MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK X ČÍSLO 3

# VÝPOČET LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE SÚČINU DVOCH ZLOŽENÝCH FUNKCIÍ

JÚLIUS CAMBEL, Bratislava

Nech $u(t)$ a $v(t)$ sú dve komplexné funkcie reálnej premennej $t$, o ktorých urobíme v ďalšom potrebné predpoklady, a nech $\overline{u}(z)$ a $\overline{v}(z)$ sú ich Laplaceove transformácie. Je prirodzené sa pýtať, ako možno použiť znalosť funkcií $\overline{u}(z)$ a $\overline{v}(z)$ pre výpočet Laplaceovej transformácie súčinu $u(t)\, v(t)$. Odpoveď na túto otázku dal G. A. Grinberg [4] vo svojej práci, ktorú uverejnil r. 1943. Našiel vzorec, používajúci integráciu v komplexnej rovine, ktorým tento problém vyriešil. V r. 1949 A. V. Ivanov [5] uverejnil vzorec, používajúci opäť integráciu v komplexnej rovine, pre výpočet Laplaceovej transformácie súčinu $u[f(t)]\, v(t)$.

V predloženej práci je dokázaná veta, z ktorej predchádzajúce vzorce vyplývajú ako špeciálny prípad. Dokážeme vetu pre výpočet Laplaceovej transformácie súčinu dvoch zložených funkcií $u[f(t)]\, v[g(t)]$, za presne stanovených podmienok pre uvažované funkcie $u(t)$, $v(t)$, $f(t)$ $g(t)$, $u[f(t)]$, $v[g(t)]$ a $u[f(t)]\, v[g(t)]$.

Napred si dokážeme dve pomocné vety.

**Lemma 1.** Nech $\Phi(p,t)$ je *komplexná funkcia dvoch premenných* $p, t$, *definovaná na kartézskom súčine* $(c)\times\langle a, \infty)$, *kde* $(c)$ *je po úsekoch hladká čiara konečnej dĺžky v komplexnej rovine od bodu* $C_1$ *až po bod* $C_2$ *a* $\langle a, \infty)$ *je polouzavretý interval na reálnej osi, v ktorom je* $a > -\infty$.

*Nech* $\Phi(p, t)$ *splňuje tieto podmienky:*

$Q_1$. *Je spojitá ako funkcia dvoch premenných na kartézskom súčine* $(c)\times\langle a, A\rangle$ *pre každé* $A > a$.

$Q_2$. *Integrál*

$$\int_a^\infty \Phi(p, t)\, dt$$

*rovnomerne konverguje vzhľadom na premennú* $p$, *ležiacu na čiare* $(c)$.

*Potom platí:*

$$\int_{C_1(c)}^{C_2}\Big[\int_a^{\infty}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}p=\int_a^{\infty}\Big[\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}p\Big]\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

**Dôkaz.** Rovnosť (1) dokážeme z rovnosti

$$\int_{C_1(c)}^{C_2}\Big[\int_a^{x}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}p=\int_a^{x}\Big[\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}p\Big]\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

v ktorej $a \leqq x \leqq A$, tak, že z obidvoch jej strán vypočítame limitu pre $x \to \infty$. Najprv si ukážeme, že obidve strany rovnosti (2) existujú. Za týmto účelom ukážeme, že integrál

$$J(t)=\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}p$$

je spojitá funkcia premennej $t$ v intervale $\langle a, A\rangle$.

Nech je $x \in \langle a, A\rangle$. Máme ukázať, že ku danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre $|t - x| < \delta$ je $|J(t) - J(x)| < \varepsilon$. Označme znakom $L$ dĺžku čiary $(c)$. Keďže $(c) \times \langle a, A\rangle$ je kompaktná množina, je $\Phi(p, t)$ na tejto množine rovnomerne spojitá. Teda existuje ku číslu $\frac{\varepsilon}{L} > 0$ také číslo $\delta_1 > 0$, že nerovnosť $|\Phi(p,t) - \Phi(p,x)| < \frac{\varepsilon}{L}$ je splnená pre všetky $t$, spĺňajúce nerovnosť $|t - x| < \delta_1$ a pre všetky $p$ na čiare $(c)$. Tvrdíme, že $\delta_1$ má hľadanú vlastnosť čísla $\delta$. Skutočne, pre všetky $t$, ktoré spĺňajú nerovnosť $|t - x| < \delta_1$ je

$$|J(t)-J(x)| = \Big|\int_{C_1(c)}^{C_2}[\Phi(p,t)-\Phi(p,x)]\,\mathrm{d}p\Big| \leqq$$

$$\leqq \max_{p\in(c)}|\Phi(p,t)-\Phi(p,x)|\,.\,L < \frac{\varepsilon}{L}L=\varepsilon.$$

Podobne sa ukáže, že aj integrál

$$I(p)=\int_a^x\Phi(p,t)\,\mathrm{d}t$$

je spojitou funkciou premennej $p$ na čiare $(c)$. Keďže každá funkcia, spojitá v uzavretom intervale, je v tomto intervale integrovateľná, integrály na obidvoch stranách rovnosti (2) existujú.

Pre $a \leqq x \leqq A$ zaveďme označenie

$$H(x)=\int_{C_1(c)}^{C_2}I(p)\,\mathrm{d}p \quad \text{a} \quad K(x)=\int_a^x J(t)\,\mathrm{d}t.$$



Chceme dokázať, že $H(x) = K(x)$ v intervale $\langle a, A\rangle$. Aby sme toto dokázali, spočítame deriváciu obidvoch strán tejto rovnice.

Najprv spočítame deriváciu $K(x)$. Pretože

$$K(x)=\int_a^x J(t)\,\mathrm{d}t$$

a $J(t)$ je spojitá funkcia, $\frac{\mathrm{d}K(x)}{\mathrm{d}x}$ existuje a platí

$$\frac{\mathrm{d}K(x)}{\mathrm{d}x}=J(x)=\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,x)\,\mathrm{d}p.$$

Teraz počítajme deriváciu $H(x)$. Tvrdíme, že aj $H(x)$ má v bode $x$ deriváciu a táto sa rovná integrálu

$$\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,x)\,\mathrm{d}p.$$

Za tým účelom vyšetrime rozdiel

$$U(h)=\frac{1}{h}[H(x+h)-H(x)]-\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,x)\,\mathrm{d}p=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{C_1(c)}^{C_2}\Big[\int_x^{x+h}\Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}p-\int_{C_1(c)}^{C_2}\Phi(p,x)\,\mathrm{d}p=$$

$$=\int_{C_1(c)}^{C_2}\Big\{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[\Phi(p,t)-\Phi(p,x)]\,\mathrm{d}t\Big\}\,\mathrm{d}p.$$

Máme

$$|U(h)| \leqq L\,.\max_{p\in(c)}\Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[\Phi(p,t)-\Phi(p,x)]\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Aby sme dokázali naše tvrdenie, stačí ukázať, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $|h| < \delta$ je $|U(h)| < \varepsilon$.

Nech $\varepsilon > 0$ je dané. Na začiatku tohto dôkazu sme ukázali, že ku každému $\frac{\varepsilon}{L} > 0$ existuje $\delta_1 > 0$, že nerovnosť $|\Phi(p,t) - \Phi(p,x)| < \frac{\varepsilon}{L}$ je splnená pre všetky $|t - x| < \delta_1$ a pre všetky $p$ $(c)$. Tvrdíme, že za $\delta$ stačí zvoliť toto $\delta_1$. Akonáhle je totiž $|h| < \delta_1$, interval $\langle x, x + h\rangle$ leží vo vnútri intervalu $\langle x - \delta_1, x + \delta_1\rangle$.

Potom je

$$\left|\int_x^{x+h} [\Phi(p,t)-\Phi(p,x)]\,\mathrm{d}t\right| < h\frac{\varepsilon}{L} \text{ pre všetky } p\in(c).$$

Pre všetky $|h| < \delta_1$ je teda $|U(h)| < \frac{1}{h}\, h\frac{\varepsilon}{L}\,.\, L = \varepsilon$

Týmto sme dokázali, že

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = J(x) = \int_{C_1(c)}^{C_2} \Phi(p,x)\,\mathrm{d}p.$$

Zatiaľ sme dokázali, že obidve strany rovnice (2) majú rovnakú deriváciu pre všetky $x \in \langle a, A\rangle$, ak pritom deriváciu v bode $a$ rozumieme ako deriváciu sprava a deriváciu v bode $A$ ako deriváciu zľava. Keďže každá funkcia, ktorá má v danom bode deriváciu, je v tomto bode spojitá, sú funkcie $H(x)$ a $K(x)$ spojité v uzavretom intervale $\langle a, A\rangle$. Spojité funkcie $H(x)$ a $K(x)$ majúce v uzavretom intervale rovnakú deriváciu v každom bode môžu sa líšiť na tomto intervale len o additívnu konštantu. Keďže v bode $a$ je zrejme $H(a) = K(a) = 0$ je $H(x) = K(x)$ pre každé $x\in\langle a, A\rangle$. Týmto sme dokázali rovnosť (2).

Teraz dokážeme rovnosť (1). Vyšetríme limitu ľavej strany (2), t. j.

$$\lim_{x\to\infty} \int_{C_1(c)}^{C_2} \left[\int_a^x \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}p.$$

Napred poznamenajme, že integrál

$$\int_{C_1(c)}^{C_2} \left[\int_a^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}p$$

existuje. Za tým účelom dokážeme, že integrál

$$I_1(p) = \int_a^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t$$

je spojitou funkciou $p$ na čiare $(c)$. Je dané $\varepsilon > 0$, máme nájsť $\delta > 0$, že nerovnosť $|I_1(p) - I_1(p_0)| < \varepsilon$ je splnená, akonáhle je $|p - p_0| < \delta$ a $p \in (c)$. Z podmienky $Q_2$ vyplýva, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje také číslo $B$, že pre každé $A > B$ a každé $p\in(c)$ je

$$\left|\int_A^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zvoľme $A > B$. Potom je

$$I_1(p) - I_1(p_0) = \int_a^A [\Phi(p,t) - \Phi(p_0,t)]\,\mathrm{d}t + \int_A^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t - \int_A^\infty \Phi(p_0,t)\,\mathrm{d}t.$$



Keďže $\Phi(p,t)$ je spojitá funkcia na $(c) \times \langle a, A\rangle$, teda na kompaktnej množine, je $\Phi(p,t)$ na tejto množine aj rovnomerne spojitá. To znamená, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3(A-a)} > 0$ existuje také $\delta_1$, že pre $|p - p_0| < \delta_1$, $p\in(c)$ a pre každé $t \in \langle a, A\rangle$ je

$$|\Phi(p,t) - \Phi(p_0,t)| < \frac{\varepsilon}{3(A-a)}, \quad a < A < \infty.$$

Tvrdíme, že toto $\delta_1$ má hľadanú vlastnosť. Nech je $p\in(c)$ také, že splňuje nerovnosť $|p - p_0| < \delta_1$. Potom platí

$$|I_1(p) - I_1(p_0)| <$$

$$< \int_a^A |\Phi(p,t) - \Phi(p_0,t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_A^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^\infty \Phi(p_0,t)\,\mathrm{d}t\right| <$$

$$< (A-a)\frac{\varepsilon}{3(A-a)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Z práve uvedeného vyplýva, že integrál

$$\int_{C_1(c)}^{C_2} I_1(p)\,\mathrm{d}p = \int_{C_1(c)}^{C_2} \left[\int_a^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}p$$

existuje. Označme jeho hodnotu $M_1$.

Po tejto poznámke ukážeme, že existuje $\lim_{x\to\infty} H(x)$ a že sa rovná číslu $M_1$. Vyšetríme rozdiel

$$|M_1 - H(A)| = \left|\int_{C_1(c)}^{C_2}\left[\int_a^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}p - \int_{C_1(c)}^{C_2}\left[\int_a^A \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}p\right| =$$

$$= \left|\int_{C_1(c)}^{C_2}\left[\int_A^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}p\right|.$$

Je dané $\varepsilon > 0$. Máme nájsť $N > 0$, že $|M_1 - H(A)| < \varepsilon$ pre všetky $x > N$. Z podmienky $Q_2$ vyplýva, že existuje ku číslu $\frac{\varepsilon}{L} > 0$ také číslo $B > 0$, že pre $A > B$ je

$$\left|\int_A^\infty \Phi(p,t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Tvrdíme, že $B$ je hľadané číslo $N$. Zvoľme $A > B$. Potom je $|M_1 - H(A)| < L\,.\,\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

Z tohto vyplýva, že existuje $\lim_{x\to\infty} H(x)$ a že sa rovná $M_1$.

Teraz vyšetríme limitu pravej strany rovnice (2), t. j. $\lim_{x\to\infty} K(x)$. Z rovnosti $H(x) = K(x)$ pre každé konečné $x$ a z existencie $\lim_{x\to\infty} H(x)$ vyplýva aj existencia $\lim_{x\to\infty} K(x)$ a rovnosť $\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{x\to\infty} K(x)$. Ale

$$\lim_{x\to\infty} K(x) = \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_2} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt.$$

Teda

$$\int_{C_1(c)}^{C_2} \Big[ \int_a^{\infty} \Phi(p, t)\, dt) \Big]\, dp = \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_2} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt.$$

Týmto je prvá pomocná veta o zámene integračného poradia za nevlastným integrálom dokázaná.

**Lemma 2.** *Nech $\Phi(p, t)$ je komplexná funkcia dvoch premenných $p$, $t$, definovaná na kartézskom súčine $(c) \times \langle a, \infty)$, kde $(c)$ je po úsekoch hladká čiara nekonečnej dĺžky v komplexnej rovine od bodu $C_1$ do $\infty$ a $\langle a, \infty)$ je polouzavretý interval na reálnej osi, v ktorom je $a > -\infty$.*

*Nech $\Phi(p, t)$ splňuje podmienky predchádzajúcej vety $Q_1$, $Q_2$ pre každý konečný úsek na čiare $(c)$, ležiaci medzi bodom $C_1$ a ľubovoľným bodom $C_n$, ležiacim na čiare $(c)$. Okrem týchto nech sú splnené ešte tieto podmienky:*

*$Q_3$. Integrál*

$$\int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp$$

*rovnomerne konverguje vzhľadom na premennú $t$ v každom konečnom intervale $\langle a, A\rangle$, $a < A < \infty$.*

*$Q_4$. Integrál*

$$\int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt$$

*rovnomerne konverguje na uzavretej množine čísel $C_n$ ležiacich na čiare $(c)$, bodom $C_1$ počnúc a $\infty$ končiac.*

*Potom platí:*

$$\int_{C_1(c)}^{\infty} \Big[ \int_a^{\infty} \Phi(p, t)\, dt \Big]\, dp = \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt. \tag{3}$$

Dôkaz. Keďže sú splnené podmienky predchádzajúcej vety, podľa nej pre každé konečné $C_n$ na čiare $(c)$ bude platiť:

$$\int_{C_1(c)}^{C_n} \Big[ \int_a^{\infty} \Phi(p, t)\, dt \Big]\, dp = \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt. \tag{4}$$



Rovnosť (3) dokážeme z rovnosti (4) tak, že spočítame limitu pre $C_n$ idúce do nekonečna po čiare $(c)$ z obidvoch strán rovnosti (4).

Najprv vyšetríme limitu pravej strany rovnosti (4), t. j.

$$\lim_{C_n\to\infty} \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt.$$

Ukážme si, že integrál

$$\int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt$$

existuje. Za tým účelom si dokážeme, že integrál

$$\int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp$$

je spojitou funkciou parametra $t$ v každom konečnom intervale $\langle a, A\rangle$, kde $a < A < \infty$. V predchádzajúcej vete sme dokázali, že integrály pre každé konečné $C_n$:

$$\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p, t)\, dp$$

sú spojitými funkciami parametra $t \in \langle a, A\rangle$. Podľa predpokladu $Q_3$ rovnomerne konvergujú vzhľadom na $t$ v danom intervale pri $C_n \to \infty$ po čiare $(c)$. Keďže rovnomerne konvergentná postupnosť spojitých funkcií má spojitú limitnú funkciu, integrál

$$\int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp$$

je spojitou funkciou parametra $t$ v každom konečnom intervale $t \in \langle a, A\rangle$, kde $a < A < \infty$. Z tohto výsledku a z podmienky $Q_4$ vyplýva, že integrál

$$\int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{\infty} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt$$

existuje. Označme jeho hodnotu $M_2$.

Teraz si ukážeme, že limita

$$\lim_{C_n\to\infty} \int_a^{\infty} \Big[ \int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p, t)\, dp \Big]\, dt$$

existuje a že sa rovná číslu $M_2$.

Za tým účelom vyšetríme rozdiel

$$U(C_n) = M_2 - \int_a^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt =$$

$$= \int_a^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt - \int_a^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt =$$

$$= \int_a^\infty \Big[\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt = \int_a^A \Big[\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt + \int_A^\infty \Big[\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt =$$

$$= \int_a^A \Big[\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt + \int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt - \int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt.$$

Máme

$$|U(C_n)| \leqq \Big|\int_a^A \Big[\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt\Big| +$$

$$+ \Big|\int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt\Big| + \Big|\int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt\Big|.$$

Aby sme dokázali naše tvrdenie, stačí ukázať, že k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $C_0$ na čiare $(c)$ také, že pre všetky čísla $C_n$, ležiace na čiare $(c)$ počnúc bodom $C_0$ a nekonečnom končiac, je $|U(C_n)| < \varepsilon$.

Nech je dané číslo $\varepsilon > 0$. Z podmienky $Q_4$ vyplýva, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje číslo $A_0 > 0$ také, že pre každé $A > A_0$ platí:

$$\Big|\int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{a} \quad \Big|\int_A^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z podmienky $Q_3$ vyplýva, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3(A-a)} > 0$ existuje také číslo $B$ na čiare $(c)$, že pre všetky čísla $C_n$ ležiace na čiare $(c)$ medzi bodom $B$ a $\infty$ je

$$\Big|\int_{C_n(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big| < \frac{\varepsilon}{3(A-a)}, \quad a < A < \infty$$

pre všetky $t$ z každého konečného intervalu $\langle a, A\rangle$. Tvrdíme, že toto číslo $B$ má hľadanú vlastnosť čísla $C_0$ na čiare $(c)$. Skutočne. Nech je $A > A_0$ a $C_n$ nech leží medzi bodom $B$ a $\infty$ na čiare $(c)$. Potom je

$$|U(C_n)| < \int_a^A \frac{\varepsilon}{3(A-a)}\,dt + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$



Z tohto vyplýva, že limita

$$\lim_{C_n\to\infty} \int_a^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^{C_n} \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt$$

existuje a že sa rovná číslu $M_2$.

Teraz vyšetrime limitu ľavej strany rovnosti (4), t. j. limitu

$$\lim_{C_n\to\infty} \int_{C_1(c)}^{C_n} \Big[\int_a^\infty \Phi(p,t)\,dt\Big]\,dp.$$

Z rovnosti (4) pre každé konečné $C_n$ a existencie limity pravej strany a jej hodnoty $M_2$ vyplýva aj existencia limity ľavej strany rovnosti (4) a jej rovnosť číslu $M_2$.

Nakoniec dostávame:

$$\int_{C_1(c)}^\infty \Big[\int_a^\infty \Phi(p,t)\,dt\Big]\,dp = \int_a^\infty \Big[\int_{C_1(c)}^\infty \Phi(p,t)\,dp\Big]\,dt.$$

Týmto je dôkaz druhej pomocnej vety o zámene integračného poradia pri nevlastných integráloch hotový.

Pre ďalšie účely pripomeňme nasledujúce známe veci. Majme nejakú funkciu $F(t)$, ktorá spĺňa tieto predpoklady:

$P_1$. $F(t)$ je komplexná funkcia reálnej premennej $t$, definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$ a rovná nule pre $t < 0$.

$P_2$. $F(t)$ a $F'(t)$ sú v každom konečnom intervale spojité, okrem konečného počtu bodov nespojitosti prvého druhu.

$P_3$. Existuje také reálne číslo $\sigma_0$, že integrál

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} F(t)\,dt$$

absolutne konverguje.

Potom jej Laplaceova transformácia má tieto vlastnosti (pozri [1] str. 78):

a) Laplaceov integrál

$$L_t\{F(t)\}_p = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\,dt = \overline{F}(p)$$

konverguje absolútne a rovnomerne pre všetky komplexné čísla $p$, spĺňajúce nerovnosť $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ a v oblasti $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ je regulárna funkcia premennej $p$.

b) Ak integrál

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} |F(t)|\,dt$$

nekonverguje pre všetky $p$, existuje reálne číslo $\sigma_a$, tzv. úsečka absolútnej konvergencie, že pre $\mathrm{Re}(p) > \sigma_a$ tento integrál konverguje a pre $\mathrm{Re}(p) < \sigma_a$ tento integrál nekonverguje. Zrejme je $\sigma_a \geqq \sigma_0$. V prípade, že uvedený integrál konverguje pre každé $p$, môžme položiť $\sigma_a = -\infty$.

c) Pre výpočet originálu, t. j. funkcie $F(t)$ platí tento vzorec (pozri [3], str. 212):

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \overline{F}(p) \,.\, e^{pt}\, dp = \begin{cases} \dfrac{F(t+0)+F(t-0)}{2}, & t > 0, \\ \dfrac{F(t+0)}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Integruje sa po priamke, rovnobežnej s imaginárnou osou, pričom je $\sigma \geqq \sigma_0$.

Teraz pristúpime ku podstatnej časti tejto práce.

Veta. *Nech sú splnené tieto podmienky:*

1. *Nech funkcie* $u(t)$, $v(t)$, $u[f(t)]$, $v[g(t)]$, $u[f(t)] \,.\, v[g(t)]$ *spĺňajú predpoklady* $P_1$, $P_2$, $P_3$.

2. *Nech funkcie* $f(t)$ *a* $g(t)$ *sú kladné a spojité v polouzavretom intervale* $\langle 0, \infty)$.

3. *Nech existujú čísla* $\gamma \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$, *a* $\tau \geqq 0$ *také, že Laplaceove integrály*

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} \,.\, e^{f(t).\sigma}\, dt, \qquad \int_0^\infty e^{-\delta t} \,.\, e^{g(t).\tau}\, dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L_t\{u(t)\}_z\, dz, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} L_t\{v(t)\}_s\, ds, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} L_t\{u[f(t)]\}_w\, dw$$

*absolútne konvergujú. V posledných troch integráloch sa integruje po priamkach, rovnobežných s imaginárnou osou.*

*Potom Laplaceova transformácia súčinu dvoch zložených funkcií sa vypočíta podľa vzorca:*

$$L_t\{u[f(t)] \,.\, v[g(t)]\}_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} J_1(w) \,.\, J_2(p-w)\, dw, \tag{5}$$

*kde* $\mathrm{Re}(p) \geqq \gamma + \delta$,

$$J_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{u}(z) \,.\, \overline{\varphi}(w, z)\, dz, \quad J_2(p-w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \overline{v}(s) \,.\, \overline{\psi}(p-w, s)\, ds,$$

$$\overline{\varphi}(w, z) = \int_0^\infty e^{-wt} \,.\, e^{f(t).z}\, dt, \qquad \overline{\psi}(p-w, s) = \int_0^\infty e^{-(p-w)t} \,.\, e^{g(t).s} \,.\, dt,$$



$$\overline{u}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, u(t)\, dt, \qquad \overline{v}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \,.\, v(t)\, dt,$$

$$\mathrm{Re}(z) \geqq \sigma,\ \mathrm{Re}(w) \geqq \gamma, \qquad \mathrm{Re}(s) \geqq \tau,\ \mathrm{Re}(p-w) \geqq \delta.$$

*Vo vzorci (5) a v integráloch pre $J_1(w)$ a $J_2(p-w)$ sa integruje po priamkach, rovnobežných s imaginárnou osou.*

Poznamenávame, že integrál vo vzorci (5) a integrály pre $J_1(w)$ a $J_2(p-w)$ sú obyčajné nevlastné integrály v dôsledku urobených predpokladov na začiatku tejto vety.

Dôkaz. Do $J_1(w)$ dosadíme za $\overline{\varphi}(w, z)$ a dostaneme:

$$J_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{u}(z) \left[ \int_0^\infty e^{-wt} \,.\, e^{f(t).z}\, dt \right] dz, \ \mathrm{Re}(w) \geqq \gamma.$$

Tento integrál spĺňuje podmienky pre lemmu 2 o zámene integračného poradia. Skutočne. Podmienka $Q_1$ žiada, aby funkcia $\overline{u}(z)\, e^{-wt} \,.\, e^{f(t).z}$ bola spojitá ako funkcia dvoch premenných pre všetky dvojice $(z, t)$, pre ktoré platí $t \in \langle 0, A \rangle$, $0 < A < \infty$ a $z$ je ľubovoľný bod na integračnej priamke. Keďže $\overline{u}(z)$ je regulárna v oblasti $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$, $\sigma_0 < \sigma$ a $f(t)$ je spojitá podľa predpokladu 2 v polouzavretom intervale $< 0, \infty)$, táto podmienka je zrejmá splnená.

Podmienka $Q_2$ žiada, aby integrál

$$\int_0^\infty e^{-wt} \,.\, e^{f(t).z} \,.\, \overline{u}(z)\, dt, \quad \mathrm{Re}(w) \geqq \gamma,$$

rovnomerne konvergoval vzhľadom na premennú $z$ na priamke $\mathrm{Re}(z) = \sigma$. Tento integrál je na nej podľa predpokladu 3 absolútne konvergentný. Odtiaľto vyplýva i jeho rovnomerná konvergencia vzhľadom na premennú $z$ na priamke $\mathrm{Re}(z) = \sigma$.

Podmienka $Q_3$ žiada, aby integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{u}(z) \,.\, e^{f(t).z} \,.\, e^{-wt}\, dz$$

rovnomerne konvergoval vzhľadom na premennú $t$ v každom konečnom intervale $\langle 0, A \rangle$, kde $0 < A < \infty$. Tento integrál, podľa predpokladu 3, absolútne konverguje pre všetky hodnoty $t$, ktoré ležia v každom konečnom intervale $\langle 0, A \rangle$, kde $0 < A < \infty$. Odtiaľto vyplýva i jeho rovnomerná konvergencia vzhľadom na premennú $t$ v každom konečnom intervale $\langle 0, A \rangle$, kde $0 < A < \infty$.

Podmienka $Q_4$ žiada, aby integrál

$$\int_0^{\infty} e^{-wt}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{f(t)z} \,.\, \overline{u}(z)\,dz\right] dt$$

rovnomerne konvergoval na uzavretej množine čísel $\omega$, ležiacich na priamke $\operatorname{Re}(z) = \sigma$. Tento integrál je podľa predpokladu 3 absolútne konvergentný pre všetky hodnoty $\omega$ z intervalu $\langle 0, \infty)$ a aj pre $\omega = \infty$. Odtiaľto vyplýva i jeho rovnomerná konvergencia na uzavretej množine čísel $\omega$, ležiacich na priamke $\operatorname{Re}(z) = \sigma$.

Použijúc výsledok lemmy 2, po zámene integračného poradia dostávame

$$J_1(w) = \int_0^{\infty} e^{-wt}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{f(t)z} \,.\, \overline{u}(z)\,dz\right] dt, \quad \operatorname{Re}(w) \geqq \gamma.$$

Zaveďme označenie $\tau^* = f(t)$. Po dosadení do predchádzajúceho integrálu dostaneme

$$J_1(w) = \int_0^{\infty} e^{-wt}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\tau^* z}\,\overline{u}(z)\,dz\right] dt, \quad \operatorname{Re}(w) \geqq \gamma.$$

Pri použití vlastnosti c), $f(t)$ je kladná podľa predpokladu 2, $J_1(w)$ bude mať tento tvar

$$J_1(w) = \int_0^{\infty} e^{-wt} \,.\, u(\tau^*)\,dt = L_t\{u(\tau^*)\}_w, \quad \operatorname{Re}(w) \geqq \gamma.$$

Nakoniec po dosadení $\tau^* = f(t)$ dostaneme

$$J_1(w) = L_t\{u[f(t)]\}, \quad \operatorname{Re}(w) \geqq \gamma.$$

Analogickou úpravou dostaneme

$$J_2(p - w) = \int_0^{\infty} e^{-(p-w)t} \,.\, v[g(t)]\,dt, \quad \operatorname{Re}(p - w) \geqq \delta.$$

Tieto výsledky dosadíme za $J_1(w)$ a $J_2(p - w)$ do pravej strany vzorca (5). Dostaneme

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} L_t\{u[f(t)]\}_w \cdot \left\{\int_0^{\infty} e^{-(p-w)t} \,.\, v[g(t)]\,dt\right\} dw, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$



Analogicky, ako pri $J_1(w)$ čitateľ si ľahko dokáže, že aj tento integrál splňuje podmienky pre lemmu 2 o zámene integračného poradia. Po zámene dostaneme

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \,.\, v[g(t)]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{wt} \,.\, L_t\{u[f(t)]\}_w\,dw\right] dt, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$

Pri použití vlastnosti c) z tohto dostávame

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \,.\, v[g(t)] \,.\, u[f(t)] \,.\, dt, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta,$$

čo bolo treba dokázať.

Poznámka 1. Položme v (5) $f(t) = t$, $g(t) = t$ a dostaneme vzorec pre Laplaceovu transformáciu súčinu dvoch jednoduchých funkcií:

$$L_t\{u(t) \,.\, v(t)\}_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \overline{u}(w) \,.\, \overline{v}(p - w)\,dw, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta. \tag{6}$$

Tento vzorec uverejnil Grinberg [4].

Poznámka 2. Vo vzorci

$$L_t\{u[f(t)] \,.\, v[g(t)]\}_p = \int_0^{\infty} e^{-pt} \,.\, u[f(t)] \,.\, v[g(t)] \,.\, dt, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta$$

položme $f(t) = t$. Dostaneme

$$L_t\{u(t) \,.\, v[g(t)]\}_p = \int_0^{\infty} e^{-pt} \,.\, u(t) \,.\, v[g(t)]\,dt, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$

Označme znakom $\tau^{**}$ funkciu $g(t)$. Po dosadení do predchádzajúceho výrazu dostaneme

$$L_t\{u(t) \,.\, v(\tau^{**})\}_p = \int_0^{\infty} e^{-pt} \,.\, u(t) \,.\, v(\tau^{**})\,dt, \quad \operatorname{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$

Vzhľadom na to, že $\tau^{**} > 0$, $g(t) > 0$, podľa predpokladu 2, môžeme s použitím vlastnosti c) písať

$$v(\tau^{**}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{\tau^{**}z} \,.\, \overline{v}(z)\,dz.$$

Po dosadení tohto výrazu do predchádzajúceho integrálu dostávame

$$L_t\{u(t) \,.\, v(\tau^{**})\}_p = \int_0^\infty e^{-pt} \,.\, u(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{\tau^{**}z} \,.\, \overline{v}(z)\, dz\right] dt, \quad \mathrm{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$

Analogicky, ako pri $J_1(x)$ si čitateľ ľahko dokáže, že aj tento integrál splňuje podmienky pra lemmu 2 o zámene integračného poradia. Po zámene dostávame

$$L_t\{u(t) \,.\, v(\tau^{**})\}_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \overline{v}(z) \left[\int_0^\infty e^{-pt} \,.\, e^{\tau^{**}z} \,.\, u(t)\, dt\right] dz, \ \mathrm{Re}(p) \geqq \gamma + \delta.$$

Po dosadení za $\tau^{**} = g(t)$ a

$$\int_0^\infty e^{-pt} \,.\, e^{g(t)z} \,.\, u(t)\, dt = L_t\{e^{g(t).z}\, u(t)\}_p,$$

dostávame

$$L_t\{u(t) \,.\, v[g(t)]\}_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \overline{v}(z) \,.\, L_t\{e^{g(t).z} \,.\, u(t)\}_p\, dz, \quad \mathrm{Re}(p) \geqq \gamma + \delta. \quad (7)$$

Tento vzorec uverejnil Ivanov [5].

## LITERATÚRA


[1] Диткин В. А., *Операционное исчисление*, Успехи математических наук, том II, вып. 6 (22), (1947), 72—158.

[2] Ditkin V. A. Kuznecov P. I., *Príručka operátorového počtu* (preklad z ruštiny), Praha 1954.

[3] Doetsch G., *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I, Basel 1950.

[4] Гринберг Г. А., *Связь между операционными выражениями двух произвольных фнкций и операционным представлением их произведения*, Д. А. Н. СССР, том XI, № 4, (1943).

[5] Иванов А. В., *Обобщение формулы операционного представления произведения двух функций*, Прикладная математика и механика, 13 (1949), 663—666.

[6] Фихтенгольц Г. М., *Курс диференциального и интегрального исчисления*, том I, II, Москва—Ленинград 1951.



Došlo 15. 3. 1960.



*Katedra matematiky*
*Slovenskej vysokej školy technickej*
*v Bratislave*




# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ


ЮЛИУС ЦАМБЕЛ


Выводы


В этой статье доводится теорема о преобразовании Лапласа произведения двух сложных функций. Из этой теоремы вытекают результаты Гринберга [4] и Иванова [5].


# DIE LAPLACESCHE TRANSFORMATION EINES PRODUKTES ZWEIER ZUSAMMENGESETZTEN FUNKTIONEN


JÚLIUS CAMBEL


Zusammenfassung


In dieser Arbeit wird ein Satz über die Laplacesche Transformation eines Produktes zweier zusammengesetzten Funktionen bewiesen. Aus diesem Satz folgen die Resultaten von Grinberg [4] und Ivanov [5] als spezieller Fall.