MERATEĽNOSŤ NIEKTORÝCH FUNKCIÍ NA KARTÉZSKYCH SÚČINOCH

TIBOR NEUBRUNN, Bratislava

Je známe, že ak funkcia $f(x, y)$ definovaná na kartézskom súčine $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ (pojmy a označenia pozri v časti 1) priestorov $(X, \mathbf{S})$ a $(Y, \mathbf{T})$ je merateľná, potom sú merateľné jej x-rezy aj jej y-rezy. Merateľnosť x-rezov aj y-rezov však nestačí na merateľnosť funkcie $f(x, y)$. Bolo dokázané v [4], že funkcia dvoch premenných definovaná na číselnej rovine, lebesguovsky merateľná vzhľadom na jednu premennú a spojitá vzhľadom na druhú premennú, je lebesguovsky merateľná na číselnej rovine. Všeobecnejšia veta je dokázaná v [1] pre merateľnosť transformácie $f(x, y)$ definovanej na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ do niektorých topologických priestorov. Vo vete dokázanej v tej práci sa predpokladá, že v priestore $(X, \mathbf{S})$ je X číselný interval $\mathbf{S}$ systém všetkých borelovských množín na tom intervale.

V tejto poznámke ukážeme, že o prvej zložke kartézskeho súčinu stačí predpokladať, že je to separabilný metrický priestor; potom funkcia $f(x, y)$, ktorej y-rezy sú spojité na tom priestore a x-rezy merateľné na priestore $(Y, \mathbf{T})$, je merateľná na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.

Dôkaz, ktorý budeme robiť pre funkcie, dá sa takmer tak isto urobiť pre transformácie do takých topologických priestorov, v ktorých postupnosť merateľných transformácií konverguje k merateľnej transformácii. O takých priestoroch sa hovorí v [1].

1

V tejto časti uvedieme pojmy a označenia, ktoré budeme používať. Ak X je nejaká množina a $\mathbf{S}$ je taký systém podmnožín množiny X, že pre ľubovoľné dve množiny $E, F \in \mathbf{S}$ je E-$F \in \mathbf{S}$ a pre ľubovoľné množiny $E_n \in \mathbf{S} (n = 1, 2, \ldots)$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{S}$ (teda $\mathbf{S}$ je σ-okruh, pozri napr. [2], str. 24.) a okrem toho platí, že množinový súčet všetkých množín patriacich do $\mathbf{S}$ dáva celú množinu X, hovoríme, že je daný merateľný priestor $(X, \mathbf{S})$. V ďalšom budeme uvažovať len o takých priestoroch, pre ktoré $X \in \mathbf{S}$.

Pod funkciou $f(x)$ budeme rozumieť funkciu definovanú na X s hodnotami v $(-\infty, \infty)$.

Ak (X, ϱ) je metrický priestor, potom množinu $B \subset X$ nazývame borelovskou,

ak patrí do najmenšieho σ-okruhu nad systémom všetkých otvorených množín toho priestoru (pozri napr. [3], str. 202).

Ak $f(x)$ je funkcia definovaná na X, E je podmnožina intervalu $(-\infty, \infty)$, znakom $f^{-1}(E)$ označujeme množinu všetkých tých prvkov, pre ktoré $f(x)$ patrí do E.

Ak $(X, \mathbf{S})$ je merateľný priestor, $f(x)$ je funkcia definovaná na X, budeme funkciu $f(x)$ nazývať merateľnou vzhľadom na $(X, \mathbf{S})$, ak pre každú borelovskú množinu $B \subset (-\infty, \infty)$ je $f^{-1}(B) \in \mathbf{S}$.

Nech $(X, \mathbf{S})$, $(Y, \mathbf{T})$ sú dva merateľné priestory. Znakom $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ budeme označovať kartézsky súčin tých priestorov — to znamená taký merateľný priestor, v ktorom $X \times Y$ je kartézsky súčin množín X a Y a $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ je najmenší σ-okruh nad systémom množín $A \times B$, kde $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$.

Ak $(X, \mathbf{S})$ je merateľný priestor a na $X \times X$ je daná metrika ϱ, hovoríme o metrickom merateľnom priestore. Ak (X, ϱ) je separabilný metrický priestor, hovoríme o separabilnom metrickom merateľnom priestore.

Keď $f(x, y)$ je funkcia daná na kartézskom súčine $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ dvoch merateľných priestorov, označujeme znakom $f(y)$ pre $x \in X$ funkciu premennej y definovanú na Y takto: $f_x(y) = f(x, y)$. Funkciu $f_x(y)$ nazývame x-rezom funkcie f. Analogicky definujeme y-rez.

2

V ďalšom budeme potrebovať túto lemmu:

Lemma. *Nech $(X, \mathbf{S})$, $(Y, \mathbf{T})$ sú dva merateľné priestory. Nech $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E_n $\mathbf{S}$ je postupnosť disjunktných množín a $\{\varphi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť funkcií definovaných na Y a merateľných na $(Y, \mathbf{T})$. Potom funkcia $f(x, y) = \varphi_n(y)$ pre $x \in E_n$ je merateľná na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.*

Dôkaz: Nech $B \subset (-\infty, \infty)$ je borelovská množina.

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times \varphi_n^{-1}(B), \quad \text{teda} \quad f^{-1}(B) \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}.$$

3

Predpokladajme v ďalšom, že $(X, \mathbf{S}, \varrho)$ je separabilný metrický merateľný priestor taký, že $\mathbf{S}$ obsahuje všetky otvorené množiny z (X, ϱ). Priestor $(Y, \mathbf{T})$ nech je merateľný priestor. Funkcia $f(x, y)$ na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ nech je taká, že každý jej x-rez je merateľná funkcia na $(Y, \mathbf{T})$.

K funkcii $f(x, y)$ skonštruujeme najprv istú postupnosť funkcií a potom si všimneme niektoré vlastnosti tej postupnosti.

Priestor (X, ϱ) je separabilný, existuje teda spočítateľná množina $H = \{x_1, x_2, \ldots x_n \ldots\}$ hustá v ňom.

K danému číslu ε kladnému utvorme množiny $\Omega_n = \Omega(x_n, \varepsilon) = \{x : \varrho(x_n, x) < \varepsilon\}$ pre $n = 1, 2, \ldots$. Zrejme platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = X$.

Pomocou týchto množín utvorme množiny:

$$\Omega_1' = \Omega_1 - \{x_2, x_3, \ldots\},$$
$$\Omega_2' = \Omega_2 - \{x_3, x_4, \ldots\},$$
$$\Omega_n' = \Omega_n - \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Množiny Ω_n', $n = 1, 2, \ldots$ majú tieto vlastnosti:

1° Pre $n = 1, 2, \ldots$ $x_n \in \Omega_n'$,

2° $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = X$,

3° Sú to merateľné množiny.

Vlastnosti 1° a 2° sa ľahko dokážu. Merateľnosť množín vyplýva z merateľnosti otvorených množín a z toho, že jednobodové množiny sú merateľné. (Merateľnosť jednobodových množín vyplýva totiž z toho, že ich možno dostať ako prenik otvorených množín typu $\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right)$.)

Utvorme teraz množiny:

$$\Omega_1'' = \Omega_1',$$
$$\Omega_2'' = \Omega_2' - \Omega_1',$$
$$\Omega_n'' = \Omega_n' - \bigcup_{i=1}^{n-1} \Omega_i'.$$

Množiny Ω_n'' sú disjunktné a merateľné. Pre $n = 1, 2, \ldots$ je $x_n \in \Omega_n''$. Disjunktnosť a merateľnosť vyplýva priamo z konštrukcie tých množín. Ukážeme, že pre $n = 1, 2, \ldots$ je $x_n \in \Omega_n''$. Pre každé n je $x_n \in \Omega_n'$. Avšak pre $m < n$ platí $x_n \notin \Omega_m'$, ako to vidieť z definície množiny Ω_m'. Teda $x_n \in \Omega_n' - \bigcup_{i=1}^{n-1} \Omega_i' = \Omega_n''$.

Takto sme získali disjunktný systém množín, ktoré majú okrem toho tú vlastnosť, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n'' = X$.

Je zrejmé z konštrukcie, že množiny Ω_n'' môžeme skonštruovať tak, aby mali priemer menší ako dané číslo δ.

V ďalších úvahách budeme vynechávať kvôli jednoduchosti znak ″, budeme však mať na mysli množiny Ω_n'', ktoré sme skonštruovali vyššie uvedeným spôsobom.

K postupnosti $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ môžeme skonštruovať postupnosť systémov $\{\Omega_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$ s týmito vlastnosťami:

1° Pre $k = 1, 2, \ldots$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^k = X$.

2° Pre $k = 1, 2, \ldots$ Ω_n^k sú disjunktné množiny, t. j. $\Omega_p^k \cap \Omega_q^k = \emptyset$ ak $p \neq q$.

3° $x_n \in \Omega_n^k$ pre $n = 1, 2, \ldots$ pri každom k.

4° $d(\Omega_n^k) < \frac{1}{k}$ pre $n = 1, 2, \ldots$, pričom $d(\Omega_n^k)$ značí priemer množiny Ω_n^k.

Nech k je prirodzené číslo. Definujme funkcie $f_k(x, y)$ na $X \times Y$ takto: Nech $(x, y) \in X \times Y$. Pretože $x \in X$ existuje prirodzené číslo $n_x^k = n$ tak, že $x \in \Omega_n^k$. Množina Ω_n^k obsahuje prvok $x_n \in H$. Položíme $f_k(x, y) = f(x_n, y)$.

Platí táto veta: *Pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ je funkcia $f_k(x, y)$ merateľná na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.*

Tvrdenie tejto vety vyplýva z lemmy dokázanej v 2. časti. Stačí za množiny E_n brať množiny Ω_n^k a za funkcie φ_n funkcie $f(x_n, y)$.

4

Predpokladajme teraz okrem merateľnosti x-rezov funkcie $f(x, y)$ aj spojitosť jej y- rezov na metrickom priestore (X, ϱ).

Potom možno vysloviť túto vetu:

Veta. *Postupnosť funkcií $\{f_k(x, y)\}_{k=1}$ konverguje k funkcii $f(x, y)$.*

Dôkaz. Nech $(x, y) \in X \times Y$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Pretože každý y-rez funkcie $f(x, y)$ je spojitá funkcia na (X, ϱ), existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x_1 \in X$, pre ktoré $\varrho(x_1, x) < \delta$, je $|f(x, y) - f(x_1, y)| < \varepsilon$. Zvoľme k_0 tak, aby platilo $\frac{1}{k_0} < \delta$. Pre každé $k \geq k_0$ existuje prirodzené číslo n tak, že $x \in \Omega_n^k$ a $d(\Omega_n^k) < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} < \delta$. Podľa definície je $f_k(x, y) = f(x_n, y)$, pričom $x_n \in \Omega_n^k$. Pretože $x_n \in \Omega_n^k$, je $\varrho(x_n, x) < \delta$ a teda

$$|f(x, y) - f_k(x, y)| = |f(x, y) - f(x_n, y)| < \varepsilon.$$

Teraz môžeme vysloviť vetu:

Veta. *Nech $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ je kartézsky súčin merateľných priestorov, pričom $(X, \mathbf{S}, \varrho)$ nech je separabilný merateľný metrický priestor, v ktorom $\mathbf{S}$ obsahuje všetky otvorené množiny. Nech $f(x, y)$ je funkcia definovaná na $X \times Y$ taká, že jej x-rezy sú merateľné vzhľadom na $(Y, \mathbf{T})$ a jej y-rezy sú spojité na metrickom priestore (X, ϱ). Potom funkcia $f(x, y)$ je merateľná na $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.*

Dôkaz. Funkcia $f(x, y)$ je limitou postupnosti merateľných funkcií (podľa viet z časti 3 a 4) a teda je merateľná.

Poznámka. Dá sa ľahko nahliadnuť, že aj transformáciu do merateľného topologického priestoru možno napísať vyššie uvedenou metódou ako limitu postupnosti merateľných transformácií (ak, pravda, zachováme predpoklady o merateľnosti jej x-rezov a spojitosti jej y-rezov). Za postupnosť tých merateľných transformácií k danej transformácii $f(x, y)$ stačí zobrať postupnosť $\{f_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ definovanú tak ako v časti 3. Limita takejto postupnosti merateľných transformácií je merateľnou transformáciou, ak ide o transformácie do takých topologických priestorov, v ktorých sú splnené tieto podmienky:

1° Systém všetkých merateľných množín je najmenšou σ-algebrou nad systémom otvorených množín toho priestoru.

2° Pre každú otvorenú merateľnú množinu U existuje spojitá funkcia $f(x)$ taká, že $f(x) \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $x \in U$ ([1], str. 28).

V [1] je tiež dokázaná veta o merateľnosti transformáci priestoru $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ do priestorov, ktoré majú vyššie uvedené vlastnosti, za toho predpokladu, že X je interval $\langle 0, 1\rangle$ a $\mathbf{S}$ systém borelovských množín na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Veta je tam dokázaná za predpokladu, že y-rezy sú spojité sprava na intervale $\langle 0, 1\rangle$ a x-rezy sú merateľné funkcie na $(Y, \mathbf{T})$.

5

Výsledky získané pre merateľnosť funkcie $f(x, y)$ na priestore $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ sa dajú prirodzene preniesť na funkcie n premenných definované na n-rozmernom euklidovskom priestore E_n. Dostávame tak túto vetu:

Veta. *Nech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je funkcia definovaná na euklidovskom n-rozmernom priestore E_n. Nech $1 \leqq k < n$ a pre každú skupinu čísiel $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ je funkcia $f(x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ lebesguovsky merateľná ako funkcia $n-k$ premenných. Nech pre každú skupinu n-k čísiel $(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$ je funkcia $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}^0, \ldots x_k^0)$ spojitá funkcia k premenných v k rozmernom euklidovskom priestore. Potom funkcia $f(x_1, \ldots, x_n)$ je lebesguovsky merateľná v E_n.*

Dôkaz. Priestor E_n možno považovať za kartézsky súčin priestorov $E_k \times E_{n-k}$. Pritom robíme zvyčajnú dohodu, že nerozlišujeme prvky $(x_1, \ldots, x_n)$ a $[(x_1, \ldots x_k); (x_{k+1}, \ldots, x_n)]$.

Na priestore E_k uvažujeme o systéme všetkých lebesguovsky merateľných množín $\mathbf{S}_{E_k}$. Na priestore E_{n-k} zase o systéme všetkých lebesguovsky merateľných množín $\mathbf{S}_{E_{n-k}}$. Podľa vety zo 4. časti je funkcia $f(x_1, \ldots, x_n)$ merateľná na priestore $(E_k \times E_{n-k}, \mathbf{S}_{E_k} \times \mathbf{S}_{E_{n-k}})$. Systém $\mathbf{S}_{E_k} \times \mathbf{S}_{E_{n-k}}$ je však podsystémom systému $\mathbf{S}$ všetkých lebesguovsky merateľných množín v E_n. Teda funkcia f merateľná vzhľadom na podsystém je tým skôr merateľná vzhľadom na systém $\mathbf{S}$.

LITERATÚRA

[1] Дынкин Е. Б., *Основания теории марковских процессов*, Москва 1959.

[2] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (Халмош П. Р., *Теория меры* Москва 1953).

[3] Alexandrov P. S., *Úvod do obecné theorie množin a funkcí*, Praha 1954.

[4] Michael J. H. and Rennie B. C., *Measurability of Functions of two variables*, The Journal of The Australian Mathematical Society, 1 (1959), 21-26.

Došlo 15. 1. 1960.

Katedra matematiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

ИЗМЕРИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

ТИБОР НЕЙБРУНН

Выводы

В этой статьи доказывается следующая теорема (обозначения как в [2]).

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mathbf{S}$ — σ-алгебра подмножеств множества X содержащая все открытые множества в X. Пусть Y — абстрактное множество и $\mathbf{T}$ — σ-алгебра подмножеств множества Y. Пусть $f(x, y)$ действительная функция определенная на $X \times Y$ такая, что для всякого фиксированного $y \in Y$ функция $f^y(x) = f(x, y)$ непрерывна на X и для фиксированного $x \in X$ функция $f_x(y) = f(x, y)$ измерима в пространстве $(Y, \mathbf{T})$.

Потом функция $f(x, y)$ измерима в декартовом произведении $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.

MEASURABILITY OF CERTAIN FUNCTIONS ON CARTESIAN PRODUCTS

TIBOR NEUBRUNN

Summary

In this paper the following theorem is proved (used notations according to [2]):

Let X be separable metric space and $\mathbf{S}$ σ-algebra of subsets of X containing all open sets in X. Let Y be abstract set and $\mathbf{T}$ σ-algebra of subsets of Y. Let $f(x, y)$ be real function defined on $X \times Y$ such that for every fixed $y \in Y$ the function $f^y(x) = f(x, y)$ is continuous on X and for fixed $x \in X$ the function $f_x(y) = f(x, y)$ is measurable in $(Y, \mathbf{T})$.

Then the function $f(x, y)$ is measurable in the space $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$.