PRÍSPEVOK K TEÓRII OHYBU TENKEJ TYČE

JÁN CHRAPAN, Bratislava

Pozdĺžne zaťažená rovná tenká tyč sa pri daných fyzikálnych podmienkach (uvedených v nasledujúcom odseku) ohne do tvaru, ktorému zodpovedá minimálna elastická energia [1]. V tomto tvare sa tyč javí ako oblúk elastickej krivky [2].

Predpokladajme, že sa tyč dĺžky l pri pozdĺžnom zaťažení neskráti ani nepredĺži a že ohyb bude rovinný a symetrický. Keď zavedieme dvojrozmerný ortogonálny kartézsky vzťažný systém s osami v rovine ohybu tak, aby konce tyče boli viazané na os x, tenzor dilatácie tyče bude tvaru ([3], str. 142)

$$\overline{\overline{B}} = \beta_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Podľa Hookeovho zákona pre homogénnu tyč ([4], str. 59 a nasl.) z relácie (1) vychádza tenzor napätia ([3], str. 149)

$$\overline{\overline{T}} = 2\mu\beta_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dostatočne zaťažená tyč sa ohýba, pretože podlieha bočným napätiam v rovine zavedeného vzťažného systému. Tieto napätia podľa (2) sú zložky vektora napätia v smere osi y, súvisiaceho s rovinou kolmou na os x. Ak ich vezmeme ako priamo úmerné zakriveniu tyče $\left(\text{krivosti } \frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}s}\right.$, kde $\varkappa$ je smerový uhol dotyčnice ohybovej krivky tyče a s je oblúk tejto krivky$\left.\right)$, bude

$$2\mu\beta_{xy} = A \cdot \frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}s}. \tag{3}$$

Hustota elastickej energie tyče, definovaná polovicou spuru skalárneho súčinu tenzora napätia a tenzora dilatácie ([3], str. 157) na základe (1); (2) a (3) je

$$\Phi = \frac{1}{2}((\overline{\overline{T}}\overline{\overline{B}})) = \frac{1}{4\mu} A^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}s}\right)^2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\mu} A^2 \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

a pre úhrnnú elastickú energiu dostaneme

$$H = \int_0^l \Phi q \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \gamma \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right)^2 \mathrm{d}s, \tag{4}$$

kde q je konštantný prierez tyče a hodnota

$$\gamma = \frac{1}{\mu} q A^2 > 0 \tag{5}$$

je vhodne zavedená konštanta úmernosti, závislá od geometrických a elastických vlastností tyče.

Ohybový stav tyče predstavuje viazaný variačný problém s integrálou vedľajšou podmienkou

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x = \int_0^l \cos \alpha \, \mathrm{d}s = l - \sigma = \xi = \text{const.} \tag{6}$$

a s okrajovými podmienkami, danými v koncových bodoch tyče.

Hodnota σ vo vzťahu (6) je dĺžka posunutia zaťaženého konca tyče pozdĺž osi x, následkom ktorého sú konce ohnutej tyče vzdialené o dĺžku $\xi < l$.

Podľa Lagrangeovej variačnej metódy je funkcionál problému

$$J = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right)^2 + \lambda \cos \alpha \right\} \mathrm{d}s$$

a jeho izochronná variácia sa musí rovnať nule;

$$\delta J = 0.$$

Eulerova—Lagrangeova diferenciálna rovnica extremály $\alpha(s)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} = -\varepsilon \sin \alpha,$$

kde

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\gamma}, \tag{7}$$

integrovaním poskytuje diferenciálnu rovnicu

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right)^2 = 2\varepsilon \cos \alpha + c, \tag{8}$$

v ktorej hodnota c znamená integračnú konštantu.

Zo vzťahu (4) po dosadení z relácie (8) je

$$H = \frac{1}{2} \gamma \int_0^l (2\varepsilon \cos \alpha + c) \, \mathrm{d}s,$$

z čoho na základe vedľajšej podmienky (6) a vzhľadom na (7) po malej úprave vychádza pre integračnú konštantu vzťahu (8) hodnota

$$c = 2 \, . \, \frac{H - \lambda\xi}{\gamma l}. \tag{9}$$

V koncových bodoch je tyč viazaná na os x, preto sa v týchto bodoch bočné napätia rušia pevnosťou väzby a krivosť tyče sa v týchto bodoch na základe (3) rovná nule, takže podľa (8) platí

$$c = -2\varepsilon \cos \alpha_0, \tag{10}$$

z čoho vzhľadom na (7) a (9) vychádza

$$\cos \alpha_0 = \frac{\lambda\xi - H}{l\lambda},$$

resp. po malej úprave

$$\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} = \frac{H + \lambda\sigma}{2l\lambda}. \tag{11}$$

V relácii (11) sa znakom α_0 označujú smerové uhly dotyčníc ohybovej krivky tyče v jej koncových bodoch. Tieto uhly sú pri symetrickom ohybe čo do absolútnej hodnoty rovnaké. Pre reálne hodnoty uhla α_0 platí nerovnosť

$$0 \leqq \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} < 1. \tag{12}$$

Separovaním premenných v rovnici (8) máme

$$\mathrm{d}s = - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{c + 2\varepsilon \cos \alpha}}. \tag{13}$$

Záporné znamienko odmocniny na pravej strane (13) súvisí s orientáciou osi y vzťažného systému, ktorú volíme tak, aby krivosť ohybovej krivky tyče bola záporná; potom sa ohyb tyče javí v kladnom zmysle osi y a pre smerové uhly v koncových bodoch tyče platí

$$[\alpha]_{s=0} = \alpha_0 > 0; \qquad [\alpha]_{s=l} = -\alpha_0 < 0. \tag{14}$$

Keď v rovnici (13) uplatníme substitúciu

$$\cos\alpha = 1 - 2\zeta^2, \tag{15}$$

po integrovaní dostaneme

$$(s - s_0)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varkappa} = F(\zeta;\ \varkappa), \tag{16}$$

kde $F(\zeta;\ \varkappa)$ je Legendreov normálny eliptický integrál prvého typu, ktorého modul vzhľadom na (7) a (9) spĺňuje podmienku

$$\varkappa^2 = \frac{4\varepsilon}{c + 2\varepsilon} = \frac{2l\lambda}{H + \lambda\sigma} \tag{17}$$

a hodnota s_0 je integračná konštanta.

Po porovnaní výsledku (17) s rovnicou (11) podľa (12) vychádza nerovnosť

$$\varkappa^2 > 1. \tag{18}$$

Inverziou relácie (16) dostaneme pre argument ζ Jacobiho eliptický funkčný vzťah

$$\zeta = \mathrm{sn}\left\{(s - s_0)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varkappa};\ \varkappa\right\},$$

z ktorého restitúciou na základe (15) je

$$\cos\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sn}^2\left\{(s - s_0)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varkappa};\ \varkappa\right\}. \tag{19}$$

Vzhľadom na nerovnosť (18) treba vyjadrenie (19) transformovať na reciproký modul, o ktorom podľa (11); (12) a (17) platí

$$0 \leqq k^2 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{H + \lambda\sigma}{2l\lambda} = \sin^2\frac{\alpha_0}{2} < 1. \tag{20}$$

Po tejto transformácii z rovnice (19) máme

$$\cos\alpha = 1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\{(s - s_0)\sqrt{\varepsilon};\ k\} \tag{21}$$

a podľa relácie

$$\sin^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

vzhľadom na voľbu znamienka argumentu vo funkčnom vzťahu (16) vychádza

$$\sin\alpha = -2k\,\mathrm{sn}\{(s - s_0)\sqrt{\varepsilon};\ k\}\,\mathrm{dn}\{(s - s_0)\sqrt{\varepsilon};\ k\}. \tag{22}$$

Keď uplatníme okrajové podmienky (14), z relácie (21) vzhľadom na (20) je

$$\mathrm{sn}^2\{s_0\sqrt{\varepsilon};\ k\} = 1;\ \mathrm{sn}^2\{(l - s_0)\sqrt{\varepsilon};\ k\} = 1 \tag{23}$$

a zo vzťahu (22) súčasne plynú nerovnosti

$$\mathrm{sn}\{s_0\sqrt{\varepsilon};\ k\} > 0;\ \mathrm{sn}\{(l - s_0)\sqrt{\varepsilon};\ k\} > 0. \tag{24}$$

Aby relácie (23) a (24) mohli byť simultánne splnené, musí platiť

$$s_0\sqrt{\varepsilon} = (l - s_0)\sqrt{\varepsilon} = K, \tag{25}$$

z čoho vychádza pre integračnú konštantu rovnice (15)

$$s_0 = \frac{1}{2}l. \tag{26}$$

Hodnota K vo vzťahu (25) je konštanta periódy Jacobiho eliptických funkcií (úplný eliptický integrál prvého typu).

Zo vzťahu (25) vzhľadom na (26) je

$$\varepsilon = \left(\frac{2K}{l}\right)^2 \tag{27}$$

a na základe (10) a (20) je

$$c = -2(1 - 2k^2)\left(\frac{2K}{l}\right)^2. \tag{28}$$

Parametrické rovnice ohybovej krivky tyče dostaneme z relácií

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s;$$
$$\mathrm{d}y = \sin\alpha\,\mathrm{d}s, \tag{29}$$

ich riešením pri daných okrajových podmienkach.

Z prvej rovnice (29) po dosadení zo vzťahu (21) máme

$$x = \int\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\{1 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2(u;\ k)\}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\{2E(u;\ k) - u\} + c_1, \tag{30}$$

kde $E(u;\ k)$ znamená Legendreov normálny eliptický integrál druhého typu s argumentom

$$u = (s - s_0)\sqrt{\varepsilon} \tag{31}$$

a hodnota c_1 je integračná konštanta.

Uplatnením okrajových podmienok

$$[x]_{s=0} = x_0; \qquad [x]_{s=l} = x_1$$

z relácie (30) vzhľadom na (6); (25) a (31) po príslušných úpravách vychádza

$$c_1 = x_0 + l\left\{\frac{\mathrm{E}}{K} - \frac{1}{2}\right\}; \quad x = x_0 + \frac{l}{K}\left[\mathrm{E}\left\{K\left(\frac{2s}{l} - 1\right); k\right\} + \mathrm{E}\right] - s; \tag{32}$$

$$1 - \frac{\mathrm{E}}{K} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{l}, \tag{33}$$

kde E je úplný eliptický integrál druhého typu.

Z druhej rovnice (29) po dosadení zo vzťahu (22) máme

$$y = \int \sin\alpha \, ds = -\frac{2k}{\sqrt{\varepsilon}}\int \mathrm{sn}\,(u; k)\,\mathrm{dn}\,(u; k)\,du =$$

$$= \frac{2k}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{cn}\,(u; k) + c_2, \tag{34}$$

kde argument funkcie je daný rovnosťou (31) a hodnota c_2 znamená integračnú konštantu.

Na základe okrajových podmienok

$$[y]_{s=0} = 0; \quad [y]_{s=l} = 0$$

z relácie (34) vzhľadom na (25) a (26) vychádza

$$c_2 = 0;$$

$$y = k\,.\,\frac{l}{K}\,\mathrm{cn}\left\{K\left(\frac{2s}{l} - 1\right); k\right\}. \tag{35}$$

Vzťahy (32) a (35) predstavujú parametrické rovnice ohybovej krivky tyče. Eliminovaním parametra s dostaneme analytický výraz ohybovej krivky tyče v tvare

$$x = x_0 + \frac{l}{K}\left[\mathrm{E}\left\{\arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{Ky}{kl}\right)^2}; k\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\,\mathrm{F}\left\{\arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{Ky}{kl}\right)^2}; k\right\} + \mathrm{E}\right] - \frac{1}{2}\,l.$$

Ohybová krivka tyče má maximum v bode, ktorého súradnice sú

$$x_{\max} = [x]_{s=\frac{1}{2}l} = x_0 + \frac{1}{2}\,(l - \sigma);$$

$$y_{\max} = [y]_{s=\frac{1}{2}l} = k\frac{l}{K}. \tag{36}$$

Na základe vzťahu (5); (7); (25) a (26) splňuje Lagrangeov multiplikátor λ nerovnosť

$$\lambda > 0, \tag{37}$$

z ktorej vzhľadom na (17); (18) a (20) vyplýva

$$k^2 > \frac{1}{2}\frac{\sigma}{l}. \tag{38}$$

Podľa relácie (17) je Lagrangeov multiplikátor λ funkciou posunutia σ, takže platí

$$\lambda(\sigma) = \frac{H(\sigma)}{2k^2(\sigma)\,l - \sigma}. \tag{39}$$

Pre dostatočne malý prírastok úhrnnej elastickej energie $\Delta H(\sigma)$ a pre posunutie $\Delta\sigma$, ktoré k tejto energii prislúcha, plynie z (39) po malej úprave

$$\lambda(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\dfrac{\Delta H(\sigma)}{\Delta\sigma}}{2l\dfrac{\Delta k^2(\sigma)}{\Delta\sigma} - 1} = \frac{\mathrm{d}\,H(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}, \tag{40}$$

keďže podľa (33) je

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\left\{2l\frac{\Delta k^2}{\Delta\sigma}\right\} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2}{1 - \dfrac{E}{K}} = 2.$$

Vzhľadom na fyzikálny význam veličín vystupujúcich v diferenciálnom kvociente (40) má Lagrangeov multiplikátor $\lambda(\sigma)$ kladnú hodnotu, v súhlase s nerovnosťou (37).

Podľa vzťahu (40) je úhrnná elastická energia tyče

$$H = \int_0^\sigma \lambda(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{41}$$

Výsledok (41) ukazuje, že Lagrangeov multiplikátor $\lambda(\sigma)$ určuje silu zaťaženia tyče, súvisiacu s posunutím veľkosti σ. Táto sila

$$P = \lambda(\sigma) \tag{42}$$

je funkciou posunutia σ, ktorá vzhľadom na reláciu (7); (25); (26) a (42) je

$$P(\sigma) = \left(\frac{2K}{l}\right)^2 . \gamma. \tag{43}$$

Vzťah (43) umožňuje určiť konštantu γ (5) pri známej sile zaťaženia tyče;

$$\gamma = P\left(\frac{l}{2K}\right)^2. \tag{44}$$

Podmienky väzby, ktoré sme zaviedli pre koncové body tyče, pripúšťajú ohyby, pre ktoré platí

$$0 \leqq \sigma \leqq l.$$

Z tohto obmedzenia vzhľadom na reláciu (33) vychádza pre modul k ohraničenie ([7], str. 53 a nasl.)

$$0 \leqq k^2 \leqq 0{,}82\ldots, \tag{45}$$

ktoré je užšie ako nerovnosť (20).

Na základe (45) z rovnice (43) plynie pre silu zaťaženia tyče relácia ([7], str. 91 a nasl.)

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \gamma \leqq P(\sigma) \leqq \left(\frac{4{,}6\ldots}{l}\right)^2 \gamma, \tag{46}$$

ktorá dopĺňa Eulerovu podmienku ohybu [5]

$$P \geqq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \gamma,$$

obojstranným ohraničením veľkosti sily zaťaženia tyče.

Z rovnice (39) vzhľadom na (42) je úhrnná elastická energia tyče

$$H = P(2k^2 l - \sigma). \tag{47}$$

Pomocou tohto vzťahu možno hodnotu elastickej energie ohnutej tyče vyčísliť pri známom posunutí σ a známej sile zaťaženia tyče.

Podľa Navierovej teórie ohybu [6] je konštanta (5)

$$\gamma = \mathrm{E}J, \tag{48}$$

kde E znamená Youngov modul pružnosti a J je moment zotrvačnosti prierezu tyče. Na základe (43) možno experimentálne vyšetriť správnosť vzťahu (48) meraním sily zaťaženia tyče a posunutia σ, ktoré s touto silou súvisí. Porovnaním rovníc (43) a (48) dostaneme reláciu pre určenie Youngovho modulu pružnosti

$$\mathrm{E} = \frac{P}{J}\left(\frac{l}{2K}\right)^2. \tag{49}$$

Ak označíme priemernú hodnotu sily zaťaženia tyče, súvisiaceho s posunutím σ, znakom P_0, platí

$$P_0 \leqq P(\sigma)$$

a pre úhrnnú elastickú energiu tyče možno písať podľa (41) a (42) vyjadrenie

$$H = P_0\sigma,$$

na základe ktorého je

$$H \leqq P\sigma,$$

z čoho vzhľadom na (47) máme

$$k^2 \leqq \frac{\sigma}{l}.$$

Spojením tohto výsledku s nerovnosťou (38) vzhľadom na (40) vychádza pre hodnotu modulu k relácia

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma}{l} \leqq k^2 \leqq \frac{\sigma}{l}.$$

Zhrnutie: Rovinný symetrický ohyb pozdĺžne zaťaženej rovnej pružnej tenkej homogénnej tyče je v práci riešený ako viazaný variačný problém s integrálnou vedľajšou podmienkou. Z parametrickej rovnice ohybovej krivky tyče (32), pri podmienke $s = l$, vychádza relácia (33), pomocou ktorej možno zo známeho posunutia σ zaťaženého konca tyče určiť smerové uhly α_0 koncových bodov tyče (20) a poradnicu bodu, v ktorom je maximum ohybovej krivky tyče (36). Pri známej sile zaťaženia tyče možno podľa (47) vyčísliť hodnotu elastickej energie ohnutej tyče, ktorá predstavuje potenciálnu energiu tyče. Na základe (49) možno určiť Youngov modul pružnosti. Vzťah (46) predstavuje doplnenie Eulerovej podmienky ohybu. Použité konštanty ε (7) a c (10) sú definované na základe výsledkov riešenia vzťahmi (27) a (28); možno ich vyčísliť zo známeho posunutia σ, po zistení numerickej hodnoty modulu k z relácie (33). Konštantu γ (5) určuje rovnosť (44), pri známej hodnote sily zaťaženia tyče, alebo úhrnnej elastickej energie tyče, ktorú možno merať metódou postupného zaťažovania tyče. Riešenie poskytuje možnosť vypracovať experimentálnu metódu na určenie Youngovho modulu pružnosti (49) a na meranie energie potrebnej na elastický ohyb tenkej tyče (47). Relácia (43) určuje pri známych geometrických a elastických vlastnostiach tyče silu zaťaženia v súvislosti s posunutím zaťaženého konca tyče a naopak.

LITERATÚRA

[1] Fuss P. H., *Correspondance mathématique et physique* 2, St. Pétersbourg 1843. 26. list D. Bernoulliho L. Eulerovi z októbra 1742.
[2] Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 245—310. Additamentum I. De curvis elasticis. Lausanne—Genéve 1744.
[3] Weizel W., *Lehrbuch der theoretischen Physik I*, Berlin 1949.
[4] Sommerfeld A., *Mechanik der deformierbaren Medien*, Leipzig 1954.
[5] Euler L., *Nouv. Mémoires de l'Académie royale de sciences à Berlin* 13 (1759), 252.
[6] Navier L., *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, Paris 1833.
[7] Jahnke E.—Emde, F., *Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig 1952.

Došlo 24. 11. 1957.

Katedra fyziky Vysokej školy pedagogickej v Bratislave

ВКЛАД К ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКОЙ БАЛКИ

ЯН ХРАПАН

Выводы

Плоскостный симетрический изгиб продольно загруженный, прямой, упругой, тонкой, гомогенной балкой решается в труде как связанная вариационная проблема с интегральным условием. Из параметрического уравнения кривой изгибной балки (32) при условии $s = l$ выходит реляция (33), при помощи которой можно из знакомого перемещения σ загруженного конца балки определить углы направления α_0 концовых точек балки (20) и ординату точки, в которой находится максимум изогнутой кривой балки (36). При известной силе загруженности балки можно (47) перечислить величину эластической энергии прогнутой балки, которая представляет потенциальную энергию балки. На основании (49) можно определить модуль упругости Юнга. Отношение (46) представляет дополнение условия изгиба Ейлера. Использованные постоянные величины ε (7) и c (10) определяются на основе результатов решения отношениями (27) и (28); можно их перечислить из известного перемещения σ, после определения нумерной величины модуля k из реляции (33). Постоянную величину γ (5) определяет равенство (44), при известной величине силы загруженности балки, или суммарной эластической энергии балки, которую можно измерять методом последовательного загружения балки. Решение даёт возможность розработать экспериментальный метод для определения модуля упругости Юнга (49) и для измерения энергии нужной для эластического изгиба тонкой балки (47). Реляция (43) определяет при известных геометрических и эластических свойствах балки силу загруженности в отношении с перемещением загруженного конца балки и наоборот.

EIN BEITRAG ZUR BIEGUNGSTHEORIE EINES DÜNNEN STABES

JÁN CHRAPAN

Zusammenfassung

Die ebene symmetrische Biegung eines länglich belasteten geraden elastischen dünnen homogenen Stabes wird in der Arbeit als ein gebundenes Variationsproblem mit einer integralen Nebenbedingungen gelöst. Aus der parametrischen Gleichung der Biegungskurve des Stabes (32) bei der Bedingung $s = l$ geht die Relation (33) aus mit Hilfe deren aus der bekannten Verschiebung σ des belasteten Stabendes die Richtungswinkel α_0 der Endpunkte des Stabes (20) und die Ordinate eines Punktes bestimmt werden kann in dem das Maximum der Biegunskurve des Stabes (36) liegt. Bei der bekannten Belastigungskraft des Stabes kann man nach (47) den Wert der elastischen Energie des gebogen Stabes auszählen, welche die Potenzialenergie des Stabes vorstellt. Auf Grund (49) kann man das Young-Modul der Elastizität bestimmen. Die Beziehung (46) stellt die Ergänzung Eulers Biegungsbedigung (Knickformel) vor. Die benützten konstanten Größen ε (7) und c (10) werden auf Grund der Lösungsresultaten durch die Beziehung (27) und (28) definiert; man kann sie aus der bekannten Verschiebung σ auszählen nach der Feststellung des nummerischen Wertes des Moduls k aus der Relation (33) auszählen. Die konstante Größe γ (5) bestimmt die Gleichkeit (44) beim bekannten Kraftwert der Belastigung des Stabes oder der gesammten elastischen Energie des Stabes, die man mit der Methode der fortschreitenden Stabbelastigung messen kann. Die Lösung bietet die Möglichkeit die experimentelle Methode zu Bestimmung des Youngs-Modul der Elastizität (49) und zum Messen der Energie, die zur elastischen Biegung des dünnen Stabes (47) notwendig ist, ausarbeiten. Die Relation (43) bestimmt bei der bekannten geometrischen und elastischen Stabeigenschaften die Belastigungskraft in dem Zusammenhang mit der Verschiebung des belasteten Stabendes und umgekehrt.