MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 1, 1961

КОЛЕБАНИЯ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В РЯДЕ ПОВТОРНЫХ ПОЧТИ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

АНТОН КОТЦИГ (Anton Kotzig). Братислава

1. О проблематике в общих чертах

Предметом наших исследований будет система вероятностей в ряде некоторых следующих друг за другом опытов $E_1, E_2, \dots, E_n$. Мы ограничимся случаем, когда результатом какого бы то ни было опыта может быть или значение 1 или значение 0. Ход первых n опытов будет описан некоторой последовательностью $X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$, причем мы положим $x_i = 1$, соотв. $x_i = 0$ тогда и только тогда, когда результатом опыта E_i является значение 1, соотв. 0 ($i = 1, 2, \dots, n$).

Вероятность того, что результаты ряда опытов $E_1, E_2, \dots, E_n$ будут описаны последовательностью $X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$, мы будем обозначать символом $P(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для упрощения символики мы положим

$$P(X_1 \equiv 1) = p; \qquad P(X_0) = 1.$$

Далее, мы ограничимся случаем, когда абсолютная вероятность того, что в результате опыта E_i получится значение 1, одинакова для всех $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. когда имеет место

$$\sum_{(m_{i-1})} P(X_i \equiv x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1) = p, \tag{1}$$

где сумма в левой части уравнения распространяется на все различные (допустимые) последовательности $X_{i-1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Пусть $X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторая последовательность, описывающая ход первых n опытов. Условную вероятность того, что $(n + 1)$-й опыт даст в результате значение 1 (соотв. 0) при условии, что ход первых n опытов описывается последовательностью X_n, мы обозначим символом $P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)$ (соотв. символом $P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)$). Итак, имеет место

$$\left.\begin{aligned} P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{P(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 1)}{P(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{P(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 0)}{P(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и для любой допустимой последовательности $X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет также место

$$P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) + P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1. \tag{3}$$

Ясно, что из выполнения условия (1) еще не следует, что условная вероятность $P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не зависит от выбора последовательности X_n. Из большого количества способов, какими эта условная вероятность может зависеть от последовательности X_n (при сохранении свойства, выраженного уравнением (1)), мы ограничимся тем случаем, когда существуют функции F, G так, что для всех допустимых последовательностей $X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место

$$\left.\begin{aligned} P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) &= F[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)], \\ P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) &= G[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ясно, что в нашем частном случае (т. е. когда имеет место уравнение (4)- можно вычислить вероятность $P(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для любой из допустимых последовательностей $X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$, если известна вероятность p и если известны функции F, G.

Из требования (1) и из уравнений (4) следует, что для всех натуральных n и для всех допустимых последовательностей $X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$ функции F, G должны удовлетворять условию

$$\left.\begin{aligned} &\xi \,.\, F(\xi) + (1-\xi)\, G(\xi) = \xi, \\ \text{где}\qquad &\xi = P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Кроме этого требования (которое следует уже из принятия предположения (1)) мы потребуем от функций F, G, чтобы для всех ξ из уравнения (5) имело место

$$F[G(\xi)] = G[F(\xi)]. \tag{6}$$

Это дальнейшее требование не означает в сущности ничего иного, чем требование, чтобы условная вероятность $P_i^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 0, 1)$ зависела только от того, сколько раз в последовательности X_n встречается значение 1 (соотв. значение 0), но не от того, в каком порядке эти значения в последовательности встречаются.

Из наложенного на функции F, G и формулированного в уравнении (6) требования вытекает следующее: для любой перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет место

$$P(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_n' \equiv x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n}), \tag{7}$$

следовательно, в смысле работы [1] наша система вероятностей является системой вероятностей в последовательности повторных почти независимых опытов.

Обозначим через $P[\xi_0, \xi_1]$ вероятность того, что ход первых $\xi_0 + \xi_1$ опытов будет описываться некоторой последовательностью $X_{\xi_0+\xi_1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{\xi_0+\xi_1}$ такой, что в ней значение 0 (соотв. 1) встречается в точности ξ_0 (соотв. ξ_1) раз.

Тогда, очевидно, будет

$$P[\xi_0, \xi_1] = \frac{(\xi_0 + \xi_1)!}{\xi_0!\,\xi_1!} \,.\, P(X_{\xi_0+\xi_1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{\xi_0+\xi_1}).$$

Символ $P_0^*[\xi_0, \xi_1]$, соотв. $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$ мы используем для обозначения условной вероятности того, что в $(\xi_0 + \xi_1 + 1)$-м опыте результатом опыта будет значение 0, соотв. значение 1, при условии, что при первых $\xi_0 + \xi_1$ опытах значение i было результатом опыта в точности ξ_i раз $(i = 0, 1)$.

Пусть $X_{n+k} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}$ — какая-либо допустимая последовательность, описывающая ход первых $n + k$ опытов. Мы будем говорить, что ход последних k опытов (т. е. ход опытов от $(n + 1)$-го до $(n + k)$-го) является нормальным, если и только если имеет место

$$\sum_{i=1}^{k} x_{n+i} = kp.$$

Очевидно, что при $0 \neq p \neq 1$ ход одного опыта никогда не является нормальным. Из определения нормального хода также непосредственно следует, что ход конечного числа опытов не может быть нормальным в том случае, если p — иррациональное число.

Сформулируем теперь последнее требование, налагаемое на функции F, G: от функций F, G мы будем требоватть, чтобы для любых двух целых неотрицательных чисел ξ_0, ξ_1 имело место

$$\left.\begin{aligned} &P_1^*[\xi_0 + c_0, \xi_1 + c_1] = P_1^*[\xi_0, \xi_1], \qquad \text{где} \qquad c_1 = p(c_0 + c_1) \\ &\text{если } p \text{ — рациональное число, и соответственно} \\ &\lim_{\frac{c_1}{c_0+c_1} \to p} P_1^*[\xi_0 + c_0, \xi_1 + c_1] = P_1^*[\xi_0, \xi_1], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

если p — иррационально. Это требование можно формулировать еще так: Условная вероятность того, что в результате $(m + 1)$-го опыта получится значение 1 (соотв. значение 0), равна условной вероятности того, что в результате $(m + n + 1)$-го опыта в том же самом ряде опытов получится значение 1 (соотв. значение 0) при нормальном ходе опытов от $(m + 1)$-го до $(m + n)$-го.

Функции F, G описывают изменение вероятности того, что результатом опыта будет значение 1, в зависимости от результатов предыдущих опытов. Наложенные на эти функции требования были подобраны так, чтобы с их помощью можно было построить систему вероятностей в стохастическом дискретном альтернирующем процессе, который: (1) является стационарным,

(2) его повторяющиеся опыты почти независимы (в смысле работы [1]) и в котором (3) изменения условных вероятностей можно истолковать как следствие уклонения действительного хода опытов от нормального хода. Так как – как мы уже сказали — ход одного лишь опыта не может быть нормальным, мы будем иметь дело с системой с изменяющимися условными вероятностями. Нашей задачей будет отыскать функции F, G, удовлетворяющие всем указанным выше требованиям.

2. Решение задачи

Пусть относительно чисел α_1, α_2 имеет место $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Дадим при помощи чисел следующее определение функций $F(\xi)$, $G(\xi)$:

$$F(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\xi}, \tag{9}$$

$$G(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\xi}. \tag{10}$$

Функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ определены для всех ξ из интервала (0, 1) и непрерывны во всем этом интервале. Очевидно, для них имеет место

$$\xi \,.\, F(\xi) + (1-\xi)\, G(\xi) = \xi,$$

$$F[G(\xi)] = G[F(\xi)]$$

для всех ξ из интервала (0, 1). Итак, функции F, G обладают двумя из требуемых свойств (см. (5) и (6)) при произвольно выбранных числах α_1, α_2. Напрашивается поэтому мысль, определить функции F, G при помощи уравнений (9), (10) так, чтобы при данном p и при надлежащем подборе чисел α_1, α_2 были выполнены все остальные требования, накладываемые нами на эти функции. Нужно булет удовлетворить требованию, выраженному уравнениями (8), и кроме того для всех целых неотрицательных ξ_0, ξ_1 должно быть

$$= \quad 0 < P_1^*[\xi_0, \xi_1] < 1,$$

т. е. значения $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$, определенные при помощи функций F, G должны быть вероятностями.

Обратим внимание на одно важное для нашей проблемы свойство функций

$$y = H_\rho(x) = \frac{\rho x + 1}{\rho + x}, \tag{11}$$

где y, x — переменные, ρ — некоторая постоянная, абсолютная величина которой больше 1. Имеем

$$H_{\rho_1}[H_{\rho_2}(x)] = H_{\rho_3}(x), \tag{12}$$

где

$$\rho_3 = \frac{\rho_1\rho_2 + 1}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{13}$$

Положив

$$\rho_i = R(r_i) = \frac{e^{r_i} + e^{-r_i}}{e^{r_i} - e^{-r_i}} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

мы получим

$$\rho_3 = R(r_3) = R(r_1 + r_2). \tag{15}$$

Итак, для функций $H_{R(r)}(x)$ имеет место

$$H_{R(r_1)}[H_{R(r_2)}(x)] = H_{R(r_2)}[H_{R(r_1)}(x)] = H_{R(r_1+r_2)}(x). \tag{16}$$

Это нам облегчит надлежащий подбор постоянных при решении нашей задачи. Заменим в уравнениях $y = H_{\rho_i}(x)$ $(i = 1, 2)$ переменные x, y новыми переменными ξ, η при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\xi}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ y &= \frac{2\eta}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и положим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ \rho_2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравнение $y = H_{\rho_1}(x)$ тогда перейдет в уравнение $\eta = F(\xi)$, а уравнение $y = H_{\rho_2}(x)$ — в уравнение $\eta = G(\xi)$.

Заметим, что абсолютная величина чисел ρ_1, ρ_2 всегда больше 1, если только числа α_1, α_2 подобраны так, чтобы было $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Поэтому можно найти числа r_1, r_2 как (единственные) корни уравнений

$$R(r_1) = \rho_1; \qquad R(r_2) = \rho_2.$$

Найдем теперь ответ на вопрос: при каком значении $\rho = R(r)$ функция $y = H_\rho(x)$ перейдет в функцию $y = x$.

Из определения функций

$$H_\rho(x) = \frac{\rho x + 1}{\rho + x} = \frac{x + \frac{1}{\rho}}{1 + \frac{x}{\rho}}$$

непосредственно следует

$$\lim_{\rho\to+\infty} H_\rho(x) = \lim_{\rho\to-\infty} H_\rho(x) = x$$

а так как

$$\lim_{r\to 0+} R(r) = \lim_{r\to 0+} \frac{e^{2r}+1}{e^{2r}-1} = +\infty,$$

$$\lim_{r\to 0-} R(r) = -\infty,$$

то будет также

$$\lim_{r\to 0} H_{R(r)}(x) = x.$$

Итак, функция $y = H_\rho(x) = H_{R(r)}(x)$ перейдет в функцию $y = x$ при $r = 0$. Это дает нам ответ на вопрос: как подобрать при данном числе p числа α_1, α_2, чтобы функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ удовлетворяли требованию, выраженному уравнениями (8). Действительно, положив

$$F(\xi) = F_1(\xi); \qquad G(\xi) = G_1(\xi),$$

$$\underbrace{F[F \ldots [F}_{n \text{ раз}}(\xi)] \ldots] = F_n(\xi); \qquad \underbrace{G[G \ldots [G}_{n \text{ раз}}(\xi)] \ldots] = G_n(\xi),$$

можно условную вероятность $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$ выразить так:

$$P_1^*[\xi_0, \xi_1] = F_{\xi_1}[G_{\xi_0}(p)], \qquad \text{где} \qquad p = P_1^*[0, 0] = P_1^*[X_0].$$

Условие (8) можно притом сформулировать так:

Для любых целых неотрицательных чисел ξ_0, ξ_1 имеет место

$$F_{c_1}\{G_{c_0}\{P_1^*[\xi_0, \xi_1]\}\} = P_1^*[\xi_0, \xi_1] \tag{20}$$

в случае, когда $c_1 = p(c_0 + c_1)$ и p рационально, и соответственно

$$\lim_{\frac{c_1}{c_0+c_1}\to p} F_{c_1}\{G_{c_0}\{P_1^*[\xi_0, \xi_1]\}\} = P_1^*[\xi_0, \xi_1], \tag{21}$$

если p — иррациональное число.

Положим $\xi = P_1^*[\xi_0, \xi_1]$. Если уравнение $\eta = F(\xi)$ перейдет при преобразованиях (17) к виду $y = H_{\rho_1}(x) = H_{R(r_1)}(x)$, а уравнение $\eta = G(\xi)$ к виду $y = H_{R(r_2)}(x)$, то уравнение $\eta = F_n(\xi)$ перейдет при преобразованиях (17) к виду $y = H_{R(nr_1)}(x)$, а уравнение $\eta = G_n(\xi)$ к виду $y = H_{R(nr_2)}(x)$.

Условию (8) можно поэтому придать еще следующий вид: для любого x из некоторого интервала I должно быть

$$H_{R(kpr_1 + k(1-p)r_2)}(x) = x.$$

Но из этого вытекает с учетом (19), что

$$kpr_1 + k(1-p)\,r_2 = 0 \qquad (r_1 \neq 0 \neq r_2;\ k \neq 0;\ 0 < p < 1)$$

или

$$p = \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \tag{22}$$

Если, поэтому, выбрать числа α_1, α_2 так, чтобы имело место соотношение (22), то функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ будут выполнять и требование, выраженное уравнениями (8).

Но, очевидно, $r_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; $r_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}$, откуда

$$p = \frac{\ln(1-\alpha_1) - \ln(1-\alpha_2)}{\ln(1-\alpha_1) - \ln(1-\alpha_2) + \ln\alpha_2 - \ln\alpha_1}. \tag{23}$$

Уравнение (23) можно привести к виду

$$\alpha_1^p(1-\alpha_1)^{1-p} = \alpha_2^p(1-\alpha_2)^{1-p} = T. \tag{24}$$

Итак, α_1, α_2 являются корнями уравнения

$$x^p(1-x)^{1-p} = T. \tag{25}$$

Функция $x^p(1-x)^{1-p}$ имеет в интервале $(0, 1)$ одно экстремальное значение, а именно в точке $x = p$. Она возрастает в интервале $(0, p)$ и убывает в интервале $(p, 1)$.

Если $T > p^p(1-p)^{1-p}$, то уравнение (25) не имеет корней в интервале $(0, 1)$. Если $T = p^p \cdot (1-p)^{1-p}$, то уравнение (25) имеет в интервале $(0, 1)$ один корень $x = p$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = p)$. В этом случае, однако, $F(\xi) = G(\xi) = \xi = p$, что представляет собой случай повторных независимых опытов. Наконец, если

$$0 < T < p^p(1-p)^{1-p}, \tag{26}$$

то уравнение (25) имеет в точности два различных (действительных) корня $\alpha_1 < \alpha_2$ таких, что

$$0 < \alpha_1 < p < \alpha_2 < 1. \tag{27}$$

Для нашей задачи этот случай особенно важен. В этом случае имеет место $F(\alpha_1) = G(\alpha_1) = \alpha_1$; $F(\alpha_2) = G(\alpha_2) = \alpha_2$. Обе функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ возрастают во всем интервале (α_1, α_2), а так как $\alpha_1 < p < \alpha_2$, то обязательно будет $\alpha_1 < F(p) < \alpha_2$; $\alpha_1 < G(p) < \alpha_2$. Кроме того имеет место $\alpha_1 < F(\xi) < \alpha_2$; $\alpha_1 < G(\xi) < \alpha_2$ для всех ξ из интервала (α_1, α_2). Отсюда непосредственно следует, что для любых целых неотрицательных чисел u, v имеет место

$$\alpha_1 < F_u[G_v(p)] < \alpha_2. \tag{28}$$

Иначе говоря, при любых целых неотрицательных числах ξ_0, ξ_1 имеет место

$$= \alpha_1 < P_1^*[\xi_0, \xi_1] < \alpha_2.$$

Результаты наших рассуждений можно срезюмировать так: пусть p — какое-либо число из интервала (0, 1) и T — какое-либо положительное число, меньшее чем $p^p(1-p)^{1-p}$. Обозначим через α_1, α_2 действительные корни уравнения $x^p \cdot (1-x)^{1-p} = T$, содержащиеся в интервале (0, 1) и определим функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ так:

$$F(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\xi},$$

$$G(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\xi},$$

тогда функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ обладают всеми требуемыми нами свойствами. Приведем хотя бы один конкретный пример: возьмем $p = \frac{1}{3}$; $T = \frac{1}{7}\sqrt[3]{36}$. Корни уравнения $x^{\frac{1}{3}}(1 - x^{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{7}\sqrt[3]{36}$ имеют вид $\alpha_1 = \frac{1}{7}$; $\alpha_2 = \frac{4}{7}$. Тогда функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ определяются так:

$$F(\xi) = \frac{5}{7} - \frac{4}{49}\cdot\frac{1}{\xi}; \qquad G(\xi) = -\frac{2}{7} + \frac{18}{49}\cdot\frac{1}{1-\xi}$$

и имеет, например, место $P_1^*[0,0] = \frac{1}{3}$; $P_0^*[0,0] = \frac{2}{3}$; $P_1^*[0,1] = \frac{23}{49}$; $P_0^*[0,1] = \frac{26}{49}$; $P_1^*[1,0] = \frac{13}{49}$; $P_0^*[1,0] = \frac{36}{49}$ и т. д.

3. Замечания к построенной системе вероятностей

Добавим несколько замечаний к предложенной проблеме и к ее решению.

Замечание 1. Из уравнений

$$P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 1) = F[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)],$$
$$P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = G[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)],$$
$$P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n) + P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

следует, что существуют некоторые функции $\bar{F}$, $\bar{G}$, так что имеет место

$$\left.\begin{aligned} P_0^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 0) &= \bar{F}[P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)], \\ P_0^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \dots, x_n, 1) &= \bar{G}[P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \dots, x_n)]. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Связь между функциями $\bar{F}$, $\bar{G}$ и функциями F, G описывается следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}(1-\xi) &= 1 - G(\xi), \\ \bar{G}(1-\xi) &= 1 - F(\xi). \end{aligned}\right. \qquad (30)$$

Итак,

$$\bar{F}(\xi) = (1-\alpha_1) + (1-\alpha_2) - \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{\xi},$$

$$\bar{G}(\xi) = (1-\alpha_1) + (1-\alpha_2) - 1 + \frac{[1-(1-\alpha_1)][1-(1-\alpha_2)]}{1-\xi}.$$

Поэтому, положив $\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_1$; $\bar{\alpha}_2 = 1 - \alpha_2$, мы получили бы даже

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}(\xi) &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\xi}, \\ \bar{G}(\xi) &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - 1 + \frac{(1-\bar{\alpha}_1)(1-\bar{\alpha}_2)}{1-\xi}. \end{aligned}\right. \qquad (31)$$

Разница между функциями F, G и функциями $\bar{F}$, $\bar{G}$ заключается лишь в том, что постоянные α_1, α_2 заменяются постоянными $\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_1$, $\bar{\alpha}_2 = 1 - \alpha_2$. Роль вероятности p при этом играет, очевидно, вероятность $1 - p = \bar{p}$.

Из приведенных рассуждений вытекает также следующее: требование, чтобы имело место $\bar{F}(\xi) = F(\xi)$; $\bar{G}(\xi) = G(\xi)$ (т. е. требование возможности заменить значения 0, 1 — которые могут быть результатами опыта — во всех рассматриваемых условиях), приводит к условию $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Отсюда непосредственно следует, что $p = \frac{1}{2}$ или же $\bar{p} = p$.

В таком случае можно отыскать функции $F = \bar{F}$; $G = \bar{G}$ так: положим $\alpha_1 = \alpha$ $\left(\text{где } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$ и положим $\alpha_2 = 1 - \alpha$. Тогда $p = \frac{1}{2}$ и имеет место

$$\bar{F}(\xi) = F(\xi) = 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\xi},$$

$$\bar{G}(\xi) = G(\xi) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\xi}.$$

Этим достигается полная симметрия в исследуемой системе вероятностей, поскольку речь идет о результатах отдельных опытов.

Замечание 2. Зададим вопрос, какое значение имеет выбор постоянной T (при данном p) и какое значение имеют корни α_1, α_2 уравнения $x^p(1-x)^{1-p} = T$.

Напомним, что в случае $T = p^p(1-p)^{1-p}$ существует лишь один (двукратный) корень этого уравнения, а именно $x = p$. Или — в таком случае $\alpha_1 = \alpha_2 = p$ и функции F, G имели бы вид

$$F(\xi) = 2p - \frac{p^2}{\xi},$$

$$G(\xi) = 2p - 1 + \frac{(1-p)^2}{1-\xi}:$$

Но так как $P_1^*[0, 0] = p$ и имеет место $F(p) = p = G(p)$, то обязательно будет $P_1^*[1, 0] = P_1^*[0, 1] = p$, а следовательно и $P_1^*[\xi_0, \xi_1] = p$ для всех целых неотрицательных ξ_0, ξ_1 В случае $T = p^p(1-p)^{1-p}$ условная вероятность $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$ того, что $(\xi_0 + \xi_1 + 1)$-й опыт закончится значением 1, не зависит от хода предыдущих опытов. Это — как уже упоминалось — случай повторных независимых опытов.

Пусть теперь $0 < T < p^p(1-p)^{1-p}$ и пусть $\alpha_1 < \alpha_2$ — корни рассматриваемого уравнения. Читатель без труда обнаружит, что имеет место

$$\lim_{\xi \to +\infty} P_1^*[\xi, 0] = \alpha_1; \qquad \lim_{\xi \to +\infty} P_1^*[0, \xi] = \alpha_2$$

и что для всех $\xi \in (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет также место

$$\xi < F(\xi); \qquad G(\xi) < \xi.$$

Из указанного следует: если в результате какого-либо опыта получится (соотв. не получится) значение 1, то этим самым повысится (соотв. понизится) вероятность P_1^*; α_2 (соотв. α_1) является наибольшим (соотв. наименьшим) значением, которое может (при неограниченном числе опытов) принять вероятность P_1^*.

Длина интервала (α_1, α_2), в пределах которого может колебаться условная вероятность P_1^* (условная вероятность P_0^* колеблется в интервале той же длины $(1-\alpha_2, 1-\alpha_1)$, может служить мерой нестойкости условных вероятностей в рассматриваемом ряде повторных опытов. Ясно, что эта длина будет при данном p тем больше, чем больше разность $p^p(1-p)^{1-p} - T$. При надлежащем выборе числа T из интервала $(0, p^p(1-p)^{1-p})$ можно построить систему вероятностей, которая точно отражает то свойство действительного процесса, которое мы назвали нестойкостью условных вероятностей в альтернирующем стационарном дискретном стохастическом процессе.

Замечание 3. Хотя функции F, G требуемых нами свойств, отыскание которых было нашей главной задачей, и позволяют вычислить любую из вероятностей $P[\xi_0, \xi_1]$, однако это вычисление, производимое путем последовательных подстановок в соответственные формулы, трудоемко. Возникает вопрос, нельзя-ли

эту вероятность определить более простым путем. Приведем формулу, позволяющую любую из этих вероятностей вычислить прямо:

$$P[\xi_0, \xi_1] = \frac{(\xi_0 + \xi_1)!}{\xi_0! \xi_1!} \left[\frac{\alpha_2 - p}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \alpha_1^{\xi_1}(1-\alpha_1)^{\xi_0} + \frac{p - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \alpha_2^{\xi_1}(1-\alpha_2)^{\xi_0} \right] \quad (32)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2$ — известные нам постоянные из интервала (0, 1) и где вероятность p удовлетворяет уравнению (25). Читатель легко убедится, что при определенной таким образом системе вероятностей удовлетворяются все требования, наложенные на функции F, G. Из вида уравнения (32) ясно, что построенная нами система вероятностей является частным случаем системы вероятностей в последовательностях повторных почти независимых опытов, которой была посвящена работа [1]. Это значительно облегчает, напр., вычисление моментов стохастической переменной $\dfrac{\xi_1}{\xi_0 + \xi_1}$ в ряде $n = \xi_0 + \xi_1$ опытов и позволяет сравнивать их с моментами этой переменной в схеме Бернулли, где относительно вероятности $P[\xi_0, \xi_1]$ — как известно — справедливо соотношение

$$P[\xi_0, \xi_1] = \frac{(\xi_0 + \xi_1)!}{\xi_0! \xi_1!} \cdot p^{\xi_1}(1-p)^{\xi_0}.$$

Так например, момент первого порядка в обеих схемах для всех n одинаков и равен p. Момент второго порядка относительно арифметического среднего в схеме Бернулли для ряда с неограниченным числом опытов стремится (как известно) к нулю, тогда как в нашей схеме он стремится к величине $(p - \alpha_1)(\alpha_2 - p)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kotzig A., *Pravdepodobnosti v postupnosti opakovaných skoro nezávislých pokusov*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV IX (1959), 191—210.

Поступило в редакцию 20. ноября 1959 г.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

SCHWANKUNGEN DER BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEIT IN EINER FOLGE VON WIEDERHOLTEN FAST UNABHÄNGIGEN VERSUCHEN

Anton Kotzig

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Wahrscheinlichkeitssystem in stochastischem und unstetigem Prozeß (in einer Folge von wiederholten Versuchen $E_1, E_2, \ldots, E_n$) behandelt, der alternierend (ein Versuch E_i kann den Wert $x_i = 1$ oder $x_i = 0$ als Ergebnis haben) und stationär ist (für beliebige $i = 1, 2, \ldots$ gilt $P(x_i = 1) = p$, wo $0 < p < 1$).

Es beschreibe die Folge $X_n = x_1, x_2, \ldots, x_n$ (wo $x_i = 1$ oder $x_i = 0$) den Verlauf der ersten n Versuchen und es sei $P(X_n = x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Verlauf der ersten n Versuche durch die Folge beschrieben wird.

Vereinfachungshalber führen wir für die bedingten Wahrscheinlichkeiten diese Bezeichnung ein:

$$P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)}{P(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$$P_0^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)}{P(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

In der Arbeit wird ein Wahrscheinlichkeitssystem betrachtet, das noch folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist, für jede zulässige Folge X_n gilt dann:

$$P(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_n' \equiv x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_n})$$

(d. h. es handelt sich um eine Folge von fast unabhängigen Versuchen im Sinne der Arbeit [1]).

2. Es existieren Funktionen F, G, die die Abhängigkeit der Schwankung der bedingten Wahrscheinlichkeiten vom Verlauf der vorhergehenden Versuche so beschreiben, daß für jede beliebige zulässige Folge $X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

$$P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) = F[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

$$P_1^*(X_{n+1} \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = G[P_1^*(X_n \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

3. Es sei $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$ eine bedingte Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis des $(\xi_0 + \xi_1 + 1)$-ten Versuches der Wert 1 wird, bei der Annahme, daß in den ersten $\xi_0 + \xi_1$ Versuchen der Wert i genau ξ_i-mal $(i = 0,1)$ das Ergebnis des Versuches war.

Von den Funktionen F, G wird verlangt, daß für beliebige ganze nichtnegative festgelegte Zahlen ξ_0, ξ_1 und ganze nichtnegative veränderliche Zahlen c_0, c_1 gelten soll:

$$\lim_{\frac{c_1}{c_0+c_1} \to p} P_1^*[\xi_0 + c_0, \xi_1 + c_1] = P_1^*[\xi_0, \xi_1].$$

In der Arbeit wird die Aufgabe, Wahrscheinlichkeitssysteme zu finden, die alle angeführten Eigenschaften besitzen, gelöst.

Es wird bewiesen, daß ein solches System mittels der folgenderweise definierten Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$ konstruiert werden kann:

$$F(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\xi},$$

$$G(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \frac{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}{1 - \xi},$$

wo α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung $\alpha^p \cdot (1 - \alpha)^{1-p} = T$ bedeuten, die dem Intervall $(0,1)$ gehören, und wo $0 < T \leqq p^p(1 - p)^{1-p}$.

Es wird die Bedeutung der Wahl der Zahl T bei gegebenem $p \in (0,1)$ untersucht und es wird gezeigt, daß von der Wahl der Zahl T das Schwankungsmaß der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_1^*[\xi_0, \xi_1]$, bzw. $P_0[\xi_0, \xi_1]$ in der Folge von wiederholten fast unabhängigen Versuchen abhängt.