение **A** . **B** определяющее коллинеацию $\bar{\mathbf{K}}$.

## DIE ABBILDUNG DES PRODUKTES DER PROJEKTIVITÄTEN AUF EINER GERADEN

J. Horniaček

### Zusammenfassung

In dieser Abhandlung werden die Produkte der Projektivitäten auf einer Geraden untersucht. Einer jeden Projektivität **A** ist ein Punkt $A$ des dreidimenzionalen projektiven Raumes zugereiht. Dann entspricht dem Produkt **B** . **A** (bei einer festen Projektivität **B**) der Punkt $A$. Die Beziehung zwischen den Punkten $A$, $A'$ ist die Kolineation **K**. Sie ist untersucht sowol in Fällen, wenn **B** eine reguläre hyperbolische, parabolische, eliptische oder identische Projektivität, als auch in dem Falle, wenn **B** eine singuläre Projektivität ist. Es ist auch das Produkt **A** . **B** untersucht, daß die Kolineation $\bar{\mathbf{K}}$ bestimmt.