O JISTÉ TRANSFORMACI JEDNODUCHÝCH ROVINNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

VÁCLAV POLÁK, Brno

Prof. K. Koutský položil otázku, dají-li se každé dva rovinné jednoduché isogonální mnohoúhelníky převést na sebe (až na shodnost) konečným počtem paralelních posunutí stran tak, že během těchto transformací je zachována jednoduchost a isogonalita. Práce odpovídá kladně na tuto otázku.

Jednoduchý rovinný mnohoúhelník[1]) $\mathsf{P} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ dělí rovinu na dvě oblasti — ohraničenou a neohraničenou. Prvou nazýváme vnitřkem mnohoúhelníka P a značíme P°. V celé práci uvažujeme pouze o mnohoúhelnících s vlastními vrcholy (dvě sousední strany leží v různých přímkách). Přímky, určené body A_i, A_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, n$, přičemž klademe $A_{n+1} \equiv A_1)$ značme p_i, uzavřené úsečky $\overline{A_iA_{i+1}}$ pak a_i. Vnitřní úhel (měříme jej vždy v kladných hodnotách) mnohoúhelníka P při vrcholu A_i značme α_i. Říkáme, že dva jednoduché n-úhelníky P, P', jsou *isogonální*, jestliže pro jejich vnitřní úhly vesměs platí $\alpha_i = \alpha_i'$.

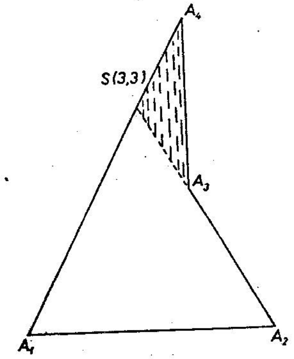
Definice 1. Zvolme si libovolnou stranu mnohoúhelníka P (nechť je to strana a_i). Proveďme paralelní posunutí přímky p_i ve směru na ni kolmém o délku $d > 0$. Výchozí polohu přímky značme $p_i^{(0)}$, výslednou její polohu $p_i^{(d)}$ a každé poloze přímky během posunování přiřaďme číslo, značící velikost posunutí. Toto posunutí volme tak malé, aby pro každé $t \in [0, d]$ byl určen jednoduchý mnohoúhelník $(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, p_{i-1} \cap p_i^{(t)}, p_i^{(t)} \cap p_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_n)$. Přechod od mnohoúhelníka P k mnohoúhelníku právě konstruovanému nazveme *elementární transformací* mnohoúhelníka P a značíme ji $\tau^{(i)}$. Označení toto znamená též množinu všech mnohoúhelníků, jež jsou přiřazena jednotlivým číslům intervalu $[0, d]$. Výsledný mnohoúhelník (je přiřazen číslu $t = d$) značme pak $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$. Stejným způsobem značíme všechny složky mnohoúhelníka $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$: Jeho vrcholy jsou $\tau^{(i)}(A_1), \tau^{(i)}(A_2), \dots, \tau^{(i)}(A_n)$, jeho strany jsou $\tau^{(i)}(a_1), \tau^{(i)}(a_2), \dots, \tau^{(i)}(a_n)$.

Transformace, která nepohybuje žádnou stranou, se nazývá identická. Považujeme ji též za elementární transformaci. Elementární transformaci, jež není identická, považujeme za netriviální.

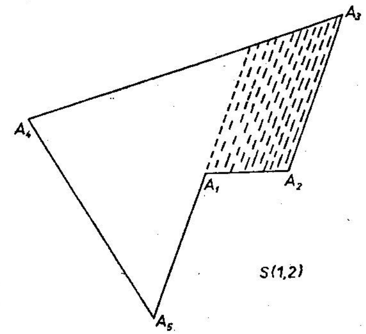
[1]) Definici viz K. Čulík, O existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými úhly, Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 415—426.

Definice 2. Nechť $t \in [0, d)$ je libovolné číslo. Pak je určena jednoznačně
jistá elementární transformace $\pi^{(i)}$ mnohoúhelníka P: Je representována
množinou všech mnohoúhelníků transformace $\tau^{(i)}$, jimž jsou přiřazena čísla
z intervalu $[0, t]$. Tedy platí $\pi^{(i)} \subset \tau^{(i)}$. Transformaci $\pi^{(i)}$ nazýváme *dílčí*
transformací elementární transformace $\tau^{(i)}$ a píšeme $\pi^{(i)} < \tau^{(i)}$.
Zřejmě pro množinu $\tau^{(i)}$ platí $\tau^{(i)} = \{\pi^{(i)}(\mathsf{P}) : \pi^{(i)} \leqq \tau^{(i)}\}$.
Definice 3. Nechť $\tau^{(i)}$ je elementární transformace mnohoúhelníka P, $\tau^{(j)}$ ele-
mentární transformace mnohoúhelníka $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$. Pak *součin* τ těchto elementár-
ních transformací značíme $\tau^{(i)} . \tau^{(j)}$. Platí $\tau(\mathsf{P}) = (\tau^{(i)} . \tau^{(j)})(\mathsf{P}) = \tau^{(j)}(\tau^{(i)}(\mathsf{P}))$.
Indukcí lze definovat součin konečného počtu elementárních transformací.
Definice 4. Součin konečně mnoha elementárních transformací nazývá se
dovolená transformace mnohoúhelníka P.
Elementární transformace je dovolená transformace. Podobným způsobem
jako součin konečně mnoha elementárních transformací lze definovat součin
konečně mnoha dovolených transformací. Tento součin je dovolená trans-
formace.
Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky a nechť dovo-
lenou transformací lze převést P v Q. Pak lze též dovolenou transformací
převést mnohoúhelník Q v P.
Nechť τ je dovolená transformace mnohoúhelníka P. Pak P, $\tau(\mathsf{P})$ jsou
isogonální a odpovídající strany jsou rovnoběžné.
Nechť τ je libovolná dovolená transformace mnohoúhelníka P. Pak existuje
konečná posloupnost dovolených transformací $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ tak, že:
(i) $\tau = \tau_1 . \tau_2 . \ldots . \tau_k$.
(ii) Pro každé $j \in (1, 2, \ldots, k)$ je τ_j netriviální elementární transformace
i_j-té strany mnohoúhelníka $(\tau_1 \ldots \tau_{j-1})(\mathsf{P})$.
Uvedená posloupnost elementárních transformací je určena jednoznačně.
Definice 5. Nechť je dána dovolená transformace τ. Potom rozklad (i)
s vlastností (ii) se nazývá *rozklad* dovolené transformace τ na své *dílčí*
elementární transformace.
Nechť P, Q jsou ~~dva~~ jednoduché isogonální mnohoúhelníky a τ, π dvě
dovolené transformace mnohoúhelníka P takové, že $\tau(\mathsf{P}) = \mathsf{Q} = \pi(\mathsf{P})$.
Zřejmě nemusí být $\tau = \pi$, neboť k mnohoúhelníku Q lze dospět z mnoho-
úhelníka P mnoha různými způsoby.
Definice 6. Nechť (i) je rozklad dovolené transformace na své dílčí elemen-
tární transformace, $1 \leqq l \leqq k$ libovolné přirozené číslo a π_l libovolná elemen-
tární transformace, jež je dílčí transformací τ_l nebo je s ní totožná ($\pi_l \leqq \tau_l$).
Pak dovolená transformace $\pi = \tau_1 . \ldots . \tau_{l-1} . \pi_l$ se nazývá *dílčí transformací*
dovolené transformace τ a píšeme $\pi \leqq \tau$.
Jestliže τ je dovolená transformace mnohoúhelníka P, pak $\tau = \{\pi(\mathsf{P}) :$
$: \pi \leqq \tau\}$.
Definice 7. Nechť $\Pi^{(i)}$ je transformace mnohoúhelníka P, která vznikne

paralelním posunutím jeho i-té strany tak, že každé dílčí posunutí je elemen-
tární transformací, kdežto $\Pi^{(i)}$ již elementární transformací není. Tuto trans-
formaci nazýváme *mezní transformací* i-té strany mnohoúhelníka P, přičemž
uvedeme, je-li posunutí provedeno dovnitř či vně mnohoúhelníka P.



Obr. 1.



Obr. 2.

Ke každé straně mnohoúhelníka P existuje právě jediná mezní transformace dovnitř.

Celá práce obsahuje důkaz následujícího tvrzení:

Věta. *Nechť* P, Q *jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky. Pak existuje dovolená transformace* τ *mnohoúhelníka* P *tak, že* $\tau(\mathsf{P})$ *je shodný s* Q.

Důkaz této věty provedeme na základě několika lemmat. Zaveďme nejdříve jeden speciální pojem.

Definice 8. Řekneme, že jednoduchý n-úhelník P je *typu* $S(i, j)$, jestliže existuje mezní transformace $\Pi^{(j)}$ mnohoúhelníka P tak, že i-tá strana vymizí a $\Pi^{(j)}(\mathsf{P})$ je jednoduchý $\overline{n-2}$-, resp. $\overline{n-1}$-úhelník podle toho, zda $p_{i-1} \parallel p_{i+1}$ nebo $p_{i-1} \nparallel p_{i+1}$ (obr. 1, 2).

Jestliže P je typu $S(i, j)$, pak nastane jeden z následujících tří případů: $j = i - 1$, $j = i$, $j = i + 1$.

Lemma 1. *Nechť* $n \geqq 5$ *je přirozené číslo a* $\mathsf{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ *jednoduchý* n*-úhelník u něhož* $\alpha_1 < 180°$. *Pak existuje dovolená transformace* τ *a čísla* $i, j \in (2, 3, \ldots, n-1)$ *tak, že*

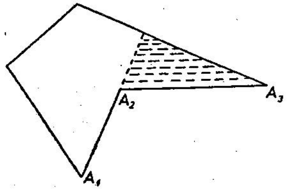
(1) *mnohoúhelník* $\tau(\mathsf{P})$ *je typu* $S(i, j)$ *(jeho mezní transformaci, jež anuluje i tou stranu, označme* $\Pi^{(j)}$*),*

(2) *pro každou dovolenou transformaci* π *mnohoúhelníka* P, $\pi < \tau . \Pi^{(j)}$, *je* $\pi(\mathsf{P})^\circ \subset \mathsf{P}^\circ$ *a* $\pi(A_1) \equiv A_1$.

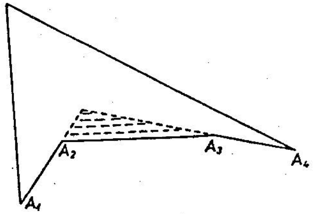
Z podmínky $\pi(A_1) \equiv A_1$ plyne, že během transformace τ neposunujeme ani první ani poslední stranou.

Důkaz lemmatu provedeme úplnou indukcí podle n. Nechť $n = 5$, $\alpha_2 > 180°$ a $\Pi^{(2)}$ mezní transformace dovnitř mnohoúhelníka P.

Nechť druhá strana vymizí. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ je jednoduchý čtyřúhelník (obr. 3,4), jsme hotovi (τ je transformace identická, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ není jednoduchý čtyřúhelník, bude zřejmě $\alpha_3 < 180°$ a čára $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$

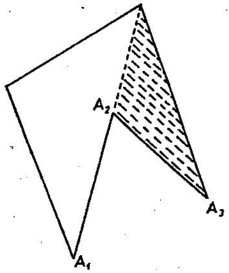


Obr. 3.

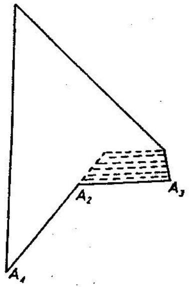


Obr. 4.

bude trojúhelníkem, tj. vymizí též třetí strana (obr. 5). Pak existuje zřejmě malá elementární transformace $\tau^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P tak, že po provedení mezní transformace dovnitř druhé strany mnohoúhelníka $\tau^{(3)}(\mathsf{P})$ nastane případ vyznačený na obraze 3, který již je řešen.



Obr. 5.



Obr. 6.

Nechť druhá strana nevymizí.

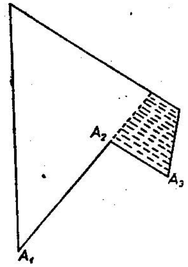
Nechť vymizí třetí strana. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ je jednoduchý čtyřúhelník, jsme hotovi (obr. 6). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ není jednoduchý čtyřúhelník, nastane zřejmě případ vyznačený na obr. 7. Pak zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ tak, že mnohoúhelník $\tau^{(2)}(\mathsf{P})$ je typu $S(2, 3)$ s vlastnostmi uvedenými v lemmatu.

Nechť třetí strana nevymizí. Pak nastane případ vyznačený na obr. 8, který opět snadno rozřešíme.

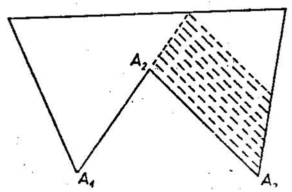
Vyšetřujme nyní případ $\alpha_2 < 180°$. Bez újmy obecnosti lze předpokládat též $\alpha_5 < 180°$. Mohou nastat pouze případy vyznačené na obrazech 9, 10, 11, které snadno rozřešíme. Platí tedy naše lemma pro $n = 5$.

Nechť $n > 5$ je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro všechna přirozená k, $5 \leqq k < n$.

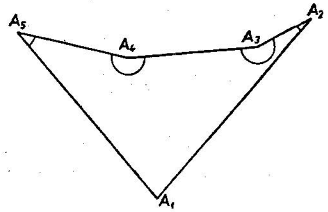
Sestrojme nejdříve dovolenou transformaci $\tau_1 = \tau^{(2)} . \tau^{(3)} . \ldots . \tau^{(n-1)}$ složenou z netriviálních elementárních transformací dovnitř druhé, třetí, ... a $n - 1$-té strany. Mnohoúhelník $\tau_1(\mathsf{P})$ označme P'. Zřejmě $A'_3, A'_4, \ldots,$



Obr. 7.



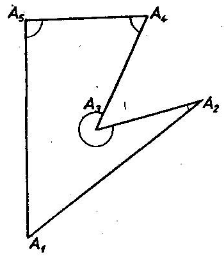
Obr. 8.



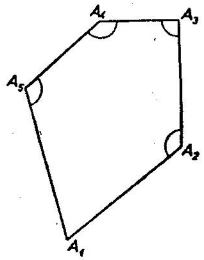
Obr. 9.

$A'_{n-1} \in \mathsf{P}°$ a rovněž tak vnitřky úseček $a'_2, a'_3, \ldots, a'_{n-1}$ leží uvnitř mnohoúhelníka P.

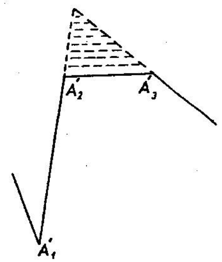
Studujme nyní mnohoúhelník P'. Rozlišme dva případy: $\alpha_2 > 180°$, $\alpha_2 < 180°$ (zřejmě vesměs $\alpha'_i = \alpha_i$).



Obr. 10.



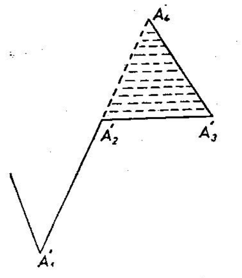
Obr. 11.



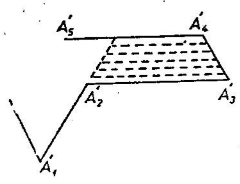
Obr. 12.

I. Nechť $\alpha_2 > 180°$. Proveďme s mnohoúhelníkem P' mezní transformaci $\Pi^{(2)}$ dovnitř.

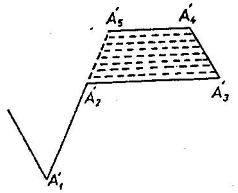
II. Nechť vymizí druhá strana. Studujme případ $\alpha_3 > 180°$ (obr. 12). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ je jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý mnohoúhelník, leží bod $\Pi^{(2)}(A'_2) \equiv \Pi^{(2)}(A'_3)$ na některé z úseček $\overline{A'_5A'_6}$, $\overline{A'_6A'_7}$, ..., $\overline{A'_{n-1}A'_n}$. Zřejmě existuje malá elementární transformace $\tau^{(3)}$ ven mnohoúhelníka P' tak, aby pro všechna $\pi \leqq \tau^{(3)}$ bylo $\pi(a'_3) \subset \mathsf{P}°$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(3)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, anuluje se tato a obdržíme jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník. Máme předcházející případ a jsme hotovi ($\tau = \tau_1 . \tau^{(3)}$, $i = j = 2$). Zbývá studovat případ $\alpha_3 < 180°$. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ je jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník, anuluje se zřejmě třetí strana, tj. platí $\Pi^{(2)}(A_2') \equiv \Pi^{(2)}(A_3') \equiv \Pi^{(2)}(A_4')$ (obr. 13). Pak zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' tak, aby pro všechna $\pi^{(4)} \leqq \tau^{(4)}$ bylo $\pi(a_4') \subset P^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(4)}(P')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, anuluje se tato a obdržíme



Obr. 13.



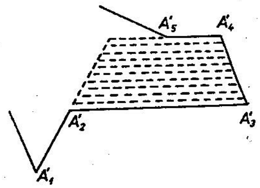
Obr. 14.



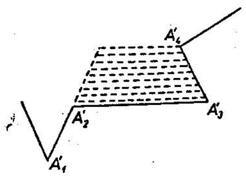
Obr. 15.

jednoduchý $n - 1$-úhelník. Máme předcházející případ a jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(4)}$, $i = j = 2$).

12. Nechť druhá strana nevymizí. Předpokládejme, že vymizí třetí strana. Jestliže $\Pi^{(2)}(P')$ je jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník resp. $\overline{n - 2}$-úhelník (v případě



Obr. 16.

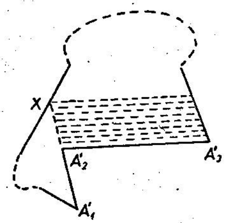


Obr. 17.

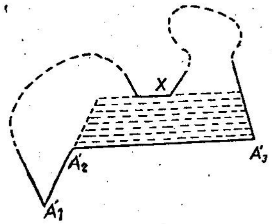
$a_2' \| a_4'$), jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 3$, $j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(P')$ není jednoduchý mnohoúhelník, může nastat několik případů: α) $\Pi^{(2)}(a_2') \cap \Pi^{(2)}(a_4') = \Pi^{(2)}(a_2') \neq \Pi^{(2)}(a_4')$ (obr. 14). Pak zřejmě existuje transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(P')$ anuluje se strana druhá a obdržíme jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník (v případě $a_1 \nparallel a_3$), resp. jednoduchý $\overline{n - 2}$-úhelník (v případě $a_1 \| a_3$). Jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(2)}$, $i = 2$, $j = 3$). β) $\Pi^{(2)}(a_2') \cap \Pi^{(2)}(a_4') = \Pi^{(2)}(a_2') = \Pi^{(2)}(a_4')$ (obr. 15). Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(5)}$ mnohoúhelníka P' tak, že pro každé $\pi \leqq \tau^{(5)}$ je $\pi(a_5') \subset P^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(5)}(P')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, nastane případ α. γ) $\Pi^{(2)}(a_2') \cap \Pi^{(2)}(a_4') = \Pi^{(2)}(a_4') \neq \Pi^{(2)}(a_2')$ (obr. 16). Pak existuje elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(P')$ anuluje se strana čtvrtá a obdržíme jednoduchý $\overline{n - 1}$-úhelník (v případě $a_3 \nparallel a_5$), resp. jednoduchý

$\overline{n - 2}$-úhelník (v případě $a_3 \| a_5$). Položíme $\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(2)}$, $i = 4$, $j = 3$ a jsme hotovi. δ) $\Pi^{(2)}(a_2') \cap \Pi^{(2)}(a_4') = \{\Pi^{(2)}(A_3')\} = \{\Pi^{(2)}(A_4')\}$, (obr. 17). Poněvadž $\Pi^{(2)}(P')$ není jednoduchý mnohoúhelník, existuje zřejmě na úsečce $\Pi^{(2)}(a_2')$ alespoň jeden bod, jenž patří do některé z úseček $\Pi^{(2)}(a_5')$, $\Pi^{(2)}(a_6')$, …, $\Pi^{(2)}(a_{n-1}')$. Pak existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' tak, že pro všechna $\pi^{(4)} \leqq \tau^{(4)}$ je $\pi^{(4)}(a_4') \subset P^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(4)}(P')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, obdržíme jednoduchý mnohoúhelník — jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(4)}$, $i = 3$, $j = 2$).

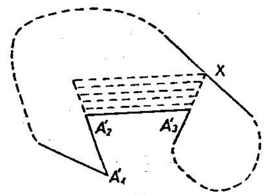
Zbývá vyšetřit případ, kdy třetí strana nevymizí. Poněvadž při transformaci $\Pi^{(2)}$ nevymizí v tomto případě ani druhá a ani první strana, není mnohoúhelník $\Pi^{(2)}(P')$ jednoduchý. Na úsečce $\Pi^{(2)}(a_2')$ existuje tedy aspoň jeden bod, jenž leží na některé z úseček $\Pi^{(2)}(a_5')$, …, $\Pi^{(2)}(a_{n-1}')$. Nechť X je ten z těchto bodů, jenž je bodu $\Pi^{(2)}(A_3')$ nejblíže. Zřejmě bod X nemůže ležet současně uvnitř dvou různých stran mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(P')$. Bude tedy bod X buď a) současně vrcholem a vnitřním bodem právě jedné strany mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(P')$, nebo b) bude současně totožný právě se dvěma různě označenými vrcholy mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(P')$, avšak nebude vnitřním bodem žádné z jeho stran.



Obr. 18.



Obr. 19.



Obr. 20.

a) Studujme nejdříve případ první. Všechny možnosti jsou vyznačeny na obrazech 18 až 20.

Nechť $X \equiv \Pi^{(2)}(A_2')$ a současně X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_t')$. Zřejmě $4 \leqq t \leqq n - 1$ (obr. 18) a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_3'), \Pi^{(2)}(A_4'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_t'))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej $R = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 \equiv X$, $B_2 \equiv \Pi^{(2)}(A_3')$.

Nechť $X \equiv \Pi^{(2)}(A_t')$, X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_2')$ (obr. 19). Zřejmě $5 \leqq t \leqq n - 1$ a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_3'), \Pi^{(2)}(A_4'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_{t-1}'))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej $R = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 \equiv X$, $B_2 \equiv \Pi^{(2)}(A_3')$.

Nechť $X \equiv \Pi^{(2)}(A_3')$, X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_t')$ (obr. 20). Zřejmě $5 \leqq t \leqq n - 1$ a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_4'), \Pi^{(2)}(A_5'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_{t-1}'))$ je jednoduchým mnohoúhelníkem. Označme jej $R = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 \equiv X$, $B_2 \equiv \Pi^{(2)}(A_4')$.

Ve všech třech případech je $3 \leqq m < n$ a vnitřní úhel mnohoúhelníka R při vrcholu B_1 je $< 180°$.

Jestliže je $m \geqq 5$, jsou pro mnohoúhelník R splněny indukční předpoklady. Existuje tedy dovolená transformace ρ mnohoúhelníka R a čísla p, $q \in$ $\in (2, \ldots, m-1)$ tak, že:

$(\bar{1})$ mnohoúhelník $\rho(\mathrm{R})$ je typu $S(p, q)$ (jeho mezní transformaci, jež anuluje p-tou stranu, označme $\Gamma^{(q)}$),

$(\bar{2})$ pro každou dovolenou transformaci π mnohoúhelníka R, $\pi < \rho \,.\, \Gamma^{(q)}$, je $\pi(\mathrm{R})^\circ \subset \mathrm{R}^\circ$ a $\pi(B_1) \equiv B_1$.

Nechť nastane případ vyznačený na obraze 18. Nechť $\rho = \rho^{(i_1)} \,.\, \rho^{(i_2)} \,.\, \ldots \,.\, \rho^{(i_n)}$ je rozklad dovolené transformace ρ na své dílčí elementární transformace. Označme d_j velikost posunutí i_j-té strany v elementární transformaci $\rho^{(i_j)}$ (velikost posunutí měříme ve směru kolmém na posunutí v hodnotách kladných). Podle předpokladu je $i_j \neq 1$, m pro každé j. Existuje tedy netriviální elementární transformace $\lambda^{(1)}$ ven mnohoúhelníka R tak, že existuje dovolená transformace $\bar{\rho} = \bar{\rho}^{(i_1)} \,.\, \bar{\rho}^{(i_2)} \ldots \bar{\rho}^{(i_k)}$ mnohoúhelníka $\lambda^{(1)}(\mathrm{R})$ tak, že pro každé j posunuje elementární transformace $\bar{\rho}^{(i_j)}$ i_j-tou stranu o délku d_j v témž směru, jak to činí transformace $\rho^{(i_j)}$. (Stačí zvolit transformaci $\lambda^{(1)}$ vhodně malou.) Z $(\bar{2})$ plyne, že pro každé π, $\pi \leqq \bar{\rho}$, je $(\lambda^{(1)} \,.\, \pi)(\mathrm{R})^\circ \subset \lambda^{(1)}(\mathrm{R})^\circ$. Zřejmě transformaci $\lambda^{(1)}$ lze zvolit tak malou, aby:

$(\bar{\bar{1}})$ mnohoúhelník $(\lambda^{(1)} \,.\, \bar{\rho})$ (R) byl typu $S(p, q)$ (mezní transformaci, jež anuluje jeho p-tou stranu, označme $\bar{\Gamma}^{(q)}$), a

$(\bar{\bar{2}})$ pro každé π, $\pi < \bar{\rho} \,.\, \bar{\Gamma}^{(q)}$, je $(\lambda^{(1)} \,.\, \pi)(\mathrm{R})^\circ \subset \lambda^{(1)}(\mathrm{R})^\circ$.

Vraťme se nyní k obrazu 18. Jestliže $\lambda^{(1)}$ representuje dostatečně malé posunutí, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)}$, $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$, mnohoúhelníka P′ tak, že $\tau^{(2)}(a_2') \subset \lambda^{(1)}(\overline{B_1 B_2})$. Odtud je :

(3) $\tau^{(2)}(A_3') \equiv \lambda^{(1)}(B_2)$, $\tau^{(2)}(A_4') \equiv \lambda^{(1)}(B_3)$, $\ldots$, $\tau^{(2)}(A_t') \equiv \lambda^{(1)}(B_{t-1})$.

Posunutí $\lambda^{(1)}$ lze volit tak malé, že bod $\lambda^{(1)}(B_1)$ leží uvnitř úsečky $\tau^{(2)}(a_i')$ a vnitřek úsečky $\overline{\lambda^{(1)}(B_1)\, \tau^{(2)}(A_2')}$ leží uvnitř mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$.

Odtud platí

(4) $$\lambda^{(1)}(\mathrm{R})^\circ \subset \tau^{(2)}(\mathrm{P}')^\circ.$$

Položme nyní $i = p + 1$, $j = q + 1$. Z vlastností $(\bar{\bar{1}})$, $(\bar{\bar{2}})$, (3) a (4) plyne existence dovolené transformace ρ_1 mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$ tak, že mnohoúhelník $(\tau^{(2)} \,.\, \rho_1)$ (P′) je typu $S(i, j)$ (i, j jsou čísla stanovená nahoře; mezní transformaci tohoto mnohoúhelníka, která anuluje jeho i-tou stranu, označme $\Pi^{(j)}$), a pro každou dovolenou transformaci π mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$, $\pi < \rho_1 \,.\, \Pi^{(j)}$, je $(\pi \,.\, \tau^{(2)})$ (P′)° $\subset \tau^{(2)}(\mathrm{P}')^\circ$. (Transformace $\bar{\rho}$ a $\bar{\Gamma}^{(q)}$, popsané v mnohoúhelníku $\lambda^{(1)}(\mathrm{R})$, lze provést též v mnohoúhelníku $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$. Tyto transformace jsme označili ρ_1, $\Pi^{(j)}$.)

Položíme-li nyní $\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(2)} \,.\, \rho_1$, obdržíme hledaný výsledek.

Analogickým postupem lze dospět k výsledku v případech vyznačených na obrazech 19 a 20.

Tím jsme úplně vyřešili případy, kdy $m \geqq 5$. Jestliže $m = 3$ nebo 4, snadno opět dospějeme k žádanému výsledku.

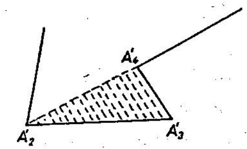
b) Zbývá vyřešit případ, kdy bod X je totožný se dvěma různě označenými vrcholy mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(\mathrm{P}')$. Nechť $X \equiv \Pi^{(2)}(A_2') \equiv \Pi^{(2)}(A_t')$, $t \neq 2$. Pak $5 \leqq t \leqq n - 1$.

Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(k)}$ mnohoúhelníka P′ tak, že $k \in \{t-1, t\}$, pro všechna $\pi^{(k)} \leqq \tau^{(k)}$ je $\pi^{(k)}(a_k') \subset \mathrm{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(k)}(\mathrm{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, obdržíme mnohoúhelník, jenž není jednoduchý a nastane případ a), který již je řešen.

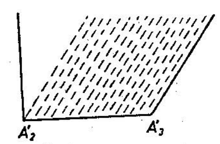
Nechť tedy $X \equiv \Pi^{(2)}(A_3') \equiv \Pi^{(2)}(A_t')$, $t \neq 3$. Pak $6 \leqq t \leqq n - 1$. Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(k)}$ mnohoúhelníka P′ tak, že $k \in \{t-1, t\}$, pro všechna $\pi^{(k)} \leqq \tau^{(k)}$ je $\pi^{(k)}(a_k') \subset \mathrm{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(k)}(\mathrm{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, nastane případ a), který již je řešen.

Tím jsme prostudovali všechny případy, kdy $\alpha_2 > 180°$.

2. Nechť $\alpha_2 < 180°$. Jestliže $\alpha_3 > 180°$, postupujeme podobně jako v případě 1. (Sestrojíme mezní transformaci $\Pi^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P′ atd.) Nechť tedy $\alpha_3 < 180°$. Proveďme mezní transformaci $\Pi^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P′. Jestliže třetí strana vymizí a obdržíme jednoduchý $\overline{n-1}$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 3$). Jestliže vymizí třetí strana a předchozí případ nenastane, zřejmě je $\Pi^{(3)}(\mathrm{P}')$ jednoduchý $\overline{n-2}$-úhelník (obr. 21), tj. $\Pi^{(3)}(A_4') \equiv \Pi^{(3)}(A_3') \equiv \Pi^{(3)}(A_2')$. Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(2)}$ (vhodně malá) dovnitř mnohoúhelníka P′ tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$ vymizí třetí strana a obdržíme jednoduchý $\overline{n-1}$-úhelník. Jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(2)}$, $i = j = 3$). Nechť tedy třetí strana nevymizí.



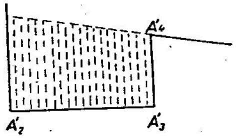
Obr. 21.



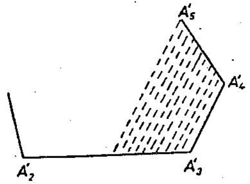
Obr. 22.

21. Nechť vymizí druhá strana. Studujme nejdříve případ $a_1' \nparallel a_3'$ (obr. 22). Jestliže obdržíme jednoduchý $\overline{n-1}$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 2$, $j = 3$). Jestliže $\Pi^{(3)}(\mathrm{P}')$ není jednoduchý $\overline{n-1}$-úhelník (např. vymizí ještě čtvrtá strana, či je porušena jednoduchost), existuje zřejmě (vhodně malá) elementární transformace $\tau^{(2)}$ ven mnohoúhelníka P′ tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathrm{P}')$ dostaneme předchozí případ ($\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(2)}$, $i = 2$, $j = 3$). Předpokládejme nyní, že $a_1' \parallel a_3'$. Poněvadž vymizí druhá strana a α_1, α_2, $\alpha_3 < 180°$, je $\alpha_4 > 180°$ a $\Pi^{(3)}(a_3') \subset \Pi^{(3)}(a_1')$.

Jestliže $\Pi^{(3)}(A_4') \neq \Pi^{(3)}(A_1')$ (obr. 23), dospějeme snadno k cíli (pomocí vhodné elementární transformace $\pi^{(3)} < \Pi^{(3)}$ dospějeme k mnohoúhelníku, jenž má požadované vlastnosti pro $i = 3$, $j = 2$). Jestliže $\Pi^{(3)}(A_4') \equiv \Pi^{(3)}(A_1')$, lze



Obr. 23.



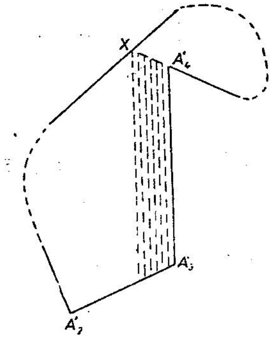
Obr. 24.

vhodně malou elementární transformací $\tau^{(4)}$ ven mnohoúhelníka P' docílit, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(4)}(\mathsf{P}')$ dostaneme předchozí případ.

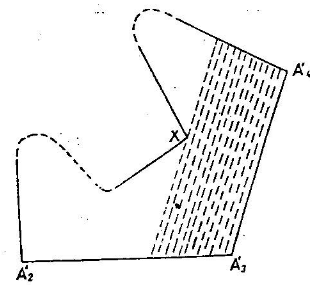
22. Nechť též druhá strana nevymizí. Uvažujme nejdříve o případu, kdy vymizí čtvrtá strana (obr. 24). Jestliže obdržíme jednoduchý $\overline{n-1}$-úhelník (v případě $a_3' \nparallel a_5'$), resp. jednoduchý $\overline{n-2}$-úhelník (v případě $a_3' \parallel a_5'$), jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 4$, $j = 3$). Jestliže vymizí čtvrtá strana a přesto nenastanou uvedené dva případy, postupujeme takto: Jestliže $\Pi^{(3)}(A_6')$ není vnitřním bodem úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$, lze vhodně malou elementární transformací $\tau^{(5)}$ mnohoúhelníka P' docílit toho, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(5)}(\mathsf{P}')$ vymizí čtvrtá strana a nastane předchozí případ. Jestliže $\Pi^{(3)}(A_6')$ leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$ tj. $a_3' \parallel a_5'$, $\alpha_5 < 180°$, máme podobnou situaci jako na obraze 16, která se snadno řeší. Tím je případ, kdy vymizí čtvrtá strana, plně řešen. Nechť tedy ani čtvrtá strana nevymizí. Pak $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý a na úsečce $\Pi^{(3)}(a_3')$ existují body, jež patří do jedné z úseček $\Pi^{(3)}(a_5'), \ldots, \Pi^{(3)}(a_n')$, $\Pi^{(3)}(a_1')$. Nechť X je ten z uvedených bodů, jenž je bodu $\Pi^{(3)}(A_4')$ nejblíže.

Rozlišme dva případy podle toho, zda a) bod $X \equiv \Pi^{(3)}(A_4')$ nebo b) X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$ ($X \equiv \Pi^{(3)}(A_3')$ nemůže nastat, neboť $\alpha_3 < 180°$). Studujme nejdříve případ a. Zřejmě bude $\alpha_4 > 180°$. Jestliže X leží uvnitř některé ze stran mnohoúhelníka $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$, např. uvnitř $\Pi^{(3)}(a_t')$ (obr. 25), pak zřejmě $t \in (6, 7, \ldots, n, 1)$. Pro $t = 1$ snadno dospějeme elementární transformací $\tau^{(3)} < \Pi^{(3)}$ k mnohoúhelníku se žádanými vlastnostmi pro $i = 3$, $j = 2$. Pro $t \neq 1$ je zřejmě čára $(X \equiv \Pi^{(3)}(A_4'), \Pi^{(3)}(A_5'), \ldots, \Pi^{(3)}(A_t'))$ jednoduchým mnohoúhelníkem. Označme jej R. Podobnými úvahami, které jsme prováděli s mnohoúhelníkem R v případě 12, dospějeme též v našem případě k výsledku. Tím máme vyřešenu situaci, kdy bod X leží uvnitř některé ze stran mnohoúhelníka $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$. Nechť tento případ nenastane. Pak $X \equiv \Pi^{(3)}(A_t')$, $t \in (7, 8, \ldots, n, 1)$. Jestliže $t = 1$, pak vhodně malou předchozí elementární transformací $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' lze docílit toho, že po provedení mezní

transformace dovnitř třetí strany bod X leží uvnitř první strany. Tento případ máme již rozřešen. Jestliže $t = n$, lze bez újmy obecnosti předpokládat $\alpha_n < 180°$. (Jestliže $\alpha_n > 180°$, přečíslujeme v opačné orientaci strany. Obdržíme tak případ 1, který již je řešen.) Pak ale zřejmě (jako v případě $t = 1$) předchozí vhodně malou elementární transformací $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' lze



Obr. 25.



Obr. 26.

docílit toho, že po provedení mezní transformace dovnitř třetí strany bod X leží uvnitř $\overline{n-1}$-té strany, což bylo již řešeno. Jestliže $1 \neq t \neq n$, lze vhodnou předchozí elementární transformací některé ze stran a_t', a_{t-1}' docílit toho, že po provedení mezní transformace bude bod X ležet uvnitř některé z obou stran — tento případ byl již řešen. Prostudujme nyní případ b. Nechť X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$ (obr. 26). Pak zřejmě existuje $t \in (6, 7, \ldots, n-1)$ tak, že $X \equiv \Pi^{(3)}(A_t')$. (Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $\alpha_n < 180°$. Poněvadž $\alpha_t > 180°$, je $t \neq n$.) Zřejmě čára $(X, \Pi^{(3)}(A_4'), \Pi^{(3)}(A_5'), \ldots, \Pi^{(3)}(A_{t-1}'))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej R. Podobnými úvahami, které jsme prováděli s mnohoúhelníkem R v případě 12, dospějeme k žádanému výsledku.

Důkaz lemmatu je ukončen.

Lemma 2. *Nechť* $\mathsf{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ *je jednoduchý n-úhelník a* τ *libovolná jeho dovolená transformace. Pak existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že pro každé* $\pi \leqq \tau$ *neleží v uzavřeném kruhovém ε-okolí bodu* $\pi(A_1)$, *kromě částí vnitřků úseček* $\pi(\overline{A_1A_n})$, $\pi(\overline{A_1A_2})$ *a kromě bodu* $\pi(A_1)$, *žádný další bod mnohoúhelníka* $\pi(\mathsf{P})$.

Lemma uvádíme bez důkazu, neboť je zřejmé.

Poznámka. Podobné lemma platí, vezmeme-li místo vrcholu mnohoúhelníka P půlící bod libovolné jeho strany.

Lemma 3. *Nechť* P, Q *jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky typu* $S(i, j)$. *Nechť anulováním jejich i-tých stran obdržíme mnohoúhelníky, které lze na sebe převést dovolenou transformací. Potom též* P *a* Q *lze na sebe převést dovolenou transformací.*

Důkaz. Nechť $\overline{\mathsf{P}}, \overline{\mathsf{Q}}$ jsou jednoduché mnohoúhelníky, jež vzniknou z P, Q

anulováním jejich i-tých stran, a nechť $\overline{\tau}$ je dovolená transformace převádějící $\overline{\mathsf{P}}$ v $\overline{\mathsf{Q}}$. Strany mnohoúhelníka P značme $a_1, a_2, \ldots$, vrcholy pak $A_1, A_2, \ldots$.

1. Studujme nejdříve případ $i = j$. Potom strany a_{i-1}, a_{i+1} nejsou rovnoběžné. Očíslování stran v $\overline{\mathsf{P}}$ ponechme jako v P. Nemá tedy $\overline{\mathsf{P}}$ i-tou stranu. Dva splývající vrcholy v $\overline{\mathsf{P}}$, i-tý a $\overline{i+1}$-tý, označme X. Zřejmě bod X je průsečík přímek proložených úsečkami a_{i-1}, a_{i+1}. Nechť $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 . \overline{\tau}_2 \ldots \overline{\tau}_k$ je rozklad (i) transformace $\overline{\tau}$ na své dílčí elementární transformace (transformace $\overline{\tau}_t$ posunuje i_t-tou stranu). Poněvadž $\overline{\mathsf{P}}$ nemá i-tou stranu, bude vesměs $i_t \neq i$.

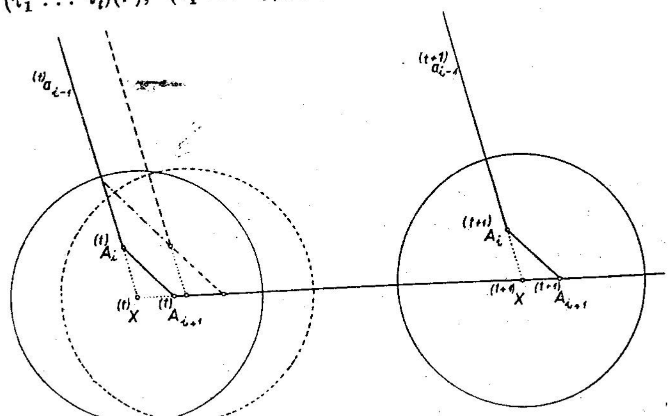
Podle předchozího lemmatu existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\overline{\pi} \leqq \overline{\tau}$ neleží v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{\pi}(X)$, kromě částí sousedních stran, žádný bod mnohoúhelníka $\overline{\pi}(\overline{\mathsf{P}})$.

Vraťme se k mnohoúhelníku P. Poněvadž je typu $S(i, i)$, existuje elementární transformace $\lambda^{(i)}$ mnohoúhelníka P tak, že úsečka $\lambda^{(i)}(a_i)$ leží celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu $\lambda^{(i)}(X)$. Mnohoúhelník $\lambda^{(i)}(\mathsf{P})$ značme ${}^{(0)}\mathsf{P}$.

Pro každé $t \in (1, 2, \ldots, k)$ nechť ${}^{(t)}\mathsf{P}$ značí jednoduchý mnohoúhelník, jenž je isogonální s P, je typu $S(i, i)$, anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)(\overline{\mathsf{P}})$, i-tá strana mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ leží celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu ${}^{(t)}X$ (průsečík přímek proložených $\overline{i-1}$-tou a $\overline{i+1}$-tou stranou) a je stejně dlouhá jako úsečka $\lambda^{(i)}(a_i)$. (Z vlastností čísla ε plyne okamžitě existence všech mnohoúhelníků ${}^{(t)}\mathsf{P}$.)

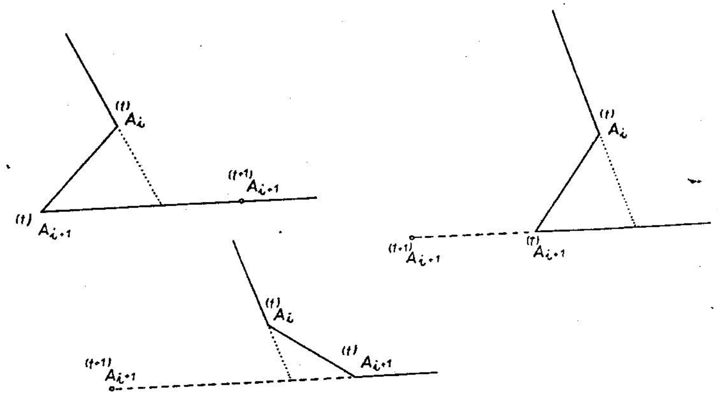
Poněvadž ${}^{(k)}\mathsf{P}$ je typu $S(i, i)$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $\overline{\tau}(\overline{\mathsf{P}}) = \overline{\mathsf{Q}}$, existuje elementární transformace $\mu^{(i)}$ mnohoúhelníka ${}^{(k)}\mathsf{P}$ tak, že $\mu^{(i)}({}^{(k)}\mathsf{P}) = \mathsf{Q}$.

Nechť $t \in (0, 1, 2, \ldots, k-1)$ a uvažujme o dvojici mnohoúhelníků ${}^{(t)}\mathsf{P}$, ${}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Jsou oba typu $S(i, i)$ a anulováním jejich i-tých stran obdržíme mnohoúhelníky $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)(\overline{\mathsf{P}})$, $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_{t+1})(\overline{\mathsf{P}})$. (Pro $t = 0$ jde o dvojici $\overline{\mathsf{P}}, \overline{\tau}_1(\overline{\mathsf{P}})$.)



Obr. 27.

Jestliže platí $i - 1 \neq i_{t+1} \neq i + 1$, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(i_{t+1})}$ mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\tau^{(i_{t+1})}({}^{(t)}\mathsf{P}) = {}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Transformaci $\tau^{(i_{t+1})}$ značme τ_{t+1}. Jestliže $i_{t+1} = i - 1$ nebo $i_{t+1} = i + 1$, dokážeme, že existuje dovolená transformace τ_{t+1} mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\tau_{t+1}({}^{(t)}\mathsf{P}) = {}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Nechť např. $i_{t+1} = i - 1$ a nastane situace uvedená na obr. 27.



Obr. 28.

Zřejmě existuje elementární transformace $\nu^{(i)}$ mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\nu^{(i)}({}^{(t)}A_{i+1})$ leží mezi ${}^{(t)}A_{i+1}$, ${}^{(t+1)}A_{i+1}$ a úsečka $\nu^{(i)}({}^{(t)}a_i)$ celá leží uvnitř kruhového ε-okolí bodu ${}^{(t)}X \equiv \nu^{(i)}({}^{(t)}X)$. Dále zřejmě existuje elementární transformace $\nu^{(i-1)}$ mnohoúhelníka $\nu^{(i)}({}^{(t)}\mathsf{P})$ tak, že úsečka $(\nu^{(i)}\nu^{(i-1)})({}^{(t)}a_i)$ je stejně dlouhá jako ${}^{(t)}a_i$ a leží tedy celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu $(\nu^{(i)} . \nu^{(i-1)})({}^{(t)}X)$. Zřejmě po konečném počtu takových kroků dospějeme k mnohoúhelníku ${}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Podobně se dokáže existence transformace τ_{t+1} i v ostatních případech (obr. 28). Zřejmě transformace $\tau = \lambda^{(i)} . \tau_1 . \tau_2 \ldots \tau_k . \mu^{(i)}$ je hledaná dovolená transformace převádějící mnohoúhelník P v Q. Tím je případ 1 řešen.

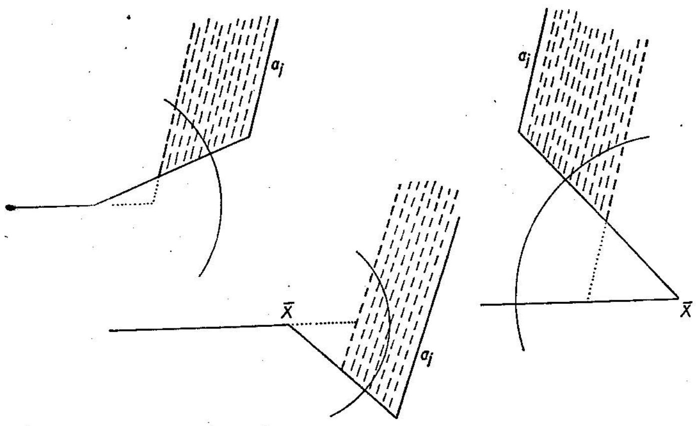
2. Nechť $i \neq j$.

21. Strany a_{i-1}, a_{i+1} nejsou rovnoběžné. Označme $\Pi^{(j)}$ resp. $\Gamma^{(j)}$ mezní transformaci mnohoúhelníka P, resp. Q, jež anuluje i-tou stranu. Tedy $\overline{\mathsf{P}} = \Pi^{(j)}(\mathsf{P})$, $\overline{\mathsf{Q}} = \Gamma^{(j)}(\mathsf{Q})$. Očíslování stran v $\overline{\mathsf{P}}$ a $\overline{\mathsf{Q}}$ opět ponechme jako v P, Q. Nemají tedy $\overline{\mathsf{P}}, \overline{\mathsf{Q}}$ i-tou stranu. Nechť X značí průsečík přímek proložených úsečkami a_{i-1}, a_{i+1}. Zřejmě bod $\Pi^{(j)}(X)$ je vlastním vrcholem mnohoúhelníka $\Pi^{(j)}(\mathsf{P})$ a platí $\Pi^{(j)}(X) \equiv \Pi^{(j)}(A_i) \equiv \Pi^{(j)}(A_{i+1})$. Tento bod označme $\overline{X}$.

Poněvadž mnohoúhelník $\overline{\mathsf{P}}$ je jednoduchý, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

- v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{X}$ neleží, kromě částí stran $\overline{a}_{i-1}$, $\overline{a}_{i+1}$, žádný další bod mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$,
- každé paralelní posunutí některé ze stran $\overline{a}_{i-1}, \overline{a}_{i+1}$ o délku ε je elementární transformací mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$.

Existuje zřejmě elementární transformace $\pi^{(j)} < \Pi^{(j)}$ mnohoúhelníka P tak, že všechny tři body $\pi^{(j)}(A_i)$, $\pi^{(j)}(A_{i+1})$, $\pi^{(j)}(X)$ leží uvnitř kruhového ε-okolí bodu $\overline{X}$ (obr. 29). Odtud plyne, že mnohoúhelník $\pi^{(j)}(\mathsf{P})$ je typu $S(i, i)$. Označme $\overline{\overline{\mathsf{P}}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z $\pi^{(j)}(\mathsf{P})$ anulováním jeho i-té strany. Z vlastností čísla ε je patrno, že $\overline{\mathsf{P}}$ lze elementární transformací j-té strany



Obr. 29.

převést v $\overline{\overline{\mathsf{P}}}$. Podobně dokážeme existenci takové elementární transformace $\gamma^{(j)} < \Gamma^{(j)}$ mnohoúhelníka Q, že mnohoúhelník $\gamma^{(j)}(\mathsf{Q})$ je typu $S(i, i)$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $\overline{\overline{\mathsf{Q}}}$, který vznikne z $\overline{\mathsf{Q}}$ elementární transformací j-té strany. Obdrželi jsme případ 1, který již je řešen.

22. Strany a_{i-1}, a_{i+1} jsou rovnoběžné. Bez újmy obecnosti lze předpokládat $j = i + 1$. (Jestliže $j = i - 1$, provedeme přečíslování stran mnohoúhelníka P v opačném smyslu.) Jestliže $\Pi^{(j)}$ representuje mezní transformaci anulující i-tou stranu, je $\Pi^{(j)}(A_i) \equiv \Pi^{(j)}(A_{i+1})$ vnitřním bodem strany $\overline{\Pi^{(j)}(A_{i-1})\ \Pi^{(j)}(A_{i+2})}$ mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$. Tuto stranu označme $\overline{a}_{i-1}$. Ostatní jeho strany $\Pi^{(j)}(a_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, i - 2, \cancel{i+2}, \ldots)$ označme $\overline{a}_t$. (Není tedy v $\overline{\mathsf{P}}$ i-tá ani $\overline{i + 1}$-tá strana.) Nechť $\overline{X}$ značí půlicí bod $\overline{i - 1}$-té strany mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$ (obr. 30).

Nechť $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_k$ je rozklad (i) dovolené transformace $\overline{\tau}$ na své dílčí elementární transformace ($\overline{\tau}_t$ je posunutí i_t-té strany).

Podle poznámky uvedené za lemmatem 2 existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\overline{\pi} \leqq \overline{\tau}$ neleží v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{\pi}(\overline{X})$ (= půlicí bod úsečky $\overline{\pi}(\overline{a}_{i-1})$), kromě části vnitřku strany $\overline{\pi}(\overline{a}_{i-1})$, žádný další bod mnohoúhelníka $\overline{\pi}(\overline{\mathsf{P}})$.

Pro každé $t \in (0, 1, 2, \ldots, k)$ nechť ${}^{(t)}\mathsf{P}$ značí jednoduchý mnohoúhelník, jenž má následující vlastnosti:

— je isogonální s P,

— je typu $S(i, i + 1)$,

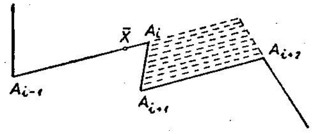
— anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník

$(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)\,(\overline{\mathsf{P}})$ (pro $t = 0$ obdržíme mnohoúhelník $\overline{\mathsf{P}}$),

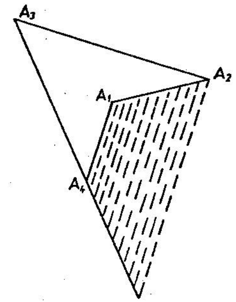
— ${}^{(t)}A_i \equiv (\overline{\tau}_t\overline{\tau}_1) \ldots (\overline{X})$ (tj. půlicí bod úsečky $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)(\overline{a}_{i-1})$),

— úsečka ${}^{(t)}a_i$ má délku rovnou $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Číslo ε lze zřejmě volit tak malé, že všechny uvedené mnohoúhelníky ${}^{(t)}\mathsf{P}$ existují.



Obr. 30.



Obr. 31.

Úvahami zcela podobnými jako v části 1 našeho důkazu nalezneme dovolené transformace $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_{k+1}$, jež přivádějí mnohoúhelníky P, ${}^{(0)}\mathsf{P}$, ${}^{(1)}\mathsf{P}, \ldots, {}^{(k)}\mathsf{P}$, Q jeden v druhý (v tomto pořádku). Transformace $\tau = \tau_0 \cdot \tau_1 \ldots \ldots \tau_{k+1}$ je hledaná transformace. Důkaz lemmatu je ukončen.

Lemma 4. *Nechť* P *je jednoduchý n-úhelník s vlastností*

(z) $\alpha_2 < 180° < \alpha_1$.

Pak buď P *je typu* $S(1, n)$ *nebo existuje dovolená transformace* τ *mnohoúhelníka* P *tak, že* $\tau(\mathsf{P})$ *již je tohoto typu.*

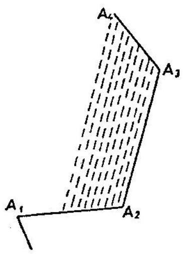
Mnohoúhelník s vlastností (z) je zřejmě nekonvexní a $n \geqq 4$. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Nechť $n = 4$. Pak A_3, A_4 leží v různých polorovinách určených přímkou p_1 (obsahuje body A_1, A_2), $a_2 \nparallel a_4$ a $\alpha_3, \alpha_4 < 180°$ (obr. 31). Odtud plyne, že P je typu $S(1, n)$. Pro $n = 4$ tedy lemma platí. Nechť $n > 4$ je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro všechny jednoduché k-úhelníky s vlastností (z), $4 \leqq k < n$. Nechť P je jednoduchý n-úhelník uvedený v lemmatu. Jestliže P je typu $S(1, 2)$, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)}$ dovnitř mnohoúhelníka P tak, že $\tau^{(2)}(\mathsf{P})$ je typu $S(1, n)$ — jsme hotovi. Nechť tedy P není typu $S(1, 2)$.

1. Studujme nejdříve případ, kdy $\alpha_3 > 180°$. Proveďme mezní transformaci třetí strany dovnitř mnohoúhelníka P. Postupujeme nyní naprosto stejně jako v části 1 důkazu lemmatu 1. (Jen označení je jiné. Bodům $A_1', A_2', \ldots$ odpovídají nyní body po řadě $A_2, A_3, \ldots$ Dospějeme-li k mnohoúhelníku R a je-li počet jeho stran $\geqq 5$, užijeme pro R tvrzení lemmatu 1 stejně, jak jsme to učinili v důkazu lemmatu 1, kde oprávněnost užití lemmatu byla zaručena indukčními předpoklady.) Tímto postupem dospějeme k tvrzení,

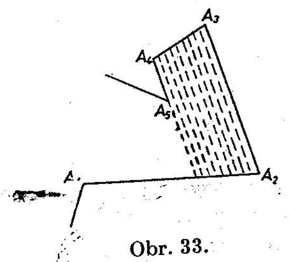
že buď P sám je typu $S(i, j)$, $i \in (3, 4, \ldots, n-2)$, $j \in (3, 4, \ldots, n-1)$, nebo dovolenou transformací lze mnohoúhelník P na tento typ převést. Lze tedy předpokládat, že P je typu $S(i, j)$ (i, j jsou čísla uvedená nahoře). Označme $\overline{\mathrm{P}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z P anulováním jeho i-té strany. Očíslování stran ponechme jako v mnohoúhelníku P. Jestliže $\overline{\mathrm{P}}$ je $\overline{n-1}$-úhelník, nemá i-tou stranu. Jestliže $\overline{\mathrm{P}}$ je $\overline{n-2}$-úhelník, strany $\overline{i-1}$-tá a $\overline{i+1}$-tá leží v téže přímce. Tuto stranu mnohoúhelníka $\overline{\mathrm{P}}$ označme $\bar{a}_{i-1}$. Mnohoúhelník $\overline{\mathrm{P}}$ je typu (z) a má menší počet stran nežli mnohoúhelník P. Podle indukčního předpokladu existuje dovolená transformace $\bar{\tau}$ (eventuálně identická) mnohoúhelníka $\overline{\mathrm{P}}$ tak, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ je typu $S(1, n)$.

Poněvadž $i \neq n-1, n, 1, 2$ a $j \neq n, 1, 2$, existuje jednoduchý n-úhelník P_1, isogonální s P tak, že je typů $S(i, j)$, $S(1, n)$ a anulováním i-té jeho strany obdržíme mnohoúhelník $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$. Z lemmatu 3 plyne existence dovolené transformace τ převádějící P v P_1 — jsme hotovi. Tím máme vyřešen případ $\alpha_3 > 180°$.

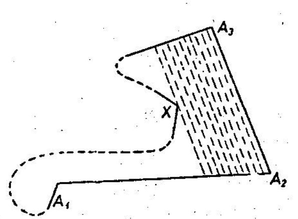
2. Nechť $\alpha_3 < 180°$. Proveďme s mnohoúhelníkem P mezní transformaci $\Pi^{(2)}$ dovnitř. Poněvadž $\alpha_3 < 180°$, nevymizí druhá strana. Vymizí-li první strana (ačkoli jsme předpokládali, že P není typu $S(1, 2)$, může při transformaci $\Pi^{(2)}$ vymizet první strana; pak $\Pi^{(2)}(\mathrm{P})$ není jednoduchý nebo vymizí ještě třetí strana), existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ tak, že $\tau^{(2)}(\mathrm{P})$ je typu $S(1, n)$ — jsme hotovi. Nechť nevymizí první strana. Pak pro mnohoúhelník $\Pi^{(2)}(\mathrm{P})$ nastane jedna ze tří situací, vyznačených na obrázcích 32, 33 a 34. Ve všech třech případech dospějeme (podobně jako v případu 1) jistou



Obr. 32.



Obr. 33.



Obr. 34.

dovolenou transformací τ_1 k jednoduchému mnohoúhelníku $\tau_1(\mathrm{P})$, který je typu $S(i, j)$, $i \in (3, 4, \ldots, n-2)$, $j \in (2, 3, \ldots, n-1)$. Označíme-li $\overline{\mathrm{P}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z $\tau_1(\mathrm{P})$ anulováním jeho i-té strany, existuje podle indukčního předpokladu dovolená transformace $\bar{\tau}$ tak, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ je typu $S(1, n)$. Jestliže $j \neq 2$, postupujeme zcela stejně jako v části 1 našeho důkazu. (Sestrojíme mnohoúhelník P_1, jenž je isogonální s P, je typů $S(i, j)$, $S(1, n)$, anulováním jeho i-té strany obdržíme $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ atd.) Jestliže $j = 2$, je $i = 3$ a snadno se zkonstruuje jednoduchý mnohoúhelník P_1, jenž je isogonální s P, je typů

$S(3, 2)$, $S(1, \mathrm{n})$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$. Pokračujeme pak dále jako nahoře. Důkaz lemmatu je hotov.

Nyní již můžeme dokázat naši větu. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Pro trojúhelníky věta platí. Nechť $n > 3$ je libovolné přirozené číslo a nechť věta platí pro všechna k, $3 \leq k < n$. Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky, které nejsou shodné. Jestliže $n = 4$ a P je rovnoběžník, věta platí. Nechť P není rovnoběžník a nechť P je konvexní. Pak existuje index i tak, že $\alpha_i + \alpha_{i+1} > 180°$. (Jinak by součet vnitřních úhlů $(n-2) \cdot 180°$ byl menší než $\frac{n}{2} \cdot 180°$, z čehož plyne $n < 4$ proti předpokladu.) Poněvadž Q je také konvexní, jsou oba mnohoúhelníky typu $S(i, i)$ a podle indukčního předpokladu a lemmatu 3 existuje dovolená transformace τ mnohoúhelníka P tak, že $\tau(\mathrm{P})$ je shodný s Q. Jestliže P není konvexní, lze jeho strany očíslovat tak, že P má vlastnost (z). (Příslušné přečíslování provedeme též v mnohoúhelníku Q.) Podle lemmatu 4 lze mnohoúhelníky P, Q převést dovolenými transformacemi v mnohoúhelníky P′, Q′, jež jsou typu $S(1, n)$. Označme $\overline{\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{Q}}$ mnohoúhelníky, jež vzniknou z P′, Q′ anulováním jejich prvních stran. Podle indukčního předpokladu existuje dovolená transformace $\bar{\tau}$ tak, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ je shodný s $\overline{\mathrm{Q}}$. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}}) = \overline{\mathrm{Q}}$. Podle lemmatu 3 lze dovolenou transformací převést P' v Q'. Věta je tím dokázána.

Došlo 19. 2. 1959.

Katedra matematiky university v Brně

О ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОСТЫХ ПЛОСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ВАЦЛАВ ПОЛАК

Выводы

Пусть $\mathrm{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ — простой плоский многоугольник, у которого все вершины собственные (соседние стороны лежат на различных прямых). Под элементарной трансформацией n — угольника P разумеется такой параллельный перенос любой его стороны, что все многоугольники, возникшие в течение этой трансформации, являются простыми n — угольниками.

Пусть P, Q — пара простых изогональных многоугольников. В работе доказывается, что с помощью конечного числа элементарных трансформаций перейдёт P в многоугольник конгруэнтный с Q.

ABOUT CERTAIN TRANSFORMATION OF THE SIMPLE PLANE POLYGONS

VÁCLAV POLÁK

Summary

Let $\mathsf{P} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ be a simple plane polygon all vertices of which are own ones (neighbour sides lie in different straight lines). A parallel translation of any side of polygon P is called the elementar transformation, if all polygons formed during that transformation are simple and have n own vertices.

Let P, Q be two isogonal simple plane polygons. The existence of finite number of elementar transformations that transform P in a polygon congruent with Q is proved.