MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK X ČÍSLO 4

Z TEÓRIE KONEČNÝCH GRAFOV S LINEÁRNYM FAKTOROM III

ANTON KOTZIG, Bratislava

5. Ω-grafy a nasýtené Ω-grafy

Nech G je ľubovoľný graf s lineárnym faktorom, U nech je množina jeho uzlov. O grafe G budeme hovoriť, že je Ω-grafom, ak ľubovoľné dva jeho uzly sú v relácii Ω, t. j. ak platí $\bar{U}^{\Omega}_{G} = \{U\}$. Z častí I a II tejto práce je zrejmé toto: ak z grafu G obsahujúceho aspoň jeden lineárny faktor odstránime všetky také hrany a len také hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu $\bar{U}^{\Omega}_{G}$, vznikne tak istý graf (prijali sme preň označenie $\mathring{G}$), v ktorom ľubovoľná komponenta je Ω-grafom; ak G je nasýtený graf, potom ľubovoľná komponenta z $\mathring{G}$ je nasýtený Ω-graf. Zatiaľ čo v predošlých častiach venovali sme pozornosť konštrukcii grafov s lineárnym faktorom a konštrukcii grafov nasýtených, pri ktorej sa vychádza z daného grafu $\mathring{G}$, teraz sa budeme zaoberať vlastnosťami komponent grafu $\mathring{G}$ (t. j. vlastnosťami Ω-grafov), pomocou ktorých (ako sa ukázalo v predošlých častiach) možno skonštruovať ľubovoľný graf s lineárnym faktorom, ktorý má isté požadované vlastnosti. Ukážeme najmä, že po určitých redukciách zmení sa ľubovoľný Ω-graf na graf, ktorého každý člen je nasýtené jadro.

Prv však odvoďme si niektoré pomocné vety potrebné pre ďalšie skúmanie.

Lemma 7. *V Ω-grafe, ktorý má viac než dva uzly, neexistuje taká hrana, ktorá by patrila do každého lineárneho faktora tohto grafu.*

Dôkaz. Ak v grafe G existuje hrana h, ktorá je hranou každého lineárneho faktora G, potom o uzloch u, v, ktoré táto hrana spojuje, nevyhnutne platí $u\Omega v$ a ľubovoľný uzol w z G (kde $u \neq w \neq v$) nie je v relácii Ω s uzlom u. Potom však buď G obsahuje práve dva uzly (a to uzly u, v), alebo ak obsahuje viac než dva uzly, nie je Ω-grafom. To dokazuje lemmu.

Lemma 8. *Graf, ktorý je Ω-grafom, neobsahuje žiadnu artikuláciu.*

Dôkaz. Nech G je ľubovoľný Ω-graf, u ľubovoľný uzol, L_0 ľubovoľný lineárny faktor grafu G.

Predpokladajme oproti tvrdeniu lemmy, že u je artikulácia grafu G. Označme znakom h tú hranu z L_0, ktorá je incidentná s uzlom u. Nech g je ľubovoľná hrana incidentná s uzlom u a patriaca do iného člena než hrana h. Nech v

(resp. w) je druhý koncový uzol hrany h (resp. hrany g). Platí zrejme: ľubovoľná cesta v G spojujúca uzly v, w obsahuje uzol u a hrana incidentná s uzlom u z tej časti takejto cesty, ktorá spojuje uzol u s uzlom w, patrí do toho istého člena grafu G ako hrana g. Pretože G je Ω-graf, existuje v G cesta C spojujúca uzly v, w, ktorá má túto vlastnosť: ľubovoľná z jej hrán patrí aspoň do jedného lineárneho faktora grafu G. Nech f je tá hrana z C, ktorá je incidentná s uzlom u a patrí do toho istého člena grafu G ako hrana g. Označme znakom L_1 ľubovoľný lineárny faktor grafu G obsahujúci hranu g. Kompozícia $L_0 \times L_1$ obsahuje zrejme takú α-kružnicu vzhľadom na L_0, ktorá obsahuje aj hranu h, aj hranu f. Čiže: hrany h, f patria do toho istého člena grafu G a aj hrany h, g patria do toho istého člena grafu G — spor s predpokladom. Predpoklad existencie artikulácie v Ω-grafe vedie ku sporu. Preto Ω-graf nemôže obsahovať artikuláciu. Dôkaz je vykonaný.

Nech G je ľubovoľný G-graf, $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nech je ľubovoľná trieda rozkladu $\overline{U}_G^*$ a nech L je ľubovoľný pevne zvolený lineárny faktor grafu G. Definujeme si množiny $V_1, V_2, \ldots, V_n$ uzlov grafu G takto: uzol u z G patrí do množiny V_i práve vtedy, keď v grafe G existuje taká α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol u s uzlom v_i a okrem uzla v_i neobsahuje už žiadny iný uzol z V_0.

Priamo z definície množín $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vyplýva toto: žiadny uzol z V_0 nepatrí do žiadnej množiny z množín systému $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ a žiadna z množín systému $\overline{V}$ nie je prázdna (ak totiž h_i je tá hrana z L, ktorá je incidentná s uzlom v_i, potom druhý koncový uzol tejto hrany zrejme patrí do V_i z $\overline{V}$). Dokážme si tieto ďalšie pomocné vety:

Lemma 9. *Ľubovoľný uzol z G nepatriaci do V_0 patrí aspoň do jednej množiny systému $\overline{V}$.*

Dôkaz. Nech u je ľubovoľný uzol z G nepatriaci do V_0. Uzol u nie je v relácii Λ s uzlom v_1 (ináč by patril do V_0). Preto existuje α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzol u s uzlom v_1. Nech $C \equiv u_1, h_{1,2}, u_2, \ldots, u_{2m-1}, h_{2m-1,2m}, u_{2m}$ (kde $u_1 = u$; $u_{2m} = v_1$; u_i sú uzly, $h_{i,i+1}$ sú hrany a hrana $h_{i,i+1}$ spojuje v grafe G uzly $u_i \neq u_{i+1}$) je ľubovoľná takáto cesta. Co L patria zrejme tieto hrany cesty C: $h_{1,2}, h_{3,4}, \ldots, h_{2m-1,2m}$. Ak cesta C okrem uzla $v_1 = u_{2m}$ neobsahuje už žiadny iný uzol z V_0, potom uzol u patrí do V_1 a platnosť lemmy je zrejmá. Predpokladajme, že C obsahuje okrem uzla v_1 ešte aspoň jeden uzol z V_0. Nech x je najmenšie také číslo z $\{2, 3, \ldots, 2m\}$, o ktorom platí: uzol $u_x \in C$ patrí do V_0. Je zrejmé, že x nemôže byť nepárne číslo (lebo ináč by časť cesty C spojujúca uzly u_x, u_{2m} bola α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje dva uzly z V_0, a to nie je možné — uzly z V_0 sú totiž v relácii Λ). Teda x je párne číslo a je $u_x = v_j \in V_0$. Čiastočná cesta cesty C spojujúca uzol $u_1 = u$ s uzlom $u_x = v_j$ je však takou α-cestou vzhľadom na L, ktorá okrem uzla v_j neobsahuje už žiadny iný uzol z V_0. Preto uzol u patrí do V_j z $\overline{V}$. To dokazuje lemmu.

Lemma 10. *Ľubovoľný uzol grafu G nepatriaci do V_0 patrí práve do jednej množiny systému $\overline{V}$.*

Dôkaz. Vzhľadom na platnosť lemmy 9 stačí dokázať toto: ľubovoľný uzol z G nepatriaci do V_0 patrí najviac do jednej z množín systému $\overline{V}$. Predpokladajme oproti tvrdeniu lemmy, že istý uzol u z G nepatriaci do V_0 patrí najmenej do dvoch množín systému $\overline{V}$. Nech V_i, V_j sú takéto dve množiny z $\overline{V}$. Podľa definície systému $\overline{V}$ existujú α-cesty C_i, C_j (vzhľadom na L) také, že C_i spojuje uzol u s uzlom v_i a C_j spojuje uzol u s uzlom v_j a žiadny vnútorný uzol týchto ciest nepatrí do V_0. Je zrejmé, že cesty C_i, C_j majú spoločný nielen uzol u, ale aj aspoň jednu hranu. Tak napr. hrana z L incidentná s uzlom u patrí do oboch ciest. Platí zrejme aj toto: Ak istý uzol je spoločným uzlom oboch ciest, potom aj hrana z L incidentná s týmto uzlom patrí do oboch ciest.

Postupujme po ceste C_i vychádzajúc z uzla u a nájdime posledný uzol na tejto ceste, ktorý patrí aj do C_j (tento uzol označme znakom w). Pretože hrana z L incidentná s uzlom w (označme ju znakom g) patrí nevyhnutne do oboch ciest, posledná hrana z C_i patriaca tiež do C_j patrí nevyhnutne do L. Nech w je druhý koncový uzol hrany g. Pri opísanom postupe po ceste C_i prídeme zrejme prv do w' a až potom do w.

A. Tvrdím: ak postupujeme po ceste C_j z uzla u do uzla v_j, prídeme prv do uzla w' a až potom (po hrane g) do uzla w. Dokážme to. Keby sme prišli po ceste C_j postupujúc smerom z uzla u do uzla v_j najprv do uzla w a až potom po hrane g do uzla w', znamenalo by to, že časť cesty C_i od uzla w' po uzol v_i spolu s časťou cesty C_j, a to od uzla w' po uzol v_j, by tvorili α-cestu vzhľadom na L, ktorá by spojovala uzly v_i, v_j. To odporuje predpokladu, že $v_i \neq v_j$ patria do tej istej triedy V_0 rozkladu $\overline{U}_G^*$. To dokazuje pravdivosť tvrdenia.

B. Tvrdím: Uzol w' má tieto vlastnosti: (1) w' patrí do V_i; (2) w' patrí do V_j; (3) existujú α-cesty C_i', C_j' (vzhľadom na L) tak, že cesta C_i' spojuje uzly w', v_i, cesta C_j' spojuje uzly w', v_j, pričom cesty C_i', C_j' majú spoločnú jedinú hranu (hranu g) a žiadny vnútorný uzol ciest C_i', C_j' nepatrí do V_0. Dokážme to. Označme znakom C_i' (resp. C_j') tú časť cesty C_i (resp. C_j), ktorá spojuje uzol w' s uzlom v_i (resp. v_j). Cesta C_i' (resp. C_j') je zrejme α-cestou vzhľadom na L, ktorá má túto vlastnosť: žiadny jej vnútorný uzol nepatrí do V_0. Z toho ihneď vyplýva platnosť uvedeného tvrdenia.

Pretože podľa predošlého cesta C_j' ovsahuje uzol w, nemôže uzol w patriť do množiny V_0. Preto uzol w nie je v relácii Λ s uzlom v_j a existuje taká α-cesta vzhľadom na L(označme ju C_k'), ktorá spojuje uzol w s uzlom v_j.

C. Tvrdím: cesty C_i', C_k' majú okrem uzlov w, w' ešte aspoň jeden uzol spoločný. Dôkaz: ak by cesty C_i', C_k' nemali okrem uzlov w, w' a hrany g už žiadny iný prvok spoločný, potom prvky oboch týchto ciest by tvorili α-cestu vzhľadom na L spojujúcu uzly v_i, v_j, a to nie je možné.

Nech $\overline{G}$ je podgraf grafu G, ktorý obsahuje všetky prvky ciest C_i', C_j', C_k' a ktorý obsahuje len takéto prvky z G. Označme znakom $\overline{H}$ množinu hrán tohto podgrafu. Definujme rozklad $\overline{R} = \{H_0, H_i, H_j, H_k, \overline{H}_i, \overline{H}_j\}$ množiny $\overline{H}$ na triedy hrán takto: H_0 obsahuje jedinú hranu g; do triedy H_i (resp. H_j) zaraďme tie hrany z C_k' iné než g, ktoré patria do C_i' (resp. C_j'); do triedy H_k zaraďme hrany z C_k' nepatriace ani do C_i' ani do C_j' a napokon do triedy $\overline{H}_i$ (resp. $\overline{H}_j$) zaraďme tie hrany z C_i' (resp. C_j'), ktoré nepatria do C_k'. Že $\overline{R}$ je rozklad, t. j. že žiadna z množín H_0, H_i, H_j, H_k, $\overline{H}_i$, $\overline{H}_j$ nie je prázdna a že žiadne dve z nich nemajú spoločný prvok, je zrejmé. Podľa rozkladu $\overline{R}$ rozdeľme graf $\overline{G}$ na úseky takto: pod úsekom budeme rozumieť ľubovoľnú komponentu takého podgrafu grafu $\overline{G}$, ktorý obsahuje všetky hrany a len hrany jednej z tried rozkladu $\overline{R}$ a okrem toho už len uzly z $\overline{G}$ s týmito hranami incidentné. Priamo z definície rozkladu $\overline{R}$ je zrejmé, že ľubovoľný úsek v $\overline{G}$ je cestou. Je tiež zrejmé, že úsek obsahujúci hranu $g \in H_0$ je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly w, w' a ďalej: ľubovoľný taký úsek z $\overline{G}$, ktorý obsahuje hrany z H_i (resp. hrany z H_j) je α-cestou vzhľadom na L v grafe G (lebo dve α-cesty vzhľadom na L s každým spoločným uzlom majú spoločnú aj tú hranu z L, ktorá je s týmto uzlom incidentná).

Nech z je ten uzol z C_i', ktorý patrí aj do C_k' (pozri tvrdenie C) a je svojím poradím posledným takýmto uzlom, ak postupujeme po ceste C_i' z uzla w' do uzla v_i. Platí toto: buď je $z = v_i$, alebo úsek (označme ho $\overline{C}_0$) spojujúci uzly z, v_i (a obsahujúci nevyhnutne len hrany z $\overline{H}_i$) má túto vlastnosť: hrana z $\overline{C}_0$ incidentná s uzlom z nepatrí do L, zatiaľ čo hrana z $\overline{C}_0$ incidentná s v_i patrí do L. Ostatné úseky grafu $\overline{G}$ označme znakmi $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\ldots$, $\overline{C}_p$. Ľubovoľný taký úsek (iný než $\overline{C}_0$), ktorý obsahuje hrany a len hrany patriace do jednej z týchto tried: $\overline{H}_i$, $\overline{H}_j$, $\overline{H}_k$, má túto vlastnosť: hrany patriace a nepatriace do L sa striedajú a prvá a posledná hrana úseku nepatrí do L.

Doplňme graf $\overline{G}$ o ďalšie dve hrany, a to o hranu g' spojujúcu uzly v_i, v_j a o hranu g'' spojujúcu uzly w', v_j. Graf, ktorý takto vznikne, označme znakom $\overline{\overline{G}}$. Definujme si cesty $\overline{\overline{C}}_r$ $(r = 0, 1, \ldots, p + 1)$ v grafe $\overline{\overline{G}}$ takto: pre $r = 1, 2, \ldots, p$ je $\overline{\overline{C}}_r = \overline{C}_r$; $\overline{\overline{C}}_0$ obsahuje okrem uzlov v_i, v_j jediné hranu g' v prípade, že $z = v_i$ a $\overline{\overline{C}}_0$ obsahuje úsek $\overline{C}_0$ a okrem toho už len hranu g' a uzol v_j, ak je $z \neq v_i$; $\overline{\overline{C}}_{r+1}$ obsahuje hranu g'' a uzly s ňou incidentné.

Platí toto: (a) ľubovoľný uzol z $\overline{\overline{G}}$ je buď uzlom druhého stupňa, alebo je uzlom tretieho stupňa v grafe $\overline{\overline{G}}$; (b) ľubovoľný uzol z $\overline{\overline{G}}$ je incidentný práve s jednou hranou z L; čiže: množina hrán z L patriacich do $\overline{\overline{G}}$ je množinou hrán istého lineárneho faktora $\overline{\overline{L}}$ grafu $\overline{\overline{G}}$; (c) ľubovoľná z ciest $\overline{\overline{C}}_r (r = 0, 1, \ldots, p + 1)$ obsahuje nepárny počet hrán; (d) koncový uzol ľubovoľnej cesty $\overline{\overline{C}}_r$ je uzlom tretieho stupňa v grafe $\overline{\overline{G}}$; (e) hrany patriace do $\overline{\overline{L}}$ a nepatriace do $\overline{\overline{L}}$ sa v ľubovoľnej z ciest striedajú.

D. Tvrdím: V grafe $\overline{\overline{G}}$ existuje α-kružnica vzhľadom na $\overline{\overline{L}}$, ktorá obsahuje hranu g'. Dokážme to. Utvorme graf F takto: nech F obsahuje všetky tie uzly a len tie uzly z $\overline{\overline{G}}$, ktoré sú uzlami tretieho stupňa a nech F má tieto hrany: $f_0, f_1, \ldots, f_{p+1}$, pričom hrana f_r spojuje tie uzly v F, ktoré sú koncovými uzlami cesty $\overline{\overline{C}}_r$ v grafe $\overline{\overline{G}}$. Graf F je potom pravidelným grafom tretieho stupňa a zrejme neobsahuje most. Nech H_F je množina tých hrán z F, ktoré v zmysle vyššie uvedenom zodpovedajú tým cestám z $\{\overline{\overline{C}}_0, \overline{\overline{C}}_1, \ldots, \overline{\overline{C}}_{p+1}\}$ ktoré sú α-cestami vzhľadom na $\overline{\overline{L}}$ v grafe $\overline{\overline{G}}$. Množina H_F je množinou hrán istého lineárneho faktora L_F grafu F. Je známe, že o ľubovoľnom pravidelnom grafe tretieho stupňa, ktorý neobsahuje most, platí: ľubovoľná hrana grafu je hranou aspoň jednej α-kružnice vzhľadom na daný lineárny faktor grafu. Teda f_0 je hranou istej α-kružnice vzhľadom na L_F v grafe F. Nech $f_0, f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_s}$ sú tie hrany z F, ktoré patria do tejto kružnice. Z toho, ako bol konštruovaný graf F, vyplýva ihneď toto: prvky grafu $\overline{\overline{G}}$, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednej z ciest $\overline{\overline{C}}_0, \overline{\overline{C}}_{i_1}, \ldots, \overline{\overline{C}}_{i_s}$ tvoria istú α-kružnicu $\overline{\overline{k}}$ (vzhľadom na $\overline{\overline{L}}$) v grafe $\overline{\overline{G}}$. Kružnica $\overline{\overline{K}}$ obsahuje prvky cesty $\overline{\overline{C}}_0$ a teda aj hranu g'. To dokazuje naše tvrdenie.

E. Tvrdím: Kružnica $\overline{\overline{K}}$ z predošlého tvrdenia neobsahuje hranu g''. Dôkaz: kružnica $\overline{\overline{K}}$ obsahuje hranu g' incidentnú s uzlom v_j. Pretože $\overline{\overline{K}}$ je α-kružnicou vzhľadom na $\overline{\overline{L}}$ a g' nepatrí do $\overline{\overline{L}}$ (lebo g' nepatrí ani do G a teda ani do L), musí druhá hrana z $\overline{\overline{K}}$ incidentná s uzlom v_j patriť do $\overline{\overline{L}}$. Touto druhou hranou nemôže byť hrana g'', lebo hrana g'' taktiež nepatrí do $\overline{\overline{L}}$. Čiže g'' nepatrí do $\overline{\overline{K}}$. Dôkaz je vykonaný.

Ak z kružnice $\overline{\overline{K}}$ odstránime hranu g', vznikne tak istá α-cesta vzhľadom na $\overline{\overline{L}}$, ktorá spojuje uzly v_i, v_j. Podľa predošlého táto α-cesta neobsahuje hranu g'' a teda celá patrí do grafu $\overline{G}$ a tým aj do grafu G. Táto cesta je potom zrejme α-cestou vzhľadom na L v grafe G, ktorá spojuje uzly v_i, v_j. To je spor s predpokladom, že uzly v_i, v_j (patriace do V_0) sú v grafe G v relácii Λ.

Predpoklad existencie takého uzla u z G nepatriaceho do V_0, ktorý by patril najmenej do dvoch množín systému $\overline{V}$, viedol ku sporu. Preto nemôže v grafe G existovať uzol, ktorý by patril do viac než jednej množiny systému $\overline{V}$. To dokazuje platnosť lemmy.

Utvorme z grafu G graf G_Λ takto: odstráňme z grafu G všetky tie hrany, ktoré sú incidentné aspoň s jedným uzlom z $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a okrem toho odstráňme z G všetky uzly patriace do V_0. O podgrafe G_Λ grafu G platí:

Lemma 11. *Graf G_Λ má práve n komponent a dva uzly z G_Λ patria do tej istej komponenty práve vtedy, keď patria do tej istej množiny systému $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$.*

Dôkaz. Nech $s \neq t$ sú ľubovoľné dva uzly z $V_i \in \overline{V}$. Z definície množiny V_i vyplýva, že v G existujú také dve α-cesty vzhľadom na L (označme ich C_s, C_t), že C_s spojuje uzly v_i, s; C_t spojuje uzly v_i, t a žiadna z nich okrem uzla v_i neobsahuje už iný uzol z V_0. Obe cesty C_s, C_t obsahujú tú hranu h_i z L, ktorá je incidentná s uzlom v_i (pretože sú to α-cesty vzhľadom na L). Nech w_i je druhý koncový uzol hrany h_i. Uzol w_i patrí aj do cesty C_s aj do cesty C_t. Ak preto odstránime z oboch ciest prvky nepatriace do G_Λ (sú to tieto prvky: uzol v_i a hrana h_i), vznikne tak z cesty C_s (resp. z cesty C_t) cesta C_s' (resp. cesta C_t'), ktorá spojuje uzol w_i s uzlom s (resp. s uzlom t). Obe cesty C_s', C_t' patria do G_Λ a teda uzol w_i súvisí v grafe G_Λ aj s uzlom s aj s uzlom t. Z toho vyplýva, že uzly s, t súvisia v grafe G_Δ. Čiže: ľubovoľné dva uzly z tej istej množiny systému $\overline{V}$ patria do tej istej komponenty grafu G_Δ.

Dokážme teraz (aby sme dokončili dôkaz lemmy) toto: Ak uzol s patrí do $V_a \in \overline{V}$ a uzol t patrí do $V_b \in \overline{V}$ (kde $a \neq b$), potom uzly s, t patria do rôznych komponent grafu G_Δ. Stačí zrejme dokázať toto: v grafe G_Δ neexistuje taká hrana, ktorá by spojovala dva uzly patriace do rôznych množín systému $\overline{V}$. Predpokladajme naopak, že v G_Δ existuje istá hrana h spojujúca uzly u_i, u_j pričom u_i patrí do V_j, u_j patrí do V_i, a je $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Podľa predpokladu existuje v G α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol u_i s uzlom v_i (označme ju C_i) a tiež α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol u_j s uzlom v_j (označme ju C_j), pričom cesta C_i (resp. C_j) neobsahuje žiadny uzol z V_0 iný než v_i (resp. iný než v_j). Cesty C_i, C_j musia mať isté hrany spoločné (lebo ináč prvky týchto ciest a hrana h by tvorili α-cestu vzhľadom na L spojujúcu v G uzly v_i, v_j a to nie je možné).

Nech $C_i \equiv x_1, g_{1,2}, x_2, \ldots, g_{2m-1,2m}, x_{2m}$ (kde $x_1 = v_i$; $x_{2m} = u_i$; x_k sú uzly, $g_{k,k+1}$ sú hrany; hrana $g_{k,k+1}$ spojuje uzly x_k, x_{k+1}) a nech x_p je poradím prvý uzol cesty C_j patriaci tiež do C_i, na ktorý narazíme pri postupe po ceste C_j, ak vychádzame z uzla v_j smerom k uzlu u_j. Keby p bolo číslo párne, potom by časť cesty C_i, a to od uzla v_i po uzol x_p, spolu s časťou cesty C_j od uzla v po uzol x_p tvorili α-cestu vzhľadom na L, ktorá by spojovala uzly v_i, v_j (spor s predpokladom, že je $v_i \Lambda v_j$). Preto p je nepárne číslo a hrana $g_{p,p+1}$ patrí do L. Z toho však vyplýva nevyhnutne toto: časť cesty C_i (od uzla v_i po uzol x_{p+1}) je α-cestou vzhľadom na L, a to takou cestou, ktorá neobsahuje okrem uzla v_i žiadny iný uzol z V_0. Podobne časť cesty C_j (od uzla v_j po uzol x_{p+1}) je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly v_j, x_{p+1} a okrem uzla v_j neobsahuje už žiadny iný uzol z V_0. Teda uzol x_{p+1} patrí do množiny $V_i \in \overline{V}$ a patrí tiež do množiny $V_j \in \overline{V}$. To je spor s lemmou 10. Preto v G neexistuje hrana spojujúca uzly z rôznych množín systému $\overline{V}$. Pretože G_Δ je podgraf grafu G, nemôže ani v G_Δ existovať hrana spojujúca uzly z rôznych množín systému $\overline{V}$ a platí: $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sú množiny uzlov jednotlivých komponent grafu G_Δ, čo bolo treba dokázať.

Lemma 12. *Nech G je ľubovoľný Ω-graf, $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ľubovoľná trieda z $\overline{U}_G^*$. Rozklad $\overline{V}$ množiny uzlov z G nepatriacich do V_0 na triedy $V_1, V_2, \ldots V_n$ nie je závislý (okrem označenia jednotlivých tried) od voľby lineárneho faktora L.*

Dôkaz. Lemma 12 je dôsledkom lemmy 11.

Nech G je ľubovoľný graf a nech $\overline{U}$ je ľubovoľná podmnožina množiny U_G všetkých uzlov grafu G. Utvorme z grafu $\overline{G}$ graf $\overline{G}$ takto: (1) graf G obsahuje všetky uzly z $U_G - \overline{U}$ a okrem toho obsahuje ďalší uzol $\overline{u}$; (2) graf $\overline{G}$ obsahuje všetky hrany z G s výnimkou tých hrán, ktoré v G spojujú dva uzly z $\overline{U}$; (3) hrana z G incidentná v grafe G s uzlom (s jediným uzlom) množiny $\overline{U}$ je v grafe $\overline{G}$ incidentná s uzlom $\overline{u}$ a incidencia ostatných prvkov z G patriacich

do $\overline{G}$ zostáva v grafe $\overline{G}$ zachovaná. Budeme hovoriť, že graf G vznikne z grafu G splynutím uzlov množiny $\overline{U}$ do uzla $\overline{u}$, ak graf G vznikne z grafu G vyššie opísaným spôsobom.

Platí táto veta:

Veta 31. *Nech G je ľubovoľný Ω-graf, L ľubovoľný jeho lineárny faktor. Nech $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je istá trieda rozkladu $\overline{U}_G^*$, $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ tejto triede prislúchajúci rozklad množiny uzlov z G nepatriacich do V_0 na triedy uzlov. Nech graf $\overline{G}$ vznikne z grafu G splynutím uzlov množiny V_0 do uzla u_0. Platí: (1) graf $\overline{G}$ má práve n členov; (2) uzol u_0 patrí do všetkých n členov grafu $\overline{G}$ (t. j. u_0 je artikuláciou, ak $n > 1$); (3) ľubovoľný člen grafu $\overline{G}$ obsahuje okrem uzla u_0 už len také uzly a všetky také uzly, ktoré patria do jednej z tried rozkladu $\overline{V}$; (4) ľubovoľný člen grafu $\overline{G}$ je Ω-graf.*

Dôkaz. Nech G_Δ je graf, ktorý vznikne z grafu G, keď z neho odstránime všetky uzly množiny V_0 a odstránime tiež všetky tie hrany, ktoré sú incidentné v G aspoň s jedným uzlom z V_0. Podľa lemmy 11 má graf G_Δ práve n komponent a množiny $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sú množiny uzlov jednotlivých komponent grafu G_Δ. Graf $\overline{G}$ má oproti grafu G_Δ naviac uzol u_0 a isté hrany, všetky incidentné s uzlom u_0. Z uvedeného je zrejmé, že uzly patriace do rôznych tried rozkladu patria do rôznych členov grafu $\overline{G}$.

Nech g_i, h_i sú ľubovoľné dve hrany z G, ktoré sú incidentné aspoň s jedným uzlom množiny $V_i \in \overline{V}$. Pretože G je Ω-graf, G neobsahuje žiadnu artikuláciu (pozri lemmu 8) a množina V_i je množinou uzlov istej komponenty grafu G_Δ, existuje nevyhnutne v G cesta C_i obsahujúca obe hrany g_i, h_i, ktorá má tieto vlastnosti: jej koncové uzly patria do V_0 a všetky vnútorné uzly patria do V_i. Prvky tejto cesty spolu s uzlom u_0 tvoria kružnicu v $\overline{G}$, ktorá obsahuje hrany g_i, h_i. Z toho vyplýva: všetky hrany z G incidentné aspoň s jedným uzlom z V_i patria do toho istého člena grafu $\overline{G}$. Z uvedeného je zrejmá platnosť tvrdení (1), (2), (3) našej vety. Dokážme platnosť tvrdenia (4): nech $\overline{G}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) je ten člen grafu $\overline{G}$, ktorý okrem uzla u_0 obsahuje už len uzly množiny V_i.

A. Tvrdím: množina tých hrán z L, ktoré patria do $\overline{G}_i$, je množinou hrán istého lineárneho faktora $\overline{L}_i$ grafu $\overline{G}_i$. Dokážme to. Pretože uzly z V_i sú v grafe G incidentné s tými istými hranami ako v grafe G, platí toto: ľubovoľný uzol z V_i je incidentnný práve s jednou hranou z $\overline{L}_i$. Zostáva už len dokázať, že uzol u_0 je incidentný práve s jednou hranou z $\overline{L}_i$. To však je zrejmé, lebo druhý koncový uzol hrany z L spojujúcej v grafe G uzol v_i s uzlom z V_i patrí do $\overline{G}_i$ a žiadny iný uzol z $\overline{G}_i$ nemôže byť v grafe $\overline{G}_i$ spojený hranou patriacou do L s uzlom u_0. To dokazuje naše tvrdenie.

B. Tvrdím: ľubovoľná taká hrana z $\overline{G}_i$, ktorá v grafe G patrí aspoň do jedného lineárneho faktora grafu $\overline{G}_i$, patrí aspoň do jedného lineárneho faktora grafu $\overline{G}_i$. Dôkaz: toto tvrdenie vyplýva z lemmy 12, z tvrdenia A a zo skutočnosti, že graf G má oproti grafu $\overline{G}$ viac len o tie hrany, ktoré spojujú dva uzly z V_0, teda o hrany nepatriace do žiadneho lineárneho faktora grafu G.

Z uvedených tvrdení vyplýva toto: ľubovoľné dva uzly grafu $\overline{G}_i$ sú v relácii Ω, čiže: $\overline{G}_i$ je Ω-graf. Tým je dokázané aj posledné tvrdenie vety.

Veta 32. *Nech G je ľubovoľný Ω-graf s viac než dvoma uzlami. Ak rozklad $\overline{U}_G^*$ neobsahuje takú triedu, ktorá by mala viac než jeden uzol, potom G je nasýtené jadro.*

Dôkaz. Nech G je Ω-graf s viac než dvoma uzlami. Podľa lemmy 7 neexistuje v G hrana, ktorá by patrila do každého lineárneho faktora grafu G. Ak rozklad $\overline{U}_G^*$ neobsahuje triedu s viac než jedným uzlom, potom v G nemôže existovať hrana, ktorá by nepatrila do žiadneho lineárneho faktora grafu G. Z toho a z predošlého vyplýva: $G = \hat{G}$ a pretože žiadne dva uzly nemôžu byť v relácii Λ, ak $\overline{U}_G^*$ neobsahuje triedu s viac než jedným uzlom, platí v tomto prípade: G je nasýtené jadro. Dôkaz je vykonaný.

Veta 33. *Nech G je ľubovoľné nasýtené jadro, potom G je Ω-graf a ľubovoľná trieda z $\overline{U}_G^*$ obsahuje práve jeden uzol z G.*

Dôkaz je zrejmý.

Veta 34. *Nech G je ľubovoľný Ω-graf, v ktorom rozklad $\overline{U}_G^*$ obsahuje aspoň jednu triedu $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ s viac než jedným uzlom a nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G. Nech $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ je triede V_0 odpovedajúci rozklad množiny uzlov z G nepatriacich do V_0. Nech ďalej $\overline{G}$ je graf, ktorý vznikne z G splynutím uzlov množiny V_0 do nového uzla u_0 a nech $\overline{G}_i$ je ten člen grafu $\overline{G}$, ktorý obsahuje uzly množiny V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. O ľubovoľnej dvojici uzlov $s \neq t$; $s, t \in \overline{G}_i$ platí toto: uzly s, t sú v grafe $\overline{G}_i$ v relácii Λ práve vtedy, keď sú v relácii Λ v grafe G; uzol u_0 nie je v relácii Λ so žiadnym iným uzlom grafu $\overline{G}_i$.*

Dôkaz. Nech $\overline{L}_i$ je lineárny faktor grafu $\overline{G}_i$ obsahujúci hrany a len hrany z L patriace do $\overline{G}_i$. Že uzol u_0 nie je v relácii Λ so žiadnym iným uzlom z $\overline{G}_i$ je zrejmé z toho, že k ľubovoľnému uzlu $w \in \overline{G}_i$ (inému než u_0) patriacemu zrejme do V_i existuje v G taká α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly v_i, w a všetky jej vnútorné uzly patria do V_i (a tiež do $\overline{G}_i$).

Nech teraz $s \neq t$ $(s \neq u_0 \neq t)$ sú ľubovoľné dva uzly z $\overline{G}_i$.

A. Tvrdím: ak existuje v G taká α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly s, t, potom existuje tiež v $\overline{G}_i$ α-cesta vzhľadom na $\overline{L}_i$, ktorá spojuje uzly s, t. Dokážme to. Nech C je ľubovoľná α-cesta vzhľadom na L, ktorá v grafe G spojuje uzly s, t. Ak cesta C neobsahuje žiadny uzol z V_0, alebo ak obsahuje jediný uzol z V_0 (týmto uzlom musí byť potom nevyhnutne uzol v_i z V_0), je platnosť tvrdenia zrejmá.

Predpokladajme, že C obsahuje viac než jeden uzol z V_0. Ak postupujeme po ceste C vychádzajúc z uzla s smerom do uzla t, musí poradím prvý a tiež poradím posledný taký uzol z C, ktorý nepatrí do $\overline{G}_i$, patriť do V_0 (lebo žiadna hrana z G nespojuje dva uzly patriace do rôznych tried rozkladu $\overline{V}$). Nech x_s je prvý a x_t posledný takýto uzol. Zrejme $x_s \neq x_t$. Z oboch častí C' a C'' cesty C, kde C' spojuje uzol s s uzlom x_s a C'' uzol t s uzlom x_t, práve jedna je α-cestou vzhľadom na L. Keby obe boli α-cestami, bolo by $v_i = x_s = x_t$, čo je spor. Keby žiadna nebola α-cestou, potom zvyšujúca časť cesty C medzi x_s a x_t by bola α-cestou, čo odporuje $x_s \Lambda x_t$. Po splynutí uzlov z V_0 do uzla u_0 vznikne zrejme z ciest C', C'' jediná cesta, ktorá je α-cestou vzhľadom na $\overline{L}_i$ a spojuje v $\overline{G}_i$ uzly s, t. To dokazuje naše tvrdenie.

B. Tvrdím: ak v grafe $\overline{G}_i$ existuje α-cesta vzhľadom na $\overline{L}_i$, ktorá spojuje uzly s, t, potom v G existuje α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje tieto dva uzly. Dôkaz tvrdenia: nech $\overline{C}$ je α-cesta vzhľadom na $\overline{L}_i$ spojujúca v grafe $\overline{G}_i$ uzly s, t. Ak cesta $\overline{C}$ neobsahuje uzol u_0, alebo ak $\overline{C}$ obsahuje tento uzol a obe hrany z $\overline{C}$ s ním incidentné sú v grafe $\overline{G}$ incidentné s uzlom v_i, je platnosť tvrdenia zrejmá. Predpokladajme, že v $\overline{G}_i$ existuje len taká α-cesta $\overline{C}$ vzhľadom na $\overline{L}_i$ spojujúca uzly s, t, v ktorej u_0 je vnútorným uzlom a tá hrana tejto cesty, ktorá je incidentná s u_0 a nepatrí do L, je v grafe G incidentná s uzlom v_j z V_0, kde $v_j \neq v_i$ (druhá hrana z $\overline{C}$ incidentná s u_0 je v grafe G incidentná s uzlom v_i z V_0; túto hranu označme znakom h). Nech hrana h spojuje v grafe G uzol v_i s uzlom w_i. Pretože v grafe G platí podľa predpokladu: $v_i \Lambda v_j$ a uzly v_i, w_i sú v G spojené hranou h z L, nemôžu byť uzly v_i w_j v relácii Λ. Teda v G existuje istá α-cesta vzhľadom na L (označme ju C_1), ktorá spojuje uzly u_j, w_i tak, že C_1 okrem uzla w_i a hrany h neobsahuje už žiadny iný prvok z $\overline{C}$. Ak preto ku ceste C_1 pridáme všetky prvky z $\overline{C}$ (okrem uzla w_i a hrany h, ktoré patria už do C_1), dostaneme tak istú α-cestu vzhľadom na L, ktorá v grafe G spojuje uzly s, t.

To dokazuje vetu.

O nasýtených Ω-grafoch platia tieto vety:

Veta 35. *Nech G je ľubovoľný nasýtený Ω-graf, v ktorom rozklad U_G^* obsahu istú triedu $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kde $n > 1$ a nech U_0 je ľubovoľná trieda z $\overline{U}_G^*$ iná než V_0. V grafe G_0, ktorý vznikne z grafu G splynutím triedy V_0 do uzla v_0, platí: všetky uzly triedy U_0 patria do toho istého člena grafu G_0.*

Dôkaz. Ak by trieda U_0 obsahovala jediný uzol, netreba nič dokazovať. Predpokladajme, že trieda U_0 obsahuje najmenej dva uzly s, t. V grafe G teda platí $s\Lambda t$ a pretože v nasýtenom grafe také dva uzly, ktoré sú v relácii Λ, sú spojené hranou, existuje v G hrana h spojujúca uzly s, t. Hrana h patrí nevyhnutne aj do G_0 a pretože žiadna hrana v G_0 nemôže spojovať uzly patriace do rôznych tried rozkladu $\overline{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, musia uzly s, t patriť do tej istej triedy z $\overline{V}$ a teda (pozri lemmu 11 a vetu 31) patria do toho istého člena grafu G_0. To dokazuje vetu.

Poznámka 7. Ak v ľubovoľnom grafe vykonáme splynutie triedy obsahujúcej jediný uzol, tvar grafu sa zrejme nezmení.

Veta 36. *Nech G je ľubovoľný nasýtený Ω-graf. Nech graf G^* vznikne z grafu G tak, že necháme splynúť jednotlivé triedy rozkladu $\overline{U}_G^*$, a to každú z nich do jediného nového uzla. Platí toto: (1) ľubovoľný uzol z G^*, ktorý vznikol splynutím takej triedy z $\overline{U}_G^*$, ktorá obsahuje n uzlov, patrí práve do n členov grafu G^*; (2) ľubo-*

voľný člen grafu G^* je nasýteným jadrom; (3) tvar grafu G^* nie je odvislý od toho, v akom poradí necháme splynúť jednotlivé triedy z $\overline{U}_G^*$.

Dôkaz je zrejmý (veta vyplýva z viet 31 až 35).

Poznámka 8. Veta obdobná vete 35 pre nenasýtený Ω-graf neplatí. Tak napr. graf G nech pozostáva z jedinej kružnice o štyroch uzloch; po splynutí jednej z tried vznikne graf G_0, v ktorom uzly druhej triedy patria do rôznych členov grafu G_0. Pre nenasýtené Ω-grafy neplatí potom zrejme ani veta analogická vete 36.

Poznámka 9. Veta 36 má tento dôsledok: v ľubovoľnom nasýtenom Ω-grafe G existuje práve jeden rozklad množiny hrán z G na triedy hrán tak, že dve hrany z G patria do tej istej triedy rozkladu práve vtedy, keď tieto hrany patria do toho istého člena grafu G^* z vety 36. Tento rozklad množiny hrán nasýteného Ω-grafu môže prípadne zohrať dôležitú úlohu pri štúdiu vlastností nasýtených Ω-grafov. Upozorňujeme na túto skutočnosť, aj keď v tejto práci nemienime túto možnosť využiť. Poznamenajme, že splynutím uzlov triedy z $\overline{U}_{G_0}^*$, aj v prípade, keď G_0 je nenasýtený Ω-graf, vznikne vždy graf G_1, ktorého každý člen je Ω-graf. Tu však výsledný graf je odvislý od toho, v akom poradí nechávame postupne splynúť triedy rozkladov $\overline{U}_{G_0}^*$, $\overline{U}_{G_1}^*$, ...

Odvodené vety dokresľujú význam rozkladu $\overline{U}_G^*$ v Ω-grafe G a tým aj význam tohto rozkladu v ľubovoľnom grafe s lineárnym faktorom.

Časti I a II tejto práce boli uverejnené v Matematicko-fyzikálnom časopise SAV IX, (1959) na str. 73—91 a na str. 136—159. Časť I obsahuje: lemmy 1—4, vety 1—13, poznámky 1—3. Časť II obsahuje: lemmy 5,6, vety 14—30, poznámky 4—6.

Použitá literatúra je citovaná v časti I a II, časť III sa opiera predovšetkým o výsledky, ktorých sa dosiahlo v časti I a II.

Došlo 2. 12. 1959.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

К ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ С ЛИНЕЙНЫМ ФАКТОРОМ III

АНТОН КОЦИГ

Выводы

В данной работе заключаются дальнейшие результаты о конечных графах, которые имеют по крайней мере один линейный фактор, исходя притом из I-ой и II-ой частей, опубликованных в этом журнале, том IX (1959 г.), стр. 73—91, 136—159. Ее главным результатом является теорема 36, которая показывает, что каждый насыщенный Ω-граф G (т. е. граф, каждые две вершины которого находятся в соотношении Ω, определенном в I-ой части работы) возможно определенными редукциями свести к графу G^*, каждый член которого является насыщенным ядром. Притом граф G^* определяется графом G всегда однозначно.

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN GRAPHEN MIT DEM LINEAREN FAKTOR III

ANTON KOTZIG

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit enthält weitere Resultate über die endlichen Graphen, die wenigstens einen linearen Faktor besitzen. Der Verfasser knüpft an die Artikeln I und II an, welcher in dieser Zeitschrift IX (1959) s. 73—91 und 136—159 veröffentlichte. Das Hauptergebnis ist der Satz 36, welcher zeigt, daß jeder satte Ω-graph G (d. h. ein Graph, dessen je zwei Knotten in der Relation Ω [siehe Teil I] stehen) durch bestimmte Reduktionen auf einen Graph G^*, dessen jedes Glied ein satter Kern ist, sich überführen läßt. Dabei ist der Graph G^* durch den Graph G immer eindeutig bestimmt.