MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 1, 1961

POZNÁMKA O k-ROZMERNEJ MIERE V E_n

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

V poznámke je podaný elementárny dôkaz tvrdenia, že k-rozmerná Hausdorffova miera k-rozmernej plochy sa rovná jej plošnému obsahu.

V celom článku E_n znamená n-rozmerný euklidovský priestor, $\delta(A)$ priemer množiny A, L_k k-rozmernú vonkajšiu Lebesgueovu mieru.

Najprv zavedieme definície dvoch dôležitých pojmov, ktoré budeme používať.

Definícia 1. Nech $B \subset E_n$. Označme

$$m_k(\rho, B) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta(A_i)^k,$$

kde infimum je utvorené cez všetky postupnosti $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ n-rozmerných gúľ také, že $\delta(A_i) < \rho$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset B$. Položme

$$m_k(B) = V_k \sup_{\rho > 0} m_k(\rho, B),$$

kde V_k je obsah k-rozmernej gule priemeru 1. Číslo $m_k(B)$ nazveme k-rozmernou mierou množiny B.

Definícia 2. Množinu $B \subset E_n$ nazveme k-rozmernou plochou, ak existuje zobrazenie φ týchto vlastností: φ je prosté zobrazenie definované v okolí G borelovskej množiny $Z \subset E_k$ do E_n také, že má na G spojité prvé parciálne derivácie, príslušná funkcionálna matica má hodnosť k a $B = \varphi(Z)$. Číslo

$$p_k(B) = \int \left(\sum_{j_1 < \ldots < j_k} \left[\frac{D(\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k})}{D(u_1, \ldots, u_k)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}L_k$$

nazveme k-rozmerným plošným obsahom B.

Množinová funkcia m_k definovaná na všetkých podmnožinách E_n je vlastne vonkajšia miera, ktorá indukuje na m_k-merateľných množinách istú mieru, ktorú budeme značiť tým istým znakom. Pokiaľ však výslovne nepovieme, že ide o mieru, budeme pod m_k rozumieť vonkajšiu mieru.

Číslo $p_k(B)$, ktoré je definované pomocou zobrazenia φ, nezávisí od voľby zobrazenia φ, čo vyplýva napr. z vety uvedenej v tomto článku.

Tvrdenie nasledujúcej vety je známe.* Tu uvedený dôkaz je však elementárny, využívajúci jednoduché a známe vlastnosti uvažovaných pojmov.

Veta. *Nech $B \subset E_n$ je k-rozmerná plocha, $B = \varphi(Z)$, Z otvorená množina. Potom*

$$m_k(B) = p_k(B). \tag{1}$$

Dôkaz. 1. Nech B je k-rozmerný simplex. Potom existuje taká k-rozmerná nadrovina, že B je jej časťou. V tejto nadrovine však platí ([1] 163)

$$m_k(B) = L_k(B) \quad \text{a} \quad L_k(B) = p_k(B). \tag{2}$$

Teda vzťah (1) je splnený pre všetky k-rozmerné simplexy. Ďalej nech $\bar{B}$ je k-rozmerná simplexová sieť, t. j. konečný systém k-rozmerných simplexov, ktoré sa buďto nepretínajú, alebo sa pretínajú v simplexoch nanajvýš $(k-1)$-ho rádu. Označme $B = \cup \bar{B}$. Definujme $p_k(B) = \sum_{\bar{b} \in \bar{B}} p_k(\bar{b})$. Z L_k-merateľnosti k-rozmerných simplexov a z prvej formule v (2) vyplýva ich m_k-merateľnosť. Pretože $(k-1)$-rozmerná miera $(k-1)$-rozmerného simplexu je konečná, k-rozmerná miera $(k-1)$-rozmerného simplexu je 0 (pozri [2] 141). Z aditívnosti m_k na m_k-merateľných množinách, z posledne povedaného a z platnosti (1) pre k-rozmerné simplexy vyplýva platnosť vzťahu (1) pre súčet ľubovoľnej simplexovej siete.

2. Nech $B = \varphi(Z)$ je k-rozmerná plocha, Z súčet konečného počtu kompaktných intervalov. Nech $\bar{Z}$ je simplexová sieť, $\cup \bar{Z} = Z$. Ku každej simplexovej sieti definujeme bodové zobrazenie ψ na Z takto: nech $t \in \bar{z} \in \bar{Z}$, $t = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$, $t_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$, x_i sú vrcholy simplexu $\bar{z}$.** Potom $\psi(t) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i \varphi(x_i)$.

Nech $\{\bar{Z}_i\}_{\infty}^{i=1}$ je postupnosť simplexových sietí, $\cup \bar{Z}_i = Z$. Funkciu ψ prislúchajúcu sieti $\bar{Z}_i$ označme ψ_i. Položme $\bar{M}_i = \psi_i(\bar{Z}_i)$, $M_i = \psi_i(Z)$. Zostrojme $\{\bar{Z}_i\}_{i=1}^{\infty}$, resp. $\{\bar{M}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tak, aby platili tieto podmienky:

$$\lim_{i \to \infty} \max_{\bar{z} \in \bar{Z}_i} \delta(\bar{z}) = 0, \tag{3}$$

$$\text{pre } t \in Z \text{ je } \lim_{i \to \infty} (\psi_i(t) - \varphi(t)) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{i \to \infty} p_k(M_i) = p_k(B).^{***} \tag{5}$$

* Pozri napr. [4] odst. 3. Pre $n = 2$, $k = 1$ a pre $n = 3$ a $k = 2$ podal jednoduchý dôkaz už Hausdorff ([1] 164—165).

** Uvedomme si, že takéto vyjadrenie je jednoznačné.

*** Konštrukcia takejto postupnosti je uvedená napr. v [3].

Nech sú teraz $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ ľubovoľné čísla. Z vlastností infima vyplýva existencia spočetného systému n-rozmerných gúľ $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tej vlastnosti, že

$$V_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta(B_i)^k < V_k m_k(\rho, B) + V_k \varepsilon. \tag{6}$$

Z konštrukcie zobrazenia ψ_i a z (3) ľahko vyplýva, že $\lim_{i\to\infty} \psi_i(t) = \varphi(t)$ na Z rovnomerne. Existuje teda také prirodzené číslo i_1, že pre všetky $i > i_1$ je

$$M_i \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p. \tag{7}$$

Zo (6) a (7) vyplýva, že

$$V_k m_k(\rho, M_i) < V_k m_k(\rho, B) + V_k \varepsilon. \tag{8}$$

Prechodom k suprému dostaneme

$$m_k(M_i) \leqq m_k(B) + V_k \varepsilon. \tag{9}$$

Podľa prvej časti dôkazu platí

$$m_k(M_i) = p_k(M_i). \tag{10}$$

Podľa (9) a (10) je

$$p_k(M_i) \leqq m_k(B) + V_k \varepsilon, \tag{11}$$

pre všetky $i > i_1$. Odtiaľ vyplýva, že

$$\lim_{i\to\infty} p_k(M_i) \leqq m_k(B). \tag{12}$$

Spojením (12) a (5) dostaneme

$$p_k(B) \leqq m_k(B). \tag{13}$$

3. Ostaňme pri označení definovanom na začiatku druhej časti dôkazu. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Z (5) vyplýva existencia takého prirodzeného čísla i_2, že pre všetky $i > i_2$ je

$$|p_k(M_i) - p_k(B)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Z rovnosti (4), ktorá ako sme už spomenuli, platí rovnomerne na Z, a z trojuholníkovej nerovnosti ľahko vyplýva, že

$$|\rho(\varphi(t^2), \varphi(t^1)) - \rho(\psi_i(t^2), \psi_i(t^1))| < \varepsilon \tag{15}$$

pre všetky $t^1, t^2 \in \bar{z}$, všetky $\bar{z} \subset \bar{Z}_i$, $i > i_3$, i_3 dostatočne veľké, kde $\rho(x, y)$ znamená vzdialenosť dvoch bodov v $\mathbf{E}_n$. Nech $\overline{m} \in \overline{M}_i$ je ľubovoľný simplex, i pevné, $i > i_0 = \max(i_2, i_3)$. Uzavrime teraz $\overline{m}$ do spočetného systému k-rozmerných gúľ (v rovine simplexu) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ so stredmi x_i a priemermi $\delta(A_i) = r_i < \rho$, ktorých k-rozmerné objemy spĺňujú podmienku

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_k(A_i) = V_k \sum_{i=1}^{\infty} r_i^k < p_k(\overline{m}) + \varepsilon, \tag{16}$$

kde ρ je vopred dané kladné číslo. Pretože $\overline{m}$ je kompaktná množina, existuje konečný systém gúľ z $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, označme ho $\{A_i\}_{i\in\alpha}$ taký, že $\{A_i\}_{i\in\alpha} \subset \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\bigcup_{i\in\alpha} A_i \supset \overline{m}$. Pritom

$$\sum_{i\in\alpha} p_k(A_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} p_k(A_i). \tag{17}$$

Utvorme teraz systém n-rozmerných gúľ $\{B_i\}_{i\in\alpha}$ so stredmi v $y_i = \varphi(\psi^{-1}(x_i))$ a priemermi $\delta(B_i) = r_i + 2\varepsilon$. Podľa (15) pokrýva $\{B_i\}_{i\in\alpha}$ množinu $\bar{b} = \varphi(\psi^{-1}(\overline{m}))$. Teda podľa (16) a (17) platí

$$V_k m_k(\rho + 2\varepsilon, \bar{b}) \leqq V_k \sum_{i\in\alpha} \delta(B_i)^k = V_k \sum_{i\in\alpha} (r_i + 2\varepsilon)^k =$$
$$= V_k \sum_{i\in\alpha} r_i^k + F(r_i, \varepsilon) < p_k(\overline{m}) + \varepsilon + F(\rho, \varepsilon), \tag{18}$$

kde $F(\rho, \varepsilon)$ je polynóm dvoch premenných ρ, ε a $\lim_{(\rho,\varepsilon)\to(0,0)} F(\rho, \varepsilon) = 0$. Z (18) vyplýva

$$V_k m_k(\rho + 2\varepsilon, B) < p_k(M_i) + \varepsilon + F(\rho, \varepsilon). \tag{19}$$

Zo (14) a (19) vyplýva

$$V_k m_k(\rho + 2\varepsilon, B) < p_k(B) + 2\varepsilon + F(\rho, \varepsilon). \tag{20}$$

Limitným prechodom pri $\rho \to 0$, $\varepsilon \to 0$ v (20) dostávame

$$m_k(B) \leqq p_k(B). \tag{21}$$

Z (21) a (13) vyplýva (1) pre všetky k-rozmerné plochy $B = \varphi(Z)$, kde Z je súčtom konečného počtu kompaktných intervalov.

4. Nech je teraz $Z \subset \mathbf{E}_k$ ľubovoľná otvorená množina, $B = \varphi(Z)$ k-rozmerná plocha. Potom je Z súčtom neklesajúcej postupnosti súčtov kompaktných intervalov $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$. Pretože potom tiež $\{\varphi(Z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ je neklesajúca $\varphi(Z) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(Z_i)$, platí

$$m_k \varphi(Z) = \lim_{i\to\infty} m_k(\varphi(Z_i)) = \lim_{i\to\infty} p_k(\varphi(Z_i)) = p_k(\varphi(Z)),$$

čím je naša veta dokázaná.

LITERATÚRA

[1] Hausdorff F., *Dimension und äußeres Maß*, Math. Ann. 79 (1919), 157—179.
[2] Hurewicz W., Wallman H., *Dimension theory* (po rusky: Теория размерности, Moskva 1948).
[3] Haupt O., Aumann G., *Differential- und Integralrechung* III, Berlin 1938.
[4] Federer H., *Measure and area*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 58 (1952), 306—378.

Došlo 6. 4. 1959.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА О k-МЕРНОЙ МЕРЕ В E_n

Белослав Риечан

Резюме

В этой статье дается элементарное доказательство следующей известной теоремы: k-мерная мера Хаусдорфа k-мерной поверхности в n-мерном Эвклидовом пространстве равна ее площади.

A NOTE ON THE k-DIMENSIONAL MEASURE IN E_n

Beloslav Riečan

Summary

In this paper is given an elementary proof of the following known theorem: The k-dimensional Hausdorff measure of k-dimensional surface in n-dimensional Euclidean space is equal to this area.