MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, X, 4-1960

O GRUPĚ AUTOMORFNÍCH KOLINEACÍ PROSTOROVÉ KVARTIKY HARMONICKÉ

VLADIMÍR BRUTHANS, Liberec

V první části této práce jsou studovány kolineace, kterými se reprodukuje prostorová kvartika prvního druhu bez singulárního bodu v případě, kdy jde o tzv. kvartiku harmonickou. Přitom se vychází ze známého parametrického vyjádření kvartiky pomocí Weierstrassových σ-funkcí.

Ve druhé části je užito vlastností uvedených kolineací k získání některých vlastností harmonické kvartiky, které — jak se ukázalo — jsou pro tuto kvartiku charakteristické.

Úvod

Kvartikou rozumíme v tomto článku prostorovou kvartiku prvního druhu bez singulárního bodu. Uvedeme nejdříve některé známé pojmy a vlastnosti této křivky, jichž v dalším upotřebíme.[1]

Kvartika je basí svazku kvadrik, v němž jsou čtyři kvadratické kužele. Vrcholy těchto kuželů jsou vrcholy tzv. polárního čtyřstěnu kvartiky, který je společným polárním čtyřstěnem všech kvadrik svazku.

Body, v nichž rovina může mít s kvartikou čtyřnásobný průsečík, se nazývají body superoskulační. Je jich na kvartice 16 a leží po čtyřech ve stěnách polárního čtyřstěnu kvartiky. Body, v nichž regulární kvadrika může mít s kvartikou osminásobný průsečík, se nazývají body osmitečné; těchto bodů je na kvartice 48.

V projektivních souřadnicích lze kvartiku vyjádřit parametricky rovnicemi[2]

$$x_1 = \sigma_1(u),\ x_2 = \sigma_2(u),\ x_3 = \sigma_3(u),\ x_4 = \sigma(u), \tag{1}$$

kde σ, σ_k $(k = 1, 2, 3)$ jsou známé Weierstrassovy funkce a parametr u probíhá v rovině komplexních čísel rovnoběžník period, jehož vrcholy buďtež body 0, 4ω $4\omega + 4\omega'$, $4\omega'$.[3]

Z kvadratických vztahů mezi σ-funkcemi[4] plynou rovnice

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_3^2 + (e_2 - e_3)\, x_4^2 &= 0, \\ x_3^2 - x_1^2 + (e_3 - e_1)\, x_4^2 &= 0, \\ x_1^2 - x_2^2 + (e_1 - e_2)\, x_4^2 &= 0, \\ (e_2 - e_3)\, x_1^2 + (e_3 - e_1)\, x_2^2 + (e_1 - e_2)\, x_3^2 &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

jsou to rovnice kuželů, obsahujících kvartiku. Označíme tyto kužele K_1, K_2, K_3, K_4 v pořadí určeném pořadím rovnic (2).

Parametry superskulačních bodů jsou charakterisovány kongruencí[5]

$$4u \equiv 0 \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

parametry osmitečných bodů vztahy

$$8u \equiv 0, \quad 4u \not\equiv 0 \pmod{4\omega, 4\omega'}.$$

Superskulační bod odpovídající hodnotě parametru $u = m\omega + n\omega'$ označujeme W_{mn} a osmitečný bod odpovídající hodnotě parametru $u = \frac{1}{2}(h\omega + k\omega')$ označujeme V_{hk}.

Kvartika (1) se reprodukuje 32 kolineacemi, které jsou dány vztahem[6]

$$u' \equiv \varepsilon u + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a $m, n = 0, 1, 2, 3$. Tyto kolineace nazýváme kolineacemi základními, a to pro $\varepsilon = 1$ kladnými a pro $\varepsilon = -1$ zápornými. Kladné základní kolineace označujeme $\varkappa(m, n)$, záporné $\varkappa[m, n]$.

Klasifikace základních kolineací je známa.[7] Kladné kolineace pro m i n sudé jsou osové involuce, jejichž osy jsou vždy dvě protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky. Zbývající kladné kolineace jsou cyklické 4. stupně a příslušejí po čtyřech vždy k jedné (kladné) involuci, která vznikne jejich opakováním. Záporné kolineace pro m i n sudé jsou středové involuce, jejichž středy jsou vrcholy polárního čtyřstěnu kvartiky a roviny samodružných bodů jsou stěny tohoto čtyřstěnu. Zbývající záporné kolineace jsou osové involuce, jejichž osy protínají vždy dvě protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky a jsou přímkami tzv. Vossových kvadrik.[8]

---

[1] Tyto pojmy a vlastnosti jsou podrobně vyloženy v knize akademika B. Bydžovského [1], kap. XIX a v práci [2] téhož autora.

[2] Viz Killing, *Der Flächenbüschel* 2.0. Berlin 1872, 11.

[3] 2ω $2\omega'$ jsou základní periody příslušné Weierstrassovy funkce $\wp(u)$, která s uvedenými σ-funkcemi souvisí známými vztahy $\left[\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}\right]^2 = \wp(u) - e_i$, $i = 1, 2, 3$ (viz [3], str. 365).

[4] Viz [3], str. 387.

[5] O užití eliptických funkcí ke studiu prostorové kvartiky viz např. [4], str. 47 a násl.

[6] Viz [4], str. 81.

[7] Viz [2], str. 4.

[8] Těchto kvadrik je šest a jsou rozděleny na tři dvojice tak, že osy, které jsou přímkami téže dvojice, protínají tytéž dvě protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky. Viz [4], str. 74.

Základní kolineace tvoří grupu G_{32}. Podrobné studium této grupy a bodových skupin na kvartice odpovídajících jejím podgrupám provedl akademik B. Bydžovský v citované práci [2]. Jeho výsledky platí pro každou prostorovou kvartiku prvního druhu bez singulárního bodu. Ve speciálním případě tzv. kvartiky harmonické lze však grupu G_{32} rozšířit o další automorfní kolineace na grupu G_{64}. Vyšetříme vlastnosti těchto automorfních kolineací harmonické kvartiky a jejich užitím odvodíme některé charakteristické vlastnosti této křivky.

Harmonické kolineace

Jsou-li $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ rovnice dvou kvadrik svazku, má libovolná kvadrika tohoto svazku rovnici tvaru $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$, v níž (λ, μ) můžeme pokládat za projektivní souřadnice příslušné kvadriky. Tím je ve svazku zavedena jednorozměrná projektivní soustava souřadnic a lze proto mluvit o dvojpoměru čtyř kvadrik svazku. Užijeme tohoto pojmu, který zřejmě nezávisí na volbě základních kvadrik svazku, k definici harmonické kvartiky.

Harmonickou kvartikou nazýváme kvartiku, která je basí svazku kvadrik, jehož čtyři kužele tvoří harmonickou čtveřici.

K tomu, aby rovnice (1) vyjadřovaly kvartiku harmonickou, stačí položit $\omega' = i\omega$. Potom totiž platí[9]

$$e_1 + e_3 = 0 \quad \text{a} \quad e_2 = 0, \tag{4}$$

takže dvojpoměr čtyř kuželů v pořadí K_1, K_3, K_2, K_4 je roven -1. Kužele K_2, K_4 jsou tedy v tomto případě harmonicky sdruženy vzhledem ke kuželům K_1, K_3 a obráceně.

Je-li kvartika (1) harmonická, reprodukuje se — kromě 32 kolineacemi základními — také kolineací

$$u' \equiv iu \pmod{4\omega, 4\omega'}. \tag{5}$$

Z rovnic (4) totiž plyne

$$\left[\frac{\sigma_1(iu)}{\sigma(iu)}\right]^2 = -\left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right]^2, \quad \left[\frac{\sigma_2(iu)}{\sigma(iu)}\right]^2 = -\left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$
$$\left[\frac{\sigma_3(iu)}{\sigma(iu)}\right]^2 = -\left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$

takže vztah $\sigma_2^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_2 - e_3)\,\sigma^2(u) = 0$ přejde ve vztah $\sigma_2^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_2 - e_1)\,\sigma^2(u) = 0$ a obráceně. To znamená, že ve vyšetřované kolineaci se kužele K_1 a K_3 navzájem vymění a kvartika, v níž se protínají, je samodružná.

[9] Užíváme vztahů $\wp(iu) = -\wp(u)$ a $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Složením kolineace (5) se všemi kolineacemi (3) dostaneme 32 kolineací tvaru

$$u' \equiv \varepsilon iu + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'}, \tag{6}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a $m, n = 0, 1, 2, 3$. Tyto kolineace nazýváme kolineacemi harmonickými, a to buď kladnými (je-li $\varepsilon = 1$) nebo zápornými (je-li $\varepsilon = -1$). Kladné harmonické kolineace značíme $\beta(m, n)$, záporné $\beta[m, n]$. Snadno dokážeme větu:

Věta 1. *Všechny harmonické kolineace jsou cyklické čtvrtého stupně.*

Důkaz. Ze vztahu (6) je zřejmé, že opakováním libovolné harmonické kolineace dostaneme vždy některou ze základních kolineací záporných, které — jak víme — jsou všechny involutorní. Opakujeme-li tedy libovolnou harmonickou kolineaci čtyřikrát, dostaneme identitu. Tím je věta dokázána.

Každá harmonická kolineace vytváří tedy cyklickou grupu čtvrtého řádu, v níž je spolu s kolineací $\beta(m, n)$ obsažena též kolineace $\beta[-n, m]$. Tyto dvě harmonické kolineace, z nichž jedna je kladná a druhá záporná, jsou navzájem inversní, jednu dostaneme, když třikrát opakujeme druhou.

Zkoumejme nyní na harmonické kvartice čtveřice bodů, které tvoří cykly v jednotlivých harmonických kolineacích. Cyklus tvořený čtyřmi body ležícími v téže rovině nazveme stručně cyklem rovinným. Platí věta:

Věta 2. *Mezi harmonickými kolineacemi je 16 kolineací, které na harmonické kvartice vytvářejí cykly rovinné; zbývajících 16 harmonických kolineací vytváří na harmonické kvartice cykly, které nejsou rovinné (s výjimkou konečného počtu cyklů, které nejsou tvořeny čtyřmi vzájemně různými body).*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že záporné harmonické kolineace vytvářejí tytéž cykly jako k nim inversní kladné harmonické kolineace, stačí, omezíme-li se v důkazu na harmonické kolineace kladné. Opakujeme-li kolineaci $\beta(m, n)$, dostaneme involuci $\alpha[m - n, m + n]$, která je středová, když $m \equiv n \pmod 2$, kdežto pro $m \not\equiv n \pmod 2$ je osová. Čtyři body cyklu leží tedy v prvním případě na dvou různoběžkách, ve druhém případě na dvou mimoběžkách, které jsou navzájem různé, neboť přímka protíná kvartiku nejvýše ve dvou bodech. Cyklů tvořených méně než čtyřmi body je na kvartice konečný počet, neboť každý takový cyklus obsahuje aspoň jeden bod samodružný v příslušné involuci a těchto bodů je na kvartice konečný počet. Tím je věta dokázána.

Harmonické kolineace, které na harmonické kvartice vytvářejí cykly rovinné, nazýváme harmonickými kolineacemi prvního druhu, zbývající pak harmonickými kolineacemi druhého druhu.

Určíme na harmonické kvartice body, které jsou v jednotlivých harmonických kolineacích samodružné, a dvojice bodů, které v těchto kolineacích tvoří involutorní páry. Pro argumenty bodů, které jsou samodružné v kolineaci $\beta(m, n)$, platí kongruence

$$u \equiv iu + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

jejímž řešením dostáváme

$$u_1 = \frac{m-n}{2}\,\omega + \frac{m+n}{2}\,\omega' \quad \text{a} \quad u_2 = u_1 + 2\omega + 2\omega'.$$

Těmto hodnotám odpovídají dva body superoskulační nebo osmitečné podle toho, jde-li o harmonickou kolineaci prvního druhu nebo druhého druhu. Tyto dva body jsou ovšem samodružné i v kolineaci $\alpha[m-n,\ m+n]$, kterou dostaneme, opakujeme-li kolineaci $\beta(m, n)$; zbývající dva samodružné body této základní kolineace, tj. body odpovídající argumentům

$$u_3 = u_1 + 2\omega \quad \text{a} \quad u_4 = u_1 + 2\omega',$$

tvoří v kolineaci $\beta(m, n)$ involutorní pár.

V každé harmonické kolineaci existují též samodružné body ležící mimo kvartiku. Vyšetříme nejdříve harmonickou kolineaci prvního druhu. Spojnice samodružných superoskulačních bodů je samodružná přímka. Protneme-li ji rovinou, která obsahuje některý cyklus a je proto samodružná, dostaneme na ní další samodružný bod. Odtud plyne, že všechny body této přímky jsou samodružné. Samodružná je dále průsečnice superoskulačních rovin v samodružných superoskulačních bodech, která je s přímkou samodružných bodů mimoběžná a je proto osou svazku samodružných rovin. Samodružné body ležící na této přímce jsou její průsečíky se samodružnými rovinami svazku, jehož osou je přímka samodružných bodů. Tyto roviny protínají kvartiku buď jen v samodružných bodech nebo ještě ve dvou bodech, které tvoří involutorní pár. Jsou tedy samodružnými rovinami tohoto svazku dvojnásob tečná rovina křivky dotýkající se jí v obou samodružných bodech a rovina polárního čtyřstěnu, v níž tyto samodružné body leží. Odtud plyne, že kromě přímky samodružných bodů jsou v harmonické kolineaci prvního druhu ještě dva samodružné body, ležící na ose svazku samodružných rovin. Jiné samodružné body ani samodružné roviny v této kolineaci nejsou.

Pro argumenty osmitečných bodů, samodružných v harmonické kolineaci druhého druhu, platí

$$3u_1 + u_2 \equiv 0, \qquad u_1 + 3u_2 \equiv 0 \pmod{4\omega,\ 4\omega'}.$$

To znamená, že oskulační roviny v samodružných osmitečných bodech se protínají v přímce, která je spojnicí těchto dvou bodů. Tyto oskulační roviny, které samy jsou ovšem samodružné, protínají přímku obsahující involutorní pár osmitečných bodů v dalších dvou samodružných bodech této kolineace. Protože v kolineaci druhého druhu je jen konečný počet samodružných rovin a tedy i konečný počet samodružných bodů, nejsou další samodružné body kromě čtyř uvedených.

Čtyři samodružné body harmonické kolineace druhého druhu jsou vrcholy čtyřstěnu, jehož dvě stěny jsou oskulační roviny v samodružných osmitečných

bodech, zbývající dvě stěny jsou roviny obsahující involutorní pár osmitečných bodů a po jednom ze samodružných osmitečných bodů, ve kterých se kvartiky dotýkají. Samodružnými body ležícími mimo kvartiku procházejí tedy tečny v samodružných bodech ležících na kvartice.

Označme nyní vrcholy souřadnicového čtyřstěnu O_1, O_2, O_3, O_4,[10] stěny tohoto čtyřstěnu ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 (ω_i leží proti O_i) a jeho hrany o_{ij} (tj. spojnice vrcholů O_i, O_j).

V kolineaci $\beta(0, 0)$ jsou samodružné superoskulační body W_{00} a W_{22}. Jejich spojnice, jež je přímkou samodružných bodů, prochází bodem O_2. Tímto bodem prochází také spojnice bodů W_{20}, W_{02}, které ve vyšetřované kolineaci tvoří involutorní pár. Kolineace $\beta(0, 0)$ indukuje tedy na přímce $W_{20}W_{02}$ involuci, jejímž jedním samodružným bodem je bod O_2. Druhý samodružný bod této involuce, který je ovšem samodružný i v kolineaci $\beta(0,0)$, je s bodem O_2 harmonicky sdružen vzhledem k dvojici bodů W_{20}, W_{02} a je to tedy bod na ose o_{13}; označme ho P_{00}. Zbývající samodružný bod kolineace $\beta(0,0)$ leží mimo rovinu ω_4. To však musí být bod O_4, neboť opakováním vyšetřované kolineace dostaneme středovou involuci $\alpha[0,0]$, v níž je tento bod jediným samodružným bodem ležícím mimo rovinu ω_4. Osou svazku samodružných rovin je proto přímka O_4P_{00}.

Podobně se zjistí, že osou svazku rovin samodružných v kolineaci $\beta(2,2)$ je přímka O_4P_{22}, kde P_{22} je průsečík spojnice $W_{00}W_{22}$ s osou o_{13}. Osy obou svazků procházejí tedy vrcholem O_4, leží v rovině ω_2 a protínají spojnice superoskulačních bodů ležících v rovině ω_4, které procházejí bodem O_2.

Analogické výsledky platí i pro zbývající tři dvojice harmonických kolineací prvního druhu $\beta(m, n)$, $\beta(m+2, n+2)$.

Abychom se mohli stručně vyjadřovat, budeme nazývat dva vrcholy O_1, O_3 nebo O_2, O_4, příslušné harmonicky sdruženým dvojicím kuželů, navzájem sdruženými a totéž budeme říkat o stěnách k nim protilehlých. Sdruženými budeme také nazývat dva body superoskulační, které leží v téže stěně polárního čtyřstěnu a jejichž spojnice prochází vrcholem protilehlým ke stěně sdružené. V této terminologii můžeme předchozí výsledky vyjádřit větou:

Věta 3. *Osy svazků samodružných rovin harmonických kolineací druhého druhu procházejí po dvou vrcholy polárního čtyřstěnu kvartiky a leží v jeho stěnách. Dvě osy, které procházejí týmž vrcholem, leží ve stěně protilehlé k vrcholu sdruženému a protínají spojnice sdružených superoskulačních bodů ležící ve stěně sdružené.*

Plochy nejnižšího stupně, které obsahují čtyřbodové cykly harmonických kolineací druhého druhu, jsou kvadriky. Nalezneme kvadriky, které jsou v těchto kolineacích samodružné.

Zkoumejme kolineaci $\beta(1,0)$, jejíž samodružné body jsou jednak dva osmi-

[10] O_i je vrchol kuželu K_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

tečné body V_{11} a V_{55}, jednak dva body ležící mimo kvartiku, které označíme S_{11} a S_{55}. Napíšeme-li rovnice této kolineace ve tvaru

$$x_1 = \sqrt{2}x_2', \quad x_2 = x_3', \quad x_3 = \sqrt{2}x_4', \quad x_4 = ix_1',$$

zjistíme jednoduchým výpočtem, že samodružné kvadriky této kolineace tvoří dva svazky

$$\text{(7), (8)} \qquad \lambda[x_1^2 \mp (1+i)\,x_2^2 + ix_3^2 \pm (1-i)\,x_4^2] + \\ + \mu[(1-i)\,x_1x_2 \pm \sqrt{2}x_1x_4 \mp \sqrt{2}x_2x_3 + (1+i)\,x_3x_4] = 0$$

a dvě lineární soustavy dvojrozměrné

$$\text{(9), (10)} \qquad \lambda[x_1^2 \mp (1-i)\,x_2^2 - ix_3^2 \pm (1+i)\,x_4^2] + \\ + \mu[(1+i)\,x_1x_2 \mp \sqrt{2}x_1x_4 \mp \sqrt{2}x_2x_3 + (1-i)\,x_3x_4] + \\ + \nu[x_1x_3 \mp (1-i)\,x_2x_4] = 0.$$

Všimněme si především, že dva svazky (7) a (8) a také dvě lineární soustavy (9) a (10) si navzájem odpovídají v kolineaci

$$\text{(11)} \qquad x_1 = ix_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = -ix_3', \quad x_4 = -x_4'.$$

Kvartice (1) odpovídá v této kolineaci kvartika

$$\text{(12)} \qquad x_1 = i\sigma_1(u), \quad x_2 = -\sigma_2(u), \quad x_3 = -i\sigma_3(u), \quad x_4 = \sigma(u).$$

Tato nová kvartika se reprodukuje týmiž 64 kolineacemi, jako kvartika (1); pro tuto vlastnost ji nazýváme kvartikou kovariantní s danou kvartikou (1). Protože se obě tyto kvartiky navzájem neprotínají,[11] leží na kvartice kovariantní ty samodružné body harmonických kolineací druhého druhu, které neleží na kvartice dané. Odtud plyne věta:

Věta 4. *K harmonické kvartice existuje právě jedna kvartika s ní kovariantní.*

Vyšetříme nyní base lineárních soustav samodružných kvadrik.[12] Ve svazku (7) je jednou základní kvadrikou Vossova kvadrika, kterou označme Q. Druhá základní kvadrika má s kvadrikou Q společné dvě spojnice samodružných bodů $V_{11}V_{55}$, $S_{11}S_{55}$ a tečny v bodech V_{11}, V_{55}, které — jak víme — procházejí body S_{11}, S_{55}. Basi svazku (7) tvoří tedy (zborcený) čtyřstran $V_{11}V_{55}S_{55}S_{11}$ jehož vrcholy jsou samodružné body zkoumané kolineace. Všechny kvadriky tohoto svazku protínají kvartiku (1) trojnásob v samodružných bodech V_{11}, V_{55} a jednoduše v bodech V_{51}, V_{15}, které tvoří involutorní pár. Kovariantní kvartiku (12) protínají tyto kvadriky v samodružných bodech S_{11}, S_{55}, dále ve dvou bodech, ležících na přímce $V_{11}V_{55}$ a kromě toho ve čtveřicích bodů, které tvoří cykly.

Vlastnosti svazku (8) dostaneme z vlastností svazku (7) užitím kolineace (11). Jeho basi tvoří čtyřstran, jehož strany jsou opět spojnicemi samodružných bodů, avšak v pořadí $S_{11}S_{55}V_{11}V_{55}$. Kvadriky tohoto svazku protínají danou kvartiku v pevné čtveřici V_{11}, V_{55}, V_{51}, V_{15} a kromě toho ve čtveřicích, které tvoří cykly. Vyjádříme tento výsledek větou:

Věta 5. *Čtyřstran tvořený těmi spojnicemi samodružných bodů harmonické kolineace druhého druhu, které nejsou tečnami kvartiky, je basí svazku kvadrik vytínajících na harmonické kvartice čtveřice bodů, které v této kolineaci tvoří cykly.*

V lineární soustavě (9) je jednou základní kvadrikou Vossova kvadrika, kterou označme Q'. Druhá základní kvadrika se skládá ze dvou rovin, které se protínají v přímce $V_{11}V_{55}$ a obsahují body V_{33}, V_{77} a V_{73}, V_{37}. Třetí základní kvadrika se dotýká kvartiky v bodech V_{11}, V_{55}, V_{51}, V_{15}. Průnik první a třetí základní kvadriky je čtyřstran $V_{11}V_{51}V_{55}V_{15}$. Roviny určené body V_{51}, V_{15} a vždy jedním z bodů V_{11}, V_{55} jsou společné tečné roviny všech kvadrik této soustavy. Kvadriky je protínají ve dvojicích přímek harmonicky sdružených vzhledem ke spojnicím příslušného dotykového bodu s body V_{51} a V_{15}. Všechny kvadriky této soustavy protínají kvartiku dvojnásob v samodružných bodech V_{11}, V_{55} a kromě toho ve čtveřicích, které tvoří cykly. Tentýž cyklus vytínají na kvartice všechny kvadriky svazku, jehož basí je dvojice kuželoseček protínajících se v bodech V_{11} a V_{55}.

Kvadriky soustavy (10) mají společné body S_{11} a S_{55} ležící na kvartice kovariantní a protínají danou kvartiku vždy ve dvou cyklech (které ovšem mohou splynout).

Kvadriky Q, Q', které jsou samodružné ve všech harmonických kolineacích druhého druhu,[13] nazýváme hlavními kvadrikami harmonické kvartiky.

Harmonické kolineace spolu se základními kolineacemi tvoří grupu G_{64}, která ovšem obsahuje grupu G_{32} (tvořenou kolineacemi základními) jako podgrupu. Uvedeme v přehledu ty podgrupy grupy G_{64}, které obsahují aspoň jednu kolineaci harmonickou. Zbývající podgrupy této grupy jsou totiž zároveň podgrupami grupy G_{32} a jsou tedy známy z citované práce B. Bydžovského.[14]

a) Podgrupy g_4 (tj. podgrupy grupy G_{64} čtvrtého řádu) jsou cyklické grupy vytvořené vždy jednou harmonickou kolineací. Obsahují dvě harmonické kolineace navzájem inversní a jednu zápornou involuci.[15] Tato involuce je

[11] To plyne z toho, že na kvartice neexistuje skupina 8 bodů, která by byla pro všechny její automorfní kolineace invariantní (srovnej [2], 2. část, str. 3).

[12] Pro úsporu místa jsou zde vynechány zdlouhavé výpočty, které si čtenář sám snadno doplní.

[13] Tyto kvadriky tvoří jednu ze tří dvojic uvedených v poznámce 8 a jsou samodružné v 16 základních kolineacích, které složeny s kolineací $\beta(1,0)$ dávají právě všechny harmonické kolineace druhého druhu.

[14] Viz [2], str. 10—11.

[15] Každá podgrupa obsahuje ovšem též identitu, což výslovně neuvádíme.

buď středová nebo osová podle toho, jsou-li příslušné harmonické kolineace prvního nebo druhého druhu. Podgrup g_4 je 16.

b) Podgrupy g_8 jsou vytvořeny dvěma kolineacemi $\beta(m, n)$ a $\beta(m + 2, n + 2)$. Obsahují čtyři harmonické kolineace příslušné k téže záporné involuci, dvě záporné involuce středové (se sdruženými středy) nebo osové (s osami obsaženými na téže hlavní kvadrice) a jednu kladnou involuci, jejíž osy jsou spojnice sdružených vrcholů. Těchto podgrup je 8.

c) Podgrupy g_{16} jsou vytvořeny dvěma kolineacemi $\beta(m, n)$ a $\beta(\bar{m} + 2, n)$ nebo $\beta(m, n + 2)$. Obsahují osm harmonických kolineací příslušných ke dvěma záporným involucím obsaženým v téže podgrupě g_8, čtyři záporné involuce středové (tj. všechny) nebo osové (s osami ležícími na hlavních kvadrikách) a všechny involuce kladné. Tyto podgrupy jsou 4.

d) Podgrupy g_{32} jsou vytvořeny dvěma kolineacemi $\beta(m, n)$ a $\beta(m', n')$, kde $m \not\equiv m'$ a $n \not\equiv n'$ (mod 2). Obsahují šestnáct harmonických kolineací téhož druhu, osu záporných involucí obsažených v podgrupách g_{16}, čtyři základní kolineace cyklické příslušné k téže kladné involuci, jejíž osy jsou spojnicemi sdružených vrcholů a všechny involuce kladné.

Snadno se zjistí, že podgrupa obsahující dvě harmonické kolineace různého druhu je totožná s celou grupou G_{64}.

Harmonická kvartika

Z vlastností harmonických kolineací prvního druhu plyne věta:

Věta 6. *Superoskulační roviny ve dvou sdružených superoskulačních bodech harmonické kvartiky a dvojnásob tečná rovina dotýkající se této kvartiky ve zbývajících dvou superoskulačních bodech ležících v téže stěně jejího polárního čtyřstěnu, patří do téhož svazku (jehož osa leží ve sdružené stěně polárního čtyřstěnu). V tomto svazku rovin jsou obsaženy též tři roviny, které kvartiku protínají ve čtveřicích superoskulačních bodů a dvanáct rovin, které kvartiku protínají ve čtveřicích bodů osmitečných.*

Ukážeme, že tato vzájemná poloha superoskulačních a osmitečných bodů je pro harmonickou kvartiku charakteristická. Vyšetříme nejdříve vlastnosti týkající se bodů superoskulačních.

Věta 7. *Jestliže u dané kvartiky superoskulační roviny ve dvou a dvojnásob tečná rovina ve zbývajících dvou superoskulačních bodech ležících v téže stěně polárního čtyřstěnu patří do téhož svazku, je tato kvartika harmonická.*

Důkaz. Zvolíme polární čtyřstěn kvartiky za čtyřstěn souřadnicový, při čemž očíslování souřadnicových bodů a volbu jednotkového bodu provedeme tak, aby první dva ze superoskulačních bodů uvedených ve větě byly body W_{00} (1, 1, 1, 0) a W_{22}(1, −1, 1, 0); druhé dva jsou pak body W_{20}(−1, 1, 1,0) a W_{02}(1,1, −1,0). Kvadratické kužele obsahující kvartiku mají při této volbě

souřadnicového systému rovnice (2) a dvojpoměr těchto čtyř kuželů v pořadí K_1, K_3, K_2, K_4 je roven $\frac{e_{21}}{e_{23}}$.[16] Superoskulační roviny v bodech W_{00} a W_{22}, které jsou zároveň tečnými rovinami kužele K_4 v těchto bodech, mají rovnice

$$e_{23}x_1 \pm e_{31}x_2 + e_{12}x_3 = 0. \tag{13}$$

Jejich průsečnici, která zřejmě leží v rovině ω_2, lze vyjádřit jednodušeji rovnicemi

$$e_{23}x_1 + e_{12}x_3 = 0, \quad x_2 = 0. \tag{14}$$

Dvojnásob tečná rovina dotýkající se kvartiky v bodech W_{20} a W_{02} prochází vrcholem kužele K_4 a je tedy těmito třemi body určena; její rovnice je

$$x_1 + x_3 = 0. \tag{15}$$

Protože tato rovina podle předpokladu věty prochází přímkou (14), musí být $e_{23} = e_{12}$, tj. $\frac{e_{21}}{e_{23}} = -1$. To znamená, že dvojpoměr $(K_1K_3K_2K_4) = -1$ a kvartika je tedy harmonická. Tím je věta dokázána.

Osou o_{24} lze ke kvartice vésti 4 dvojnásob tečné roviny, které se jí dotýkají ve dvojicích superoskulačních bodů W_{00}, W_{22}; W_{20}, W_{02}; W_{11}, W_{33}; W_{31}, W_{13}. Je-li kvartika harmonická a jsou-li vrcholy O_2, O_4 navzájem sdružené, jsou navzájem sdružené také superoskulační body každé této dvojice. V kolineaci $\beta(0,0)$ jsou body W_{00}, W_{22} samodružné, body W_{20}, W_{02} se navzájem vyměňují a zbývající 4 body tvoří cyklus $W_{11}-W_{31}-W_{33}-W_{13}$. To znamená, že dvě dvojnásob tečné roviny jsou samodružné a zbývající dvě se navzájem vyměňují. Odtud plyne věta:

Věta 8. *Čtyři dvojnásob tečné roviny vedené k harmonické kvartice spojnicí dvou sdružených vrcholů jejího polárního čtyřstěnu tvoří harmonickou čtveřici, a to tak, že dvě roviny s dotykovými body ležícími v téže stěně jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke zbývajícím dvěma rovinám, jejichž dotykové body leží ve sdružené stěně.*

Dokážeme také obrácenou větu:

Věta 9. *Jestliže dvojnásob tečné roviny vedené ke kvartice spojnicí dvou vrcholů tvoří v pořadí určeném ve větě 8 harmonickou čtveřici, je tato kvartika harmonická a příslušné dva vrcholy jsou sdružené.*

Důkaz. Rovnice dvojnásob tečných rovin vedených ke kvartice (1) osou o_{24} jsou

$$x_1 \pm x_3 = 0, \quad \sqrt{e_{23}}x_1 \pm \sqrt{e_{21}}x_3 = 0. \tag{16}$$

[16] V této kapitole píšeme pro stručnost e_{ij} místo $e_i - e_j$.

Jsou-li tyto roviny v určeném pořadí harmonicky sdruženy, platí vztah

$$\frac{\sqrt{e_{21}} - \sqrt{e_{23}}}{\sqrt{e_{21}} + \sqrt{e_{23}}} : \frac{\sqrt{e_{21}} + \sqrt{e_{23}}}{\sqrt{e_{21}} - \sqrt{e_{23}}} = -1,$$

jehož úpravou dostaneme $e_{23} + e_{21} = 0$. To znamená, že je $(K_1K_3K_2K_4) = -1$ a tím je věta dokázána.

Vyšetříme nyní dvojice rovin, které kvartiku protínají v osmi superoskulačních bodech ležících ve dvou stěnách polárního čtyřstěnu. Kromě těchto dvou stěn polárního čtyřstěnu existují čtyři takové dvojice a jejich osy leží po dvou ve zbývajících dvou stěnách polárního čtyřstěnu. Je-li kvartika harmonická a jsou-li dané dvě stěny polárního čtyřstěnu navzájem sdružené, splývají tyto osy s osami dvojic superoskulačních rovin ve sdružených superoskulačních bodech ležících ve zbývajících dvou stěnách polárního čtyřstěnu. Ukážeme že i tato vlastnost je pro harmonickou kvartiku charakteristická.

Věta 10. *Jestliže osy dvojic rovin položených popsaným způsobem superoskulačními body ležícími ve dvou stěnách polárního čtyřstěnu kvartiky splývají s osami dvojic superoskulačních rovin v bodech ležících ve zbývajících dvou stěnách tohoto čtyřstěnu, je tato kvartika harmonická.*

Důkaz. Vhodným očíslováním vrcholů souřadnicového čtyřstěnu[17] dosáhneme toho, že dané superoskulační body leží v rovinách ω_1 a ω_3. Osy dvojic rovin položených těmito body leží pak v rovinách ω_2 a ω_4. Určíme rovnice těch dvou os, které leží v rovině ω_2. Jedna z nich je průsečnice rovin, které obsahují čtveřice $W_{10}-W_{30}-W_{01}-W_{03}$ a $W_{32}-W_{12}-W_{23}-W_{21}$ a mají rovnice

$$\sqrt{e_{23}}x_1 \pm \sqrt{e_{13}}x_2 + \sqrt{e_{12}}x_3 = 0.$$

Roviny druhé dvojice obsahují čtveřice $W_{10}-W_{30}-W_{23}-W_{21}$ a $W_{32}-W_{12}-$ $-W_{01}-W_{03}$ a jejich rovnice jsou

$$\sqrt{e_{23}}x_1 \pm \sqrt{e_{13}}x_2 - \sqrt{e_{12}}x_3 = 0.$$

Zkoumané osy lze tedy vyjádřit rovnicemi

$$\sqrt{e_{23}}x_1 \pm \sqrt{e_{12}}x_3 = 0, \qquad x_2 = 0, \tag{17}$$

kdežto průsečnice superoskulačních rovin v bodech W_{00}, W_{22} a W_{20}, W_{02} mají rovnice

$$e_{23}x_1 \pm e_{12}x_3 = 0, \qquad x_2 = 0. \tag{18}$$

Jestliže obě tyto dvojice přímek splývají; musí být splněn vztah $e_{23} - e_{12} = 0$ z něhož vyplývá, že příslušná kvartika je harmonická. Táž podmínka platí i pro splynutí os ležících v rovině ω_4 s průsečnicemi superoskulačních rovin v bodech W_{11}, W_{33} a W_{31}, W_{13}. Tím je věta dokázána.

[17] Za souřadnicový čtyřstěn volíme opět polární čtyřstěn kvartiky.

Porovnáme-li rovnice (17) s prvními dvěma rovnicemi (16), shledáme, že zkoumané osy leží i v těchto rovinách dvojnásob tečných jenom v případě kvartiky harmonické.

Roviny obsahující superoskulační body ležící ve dvou stěnách polárního čtyřstěnu lze charakterisovat též jinak. Vyšetříme nejdříve rovinu, která obsahuje body W_{10}, W_{30}, W_{23}, W_{21} ležící ve stěnách ω_1 a ω_3. Tato rovina prochází zřejmě bodem O_4. Protože součty argumentů dvojic bodů W_{10}, W_{23} a W_{30}, W_{21} jsou $3\omega + 3\omega'$ a $\omega + \omega'$, jsou spojnice těchto bodů přímkami různých soustav Vossovy kvadriky Q charakterisované těmito hodnotami[18] a rovina, která tyto přímky obsahuje, je tečnou rovinou této kvadriky. Rozdělíme-li dané superoskulační body na dvojice tak, že jednu dvojici tvoří body W_{10}, W_{21}, a druhou body W_{30}, W_{23}, dostaneme sčítaním jejich argumentů hodnoty $3\omega + \omega'$ a $\omega + 3\omega'$, jimiž je charakterisována Vossova kvadrika Q'. To znamená, že vyšetřovaná rovina je společná tečná rovina kvadrik Q, Q' vedená k nim bodem O_4. Zbývající tři roviny obsahují čtveřice $W_{30}-W_{10}-W_{03}-W_{01}$, $W_{32}-$ $-W_{12}-W_{01}-W_{03}$ a $W_{12}-W_{32}-W_{21}-W_{23}$ odpovídají první rovině v jednotlivých kladných involucích. Protože v těchto involucích jsou všechny kvadriky obsahující kvartiku samodružné, jsou tyto roviny zbývající tři společné tečné roviny kvadrik Q, Q' vedené bodem O_4.

Je-li $(K_1K_3K_2K_4) = -1$, jsou kvadriky Q, Q' hlavními kvadrikami harmonické kvartiky,[19] takže poslední charakteristickou vlastnost této kvartiky lze vyslovit též takto:

Věta 11. *Společné tečné roviny hlavních kvadrik harmonické kvartiky vedené k nim daným vrcholem jejího polárního čtyřstěnu patří do svazků rovin určených dvojicemi superoskulačních rovin ve sdružených superoskulačních bodech ležících ve stěně protilehlé k danému vrcholu.*

Přistoupíme nyní ke studiu skupin bodů osmitečných, přičemž se omezíme na 16 bodů, které tvoří jednu ze skupin invariantních vůči grupě G_{32}.[20] Při vhodné volbě souřadnicového systému jsou to v našem označení body W_{mn}, jejichž oba indexy jsou liché.

Čtveřice osmitečných bodů

$$\begin{aligned} &V_{11} - V_{71} - V_{77} - V_{17}, \quad V_{55} - V_{35} - V_{33} - V_{53}, \\ &V_{51} - V_{31} - V_{37} - V_{57}, \quad V_{15} - V_{75} - V_{73} - V_{13} \end{aligned} \tag{19}$$

leží ve čtyřech rovinách procházejících bodem O_4. Protože tyto roviny tvoří v každé ze tří kladných involucí dva involutorní páry, jsou jejich průsečnice

[18] Viz [4], str. 74.

[19] Charakterisujeme-li totiž tyto kvadriky uvedeným způsobem, zjistíme snadno, že jsou ve všech harmonických kolineacích druhého druhu samodružné.

[20] Viz [2], str. 14.

obsaženy ve stěnách polárního čtyřstěnu kvartiky. Totéž platí o rovinách položených čtveřicemi osmitečných bodů

$$(20)\qquad \begin{array}{ll} V_{11} - V_{35} - V_{77} - V_{53}, & V_{55} - V_{71} - V_{33} - V_{17}, \\ V_{51} - V_{75} - V_{37} - V_{13}, & V_{15} - V_{31} - V_{73} - V_{57}. \end{array}$$

Rozdělíme všechny tyto roviny na dvojice tak, aby osy těchto dvojic ležely v rovině ω_2; jejich rovnice mají (pro libovolnou kvartiku) tvar

$$(21)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}}) \pm x_2(1-i)\sqrt{e_{31}} - x_3(\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(22)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}}) \mp x_2(1-i)\sqrt{e_{31}} + x_3(\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(23)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}}) \mp x_2(1-i)\sqrt{e_{31}} - x_3(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(24)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}}) \pm x_2(1-i)\sqrt{e_{31}} + x_3(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

kde jsme pro přehlednost položili $\sqrt{e_{23}e_{21}} = r$.

Čtyři přímky vyjádřené dvojicemi rovnic (21)—(24) nemusí být všechny navzájem různé; vyšetříme všechny případy, které zde mohou nastat.

Především snadno usoudíme, že přímky (21) a (23) jsou vždy navzájem různé, neboť to jsou osy dvou dvojic rovin obsahujících tytéž osmitečné body, avšak v jiném seskupení. Totéž platí o přímkách (22) a (24). Také přímky (21) a (22) jsou vždy navzájem různé, neboť jsou harmonicky sdruženy vzhledem k osám o_{14}, o_{34}, s nimiž nesplývají. Totéž platí o přímkách (23) a (24).

Zbývají tedy dvojice přímek (21) a (24) nebo (22) a (23); podmínka totožnosti je pro obě tyto dvojice vyjádřena touž rovnicí

$$(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}})(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) + \\ + (\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}})(\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) = 0$$

neboli

$$(25)\qquad \sqrt{r+e_{23}}\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{23}}\sqrt{r-e_{21}} = 0;$$

odtud po snadné úpravě dostaneme $e_{21} + e_{23} = 0$. To znamená, že zkoumané přímky mohou splývat jen u kvartiky harmonické.

V případě harmonické kvartiky tvoří první dvě čtveřice (19) a druhé dvě (20) cykly v kolineaci $\beta(0,0)$, zbývající čtyři čtveřice cykly v kolineaci $\beta(2,2)$, takže roviny jimi položené skutečně po čtyřech procházejí touž přímkou ležící v rovině ω_2.

Podobně jako roviny, které obsahují superoskulační body, jsou také roviny obsahující čtveřice (19) a (20) společné tečné roviny vždy dvou Vossových kvadrik, vedené k nim vrcholem polárního čtyřstěnu. O tom se opět přesvědčíme sčítáním argumentů příslušných bodů. Roviny položené čtveřicemi (19) se dotýkají kvadrik R a S charakterisovaných hodnotami ω (nebo $3\,\omega$) a ω' (nebo $3\omega'$), roviny položené čtveřicemi (20) se dotýkají kvadrik R' a S'.

Vyšetřujme ještě společné tečné roviny vedené bodem O_4 ke dvojicím R, S' a R', S. Jsou to roviny, které obsahují čtveřice

$$\begin{array}{ll} V_{11} - V_{31} - V_{77} - V_{57}, & V_{55} - V_{75} - V_{33} - V_{13}, \\ V_{51} - V_{71} - V_{37} - V_{17}, & V_{15} - V_{35} - V_{73} - V_{53}, \\ V_{11} - V_{75} - V_{77} - V_{13}, & V_{55} - V_{31} - V_{33} - V_{57}, \\ V_{51} - V_{35} - V_{37} - V_{53}, & V_{15} - V_{71} - V_{73} - V_{17}. \end{array}$$

Jejich rovnice (seřazené opět do dvojic) jsou:

$$(26)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}}) \pm x_2(1+i)\sqrt{e_{31}} - x_3(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(27)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}}) \mp x_2(1+i)\sqrt{e_{31}} + x_3(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(28)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}}) \mp x_2(1+i)\sqrt{e_{31}} - x_3)\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) = 0,$$

$$(29)\quad x_1(\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}}) \pm x_2(1+i)\sqrt{e_{31}} + x_3(\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) = 0.$$

Osy těchto dvojic rovin leží v rovině ω_2 a jsou navzájem různé. Kdyby totiž splynuly přímky (26) a (29) nebo (27) a (28), bylo by

$$(\sqrt{r+e_{23}} - \sqrt{r-e_{23}})(\sqrt{r+e_{21}} - \sqrt{r-e_{21}}) + \\ + (\sqrt{r+e_{23}} + \sqrt{r-e_{23}})(\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{21}}) = 0$$

čili

$$(30)\qquad \sqrt{r+e_{23}}\sqrt{r+e_{21}} + \sqrt{r-e_{23}}\sqrt{r-e_{21}} = 0,$$

odkud úpravou dostaneme $e_{21} + e_{23} = 0$. To znamená, že by tato kvartika byla harmonická. Avšak pro harmonickou kvartiku, u níž splývají osy dvojic rovin položených čtveřicemi (19) a (20), platí rovnice (25), která — jak se snadno přesvědčíme — je s rovnicí (30) ve sporu. Jiné dvě přímky rovněž nesplývají, neboť příslušné dvojice rovin, jichž osami tyto přímky jsou, mají buď některé z osmitečných bodů společné anebo se dotýkají týchž dvou kvadrik. Podobně lze ukázat, že jsou různé i průsečnice zkoumaných rovin, obsažené v rovinách ω_1 a ω_3. Tyto výsledky shrneme ve větě:

Věta 12. *Čtyři společné tečné roviny vedené vrcholem polárního čtyřstěnu ke dvěma Vossovým kvadrikám, které patří do různých dvojic,*[21] *protínají kvartiku ve skupině 16 osmitečných bodů. Průsečnice těchto rovin leží po dvou ve stěnách polárního čtyřstěnu a jsou navzájem různé; splynou-li tyto průsečnice v některé stěně s průsečnicemi společných tečných rovin zbývajících dvou Vossových kvadrik, které s uvedenými dvěma patří do týchž dvou dvojic, je kvartika harmonická a příslušný vrchol polárního čtyřstěnu je sdružen s vrcholem protilehlým ke stěně, v níž tyto průsečnice splývají.*

[21] Jde o dvojice uvedené v poznámce [8].

LITERATURA

[1] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, Praha 1948, 597—604.
[2] Bydžovský B., *Grupa kolineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu*, Rozpravy České akademie XVII (1908), č. *18*, 1—13 a č. *27*. 1—3.
[3] Privalov I. I., *Analytické funkce* (český překlad), Praha 1955, 352—367.
[4] Harnack A., *Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Species und ihres Sekantensystemes durch doppelt periodische Funktionen*, Math. Ann. *XII*. (1877), 1—74.

Došlo 16. 1. 1960.

Katedra matematiky Vysoké školy strojní v Liberci

О ГРУППЕ АВТОМОРФНЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ КВАРТИКИ

Владимир Брутханс

Выводы

Под гармонической квартикой мы понимаем в этой работе пространственную квартику первого рода без особой точки, являющуюся базисом основой связки квадрик, четыре конуса которой гармонически базой сопряжены друг с другом.

Гармоническая квартика воспроизводится — как и всякая пространственная квартика первого рода без особой точки — 32 т. наз. основными коллинеациями и, кроме того, еще 32 коллинеациями, которые мы называем гармоническими. Все гармонические коллинеации являются циклическими четвертой степени; различаем два рода. В гармонических коллинеациях первого рода циклы образуются четырьмя точками, лежащими в плоскости, а эти плоскости входят в одну и ту же связку. В коллинеациях второго рода циклы образуются четырьмя точками, лежащими на двух скрещивающихся прямых.

В связке квадрик, основой которой является гармоническая квартика, содержатся две квадрики, которые в гармонических коллинеациях первого рода переходят одна в другую, а в гармонических коллинеациях второго рода — неподвижны; мы их называем главными квадриками. Так же как и главные квадрики ведут себя при гармонических коллинеациях еще две квадрики, пересекающиеся в квартике, которая ковариантна данной квартике (т. е. воспроизводится всеми 64 коллинеациями, которыми воспроизводится данная квартика). Другой квартики, ковариантной данной гармонической квартике, не существует.

Из свойств гармонических коллинеаций первого рода следует, что у гармонической квартики две сверхсоприкасающиеся плоскости в двух т. наз. сопряженных точках сверхсоприкосновения, равно как и дважды касательная плоскость, касающаяся квартики в остальных двух точках сверхсоприкосновения, лежащих в одной и той же грани полярного четырехгранника с двумя указанными выше точками, входят в одну и ту же связку. В этой связке содержатся также две плоскости, пересекающие квартику в восьми точках сверхсоприкосновения, лежащих в двух сопряженных гранях ее полярного четырехгранника, и являющиеся общими касательными плоскостями главных квадрик, и далее 12 плоскостей, пересекающих квартику в 48 точках касания восьмого порядка. Для гармонической квартики эти свойства характерны.

Дальнейшим характерным свойством гармонической квартики является то, что дважды касательные плоскости, проведенные к ней через прямую, соединяющую две сопряженные вершины ее полярного четырехгранника, образуют в определенном порядке гармоническую четверку.

ÜBER EINE GRUPPE AUTOMORPHER KOLLINEATIONEN DER HARMONISCHEN RAUMKURVE VIERTER ORDNUNG

VLADIMÍR BRUTHANS

Zusammenfassung

Als harmonische Raumkurve vierter Ordnung betrachten wir in dieser Arbeit eine Raumkurve vierter Ordnung erster Species ohne Doppelpunkt, welche eine Basiskurve eines Quadrikenbüschels darstellt, dessen vier Kegel ein harmonisches Quadrupel bilden.

Eine harmonische Raumkurve vierter Ordnung reproduziert sich — wie jede Raumkurve vierter Ordnung erster Species ohne Doppelpunkt — durch 32 sog. Grundkollineationen, außerdem aber auch durch andere 32 Kollineationen, die man harmonische Kollineationen nennt. Alle diese harmonischen Kollineationen sind zyklisch 4. Ordnung; wir unterscheiden zwei Arten. Bei den einen werden die Zyklen durch vier Punkte, die in einer Ebene liegen, gebildet, wobei diese Ebenen zu einem Büschel gehören, bei den anderen werden die Zyklen vier Punkte, die auf zwei sich kreuzenden Geraden liegen, gebildet.

Im Quadrikenbüschel, dessen Basis die harmonische Raumkurve vierter Ordnung bildet, gibt es zwei Quadriken, welche in den harmonischen Kollineationen erster Art einander zugeordnet sind, hingegen in den harmonischen Kollineationen zweiter Art invariant bleiben; man nennt sie Grundquadriken. In demselben Verhältnis zu den harmonischen Kollineationen stehen auch zwei andere Quadriken, die sich in einer Raumkurve vierter Ordnung schneiden, welche mit der gegebenen kovariant (dh. durch dieselben 64 Kollineationen reproduzierbar) ist. Es gibt keine andere Raumkurve vierter Ordnung, die mit der gegebenen kovariant wäre.

Aus den Eigenschaften der harmonischen Kollineationen geht hervor, daß bei einer harmonischen Raumkurve vierter Ordnung zwei Wendeberührungsebenen in zwei sog. konjugierten Wendeberührungspunkten und die Doppeltangentialebene, welche die Kurve in den übrigen zwei — mit den bereits angeführten in derselben Ebene des Polartetraeders liegenden — Wendeberührungspunkten berührt, zu demselben Büschel gehören. In diesem Büschel gibt es noch zwei Ebenen, welche die harmonische Raumkurve vierter Ordnung in acht- in zwei konjugierten Ebenen des Polartetraeders liegenden — Wendeberührungspunkten scheiden und welche gemeinsame Tangentialebenen der beiden Hauptquadriken sind. Zwölf andere Ebenen dieses Büschels schneiden die harmonische Raumkurve vierter Ordnung in 48 Punkten, deren besondere Eigenschaft es ist, daß in jedem eine reguläre Quadrik acht zusammengefallene Schnittpunkte mit der betrachteten Kurve haben kann. Alle diese Eigenschaften der harmonischen Raumkurve vierter Ordnung haben sich als charakteristisch erwiesen.

Eine andere charakteristische Eigenschaft der harmonischen Raumkurve vierter Ordnung besteht darin, daß vier Doppeltangentialebenen, die man zu ihr durch die Verbindungslinie von zwei konjugierten Polartetraederecken führen kann, in bestimmter Reihenfolge ein harmonisches Quadrupel bilden.