MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, X, 2-1960

KU KLASICKÉMU n-OSCILÁTORU

MIKULÁŠ BLAŽEK, Bratislava

V prácach [1] je vyšetrovaný kvantový n-rozmerný harmonický izotropický oscilátor (v ďalšom stručne iba kvantový n-oscilátor) a je v nich ukázané, že pre tento typ oscilátora platia okrem dobre známych zákonov o zachovaní i ďalšie, ktoré vyplývajú z komutačných vlastností hamiltoniánu s určitými veličinami. V predloženej práci ukážeme, že podobných n^2 zákonov o zachovaní platí i v prípade klasického n-oscilátora a že v tomto prípade sa dajú zachovávajúce sa veličiny získať z prvej vety E. Noetherovej [2].

Práca je rozdelená na tri časti. Keďže sa v literatúre (z klasickej fyziky) zriedka používa veta Noetherovej, zaoberáme sa v prvej časti práce jej formulovaním pre klasickú sústavu o n stupňoch voľnosti. (Odvodenie vety Noetherovej pre všeobecnejší prípad možno nájsť napríklad v [3].) V druhej časti sú získané vzťahy aplikované na klasický n-oscilátor a v tretej časti je poukázané na súvis medzi zákonmi o zachovaní, ktoré vyplývajú jednak z vety Noetherovej a jednak z pohybových rovníc.

Veta Noetherovej

1. V úvahách klasickej mechaniky vystupuje ako nezávisle premenná veličina iba čas t. Uvažujme dva okamžiky t a t', ktoré nastanú po uplynutí nekonečne krátkej doby δt

$$t' = t + \delta t. \tag{1}$$

Nech v čase t sú zovšeobecnené súradnice uvažovaného systému $Q_i(t)$ a v čase t' sú $Q'_i(t')$. Prechod od $Q_i(t)$ ku $Q'_i(t')$ môžeme vyjadriť pomocou nasledujúcej transformácie

$$Q_i(t) \rightarrow Q'_i(t') = Q_i(t) + \delta Q_i, \tag{2}$$

kde δQ_i vyjadruje nekonečne malú zmenu súradnice, spôsobenú jednak zmenou argumentu ($t \rightarrow t'$) a jednak i zmenou samotnej funkčnej závislosti ($Q_i \rightarrow Q'_i$). V ďalšom budeme stále predpokladať, že uvažované konečné transformácie tvoria grupu, lebo iba vtedy môžeme používať v nich obsažené nekonečne malé transformácie [napr. typu (1) alebo (2)].

Všeobecne ľubovoľnú funkciu času $f(t)$ budeme transformovať týmto spôsobom

$$f(t) \to f'(t') = f(t) + \delta f, \tag{3}$$

kde δf predstavuje nekonečne malú veličinu prvého rádu. Pre takúto veličinu platí

$$\delta f(t') = \delta f(t + \delta t) = \delta \left[f(t) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \delta t + \dots \right]. \tag{4}$$

Vo všetkých ďalších vzťahoch zanedbáme nekonečne malé veličiny vyšších rádov (druhého, tretieho, atď.) voči veličinám prvého rádu. Potom zo (4) dostaneme

$$\delta f(t') = \delta f(t). \tag{5}$$

Ďalšie vzťahy teda nezávisia od toho, v akých premenných vyjadríme ľubovoľnú nekonečne malú veličinu prvého rádu.

Špeciálne pre zovšeobecnenú rýchlosť $\dot{Q}_i(t) = \dfrac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}$ môžeme podľa (3) písať

$$\frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} + \delta \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Na druhej strane však môžeme nájsť transformáciu pre rýchlosti tak, že derivujeme (2) podľa t':

$$\frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t'} + \frac{\mathrm{d}\delta Q_i}{\mathrm{d}t'}. \tag{7}$$

S ohľadom na (1) platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \left(1 - \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

a teda (7) môžeme upraviť takto

$$\frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta Q_i}{\mathrm{d}t}.$$

Ak tento vzťah porovnáme so (6), dostaneme

$$\delta \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta Q_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

2. Majme klasický systém o n stupňoch voľnosti, opísaný zovšeobecnenými súradnicami $Q_i(t)$ a zovšeobecnenými rýchlosťami $\dot{Q}_i(t) = \dfrac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nech pre tento systém existuje Lagrangeova funkcia $L[Q_i(t), \dot{Q}(t), t]$, spĺňujúca pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(Q_i, \dot{Q}_i, t)}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L(Q_i, \dot{Q}_i, t)}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Pri prechode k čiarkovaným premenným dostaneme

$$L\left[Q_i(t), \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}, t\right] \to L'\left[Q_i'(t'), \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'}, t'\right], \tag{10}$$

pričom v novom systéme platia zasa pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \frac{\partial L'(Q_i', \dot{Q}_i', t')}{\partial \dot{Q}_i'} - \frac{\partial L'(Q_i', \dot{Q}_i', t')}{\partial Q_i'} = 0. \tag{11}$$

Pravda, na transformácie $t \to t'$, $Q_i \to Q_i'$, $\dot{Q}_i \to \dot{Q}_i'$ môžeme pozerať aj tak, že určujú v tom istom súradnom systéme iné „body": nečiarkovaným premenným (ktorých hodnoty sú možné pre fyzikálny pohyb) priraďujú hodnoty čiarkované. Preto musí zároveň s (9) platiť aj

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \frac{\partial L(Q_i', \dot{Q}_i', t')}{\partial \dot{Q}_i'} - \frac{\partial L(Q_i', \dot{Q}_i', t')}{\partial Q_i'} = 0. \tag{12}$$

Z porovnania (11) a (12) vidieť, že lagrangián L' sa môže líšiť od L iba o výraz, ktorý identicky splňuje Euler—Lagrangeove pohybové rovnice (9). V našom prípade jedine možným takýmto výrazom je

$$\frac{\mathrm{d}F[Q_i(t), t]}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

kde F je ľubovoľná funkcia súradníc a času. Platí totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial Q_i} - \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \equiv 0.$$

Teda musí byť

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t},$$

resp. pri nekonečne malých transformáciách (1), (2), (6)

$$L' = L + \delta L,$$

kde

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

a teda

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}\delta F(Q_i, t)}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

(obe strany rovnice sú vyjadrené v tých istých premenných).

Pripomeňme, že vzťahom (14) nová funkcia L' nie je určená. Vzťah (14) určuje divergenčný prírastok, t. j. funkciu F. Nový lagrangián L' treba určiť z inej, ďalšej podmienky. Touto ďalšou, fyzikálne opodstatnenou je tá podmienka, ktorá vyžaduje, aby sa účinok (resp. element účinku) vyjadril v oboch sústavách (čiarkovanej i nečiarkovanej) tým istým spôsobom, t. j. aby platilo

$$L'\left[Q_i'(t'), \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'}, t'\right]\mathrm{d}t' = L\left[Q_i(t), \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}, t\right]\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Ak poznáme lagrangián v pôvodnej sústave (a zrejme poznáme aj uvažovanú transformáciu) určuje táto rovnica skutočne novú funkciu L'.

Keď už poznáme obe funkcie L a L', môžeme ich použiť na zistenie divergenčného prírastku δF v (14), a to takto: Vzťah (14) vyjadríme v čiarkovaných premenných a vynásobíme ho s $\mathrm{d}t'$. Dostaneme

$$L'(Q_i', \dot{Q}_i', t')\,\mathrm{d}t' = L(Q_i', \dot{Q}_i', t')\,\mathrm{d}t' + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{16}$$

[pre posledný člen sme použili vlastnosť (5)]. Z rovnosti ľavých strán v (15) a (16) vyplýva rovnosť pravých strán, t. j.

$$L(Q_i', \dot{Q}_i', t')\,\mathrm{d}t' - L(Q_i, \dot{Q}_i, t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 0. \tag{17}$$

Keďže

$$\mathrm{d}t' = \left(1 + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

dostávame ďalej

$$L(Q_i', \dot{Q}_i', t')\left(1 + \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t - L(Q_i, \dot{Q}_i, t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

Prvého činiteľa rozvinieme do Taylorovho radu:

$$L\left[Q_i'(t'), \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'}, t'\right] = L\left[Q_i(t) + \delta Q_i, \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} + \delta\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}, t + \delta t\right] =$$

$$= L(Q_i, \dot{Q}_i, t) + \sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}\cdot\delta Q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\partial\dot{Q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\cdot\delta t.$$

Po dosadení do (18) (nekonečne malé členy vyšších rádov zanedbávame) dostaneme

$$\left\{\sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}\delta Q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\delta\dot{Q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{19}$$

Tento vzťah má platiť pre každý časový úsek $\mathrm{d}t$ ($\neq 0$). Z uvedeného vyplýva, že hľadaný divergenčný prírastok môžeme zistiť podľa tohto vzťahu

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta F = \sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}\delta Q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\delta\dot{Q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

Obvykle je $\delta F \equiv 0$.

3. Je dobré si uvedomiť, že vzťah (20) sme odvodili za toho predpokladu, že účinok daného fyzikálneho systému je invariantný voči uvažovaným transformáciám (1), (2,) (6), t. j. platí (15). Pravda, je zrejmé, že ak uvažujeme ľubovoľné transformácie tvaru

$$t \to t' = t + \Delta t,$$

$$Q_i(t) \to Q_i'(t') = Q_i(t) + \Delta Q_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} + \Delta\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t},$$

môžeme zistiť čisto formálne, že $\left[\text{s ohľadom na } \mathrm{d}t' = \left(1 + \frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right]$ platí

$$L\left[Q_i'(t'), \frac{\mathrm{d}Q_i'(t')}{\mathrm{d}t'}, t'\right]\mathrm{d}t' - L\left[Q_i(t), \frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}, t\right]\mathrm{d}t =$$

$$= L[Q_i(t) + \Delta Q_i, \dot{Q}_i(t) + \Delta\dot{Q}_i, t + \Delta t]\left(1 + \frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t - L[Q_i(t), \dot{Q}_i(t), t]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left\{\sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}\Delta Q_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\Delta\dot{Q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t \tag{21}$$

[podobným spôsobom, ako sme zistili (19)]. U tohto vzťahu (21) môžeme ďalej písať, že je rovný výrazu $-\frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}$ len v tom prípade, ak platí (15), t. j. ak je účinok invariantný voči uvažovaným transformáciám. V prípade takýchto transformácií ($\Delta \to \delta$) môžeme (21) prepísať na tvar, formálne zhodný s (19) a takto získaný vzťah môžeme upravovať ďalej.

4. Pri ďalšej úprave vzťahu (19) vylúčime tretí a štvrtý člen, a to tak, že zavedieme totálnu deriváciu (podľa času) funkcie $L\delta t$. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\delta t) = \sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\delta t + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\ddot{Q}_i\delta t + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}$$

a teda z (19) dostaneme (po integrovaní cez čas $t_2 - t_1$)

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}(L\delta t)}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\partial L}{\partial Q_i}(\delta Q_i - \dot{Q}_i\delta t) + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}(\delta\dot{Q}_i - \ddot{Q}_i\delta t) + \frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t = 0.$$

K tomuto vzťahu pripočítame a odpočítame výraz

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}(\delta Q_i - \dot{Q}_i\delta t)\,\mathrm{d}t.$$

Dostaneme

$$\int\left\{\frac{\mathrm{d}(L\delta t)}{\mathrm{d}t}-\sum\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}-\frac{\partial L}{\partial Q_i}\right)(\delta Q_i-\dot{Q}_i\delta t)+\sum\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}(\delta Q_i-\dot{Q}_i\delta t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}(\delta\dot{Q}_i-\ddot{Q}_i\delta t)\right]+\frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{22}$$

Keďže predpokladáme splnenie pohybových rovníc (9), druhý člen v (22) sa rovná nule. Ďalej platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta Q_i-\dot{Q}_i\delta t)=\delta\dot{Q}_i-\ddot{Q}_i\delta t, \tag{23}$$

pretože po prevedení naznačenej derivácie dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\delta Q_i}{\mathrm{d}t}-\ddot{Q}_i\delta t-\dot{Q}_i\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}=\delta\dot{Q}_i-\ddot{Q}_i\delta t,$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}\delta Q_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}=\delta\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t},$$

čo je s ohľadom na (8) splnené.

Po úprave výrazu, ktorý sa nachádza v hranatej zátvorke v (22), pomocou (23) dostaneme

$$\int\left\{\frac{\mathrm{d}(L\delta t)}{\mathrm{d}t}+\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}(\delta Q_i-\dot{Q}_i\delta t)\right]+\frac{\mathrm{d}\delta F}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t=0,$$

resp.

$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{-\left(\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\dot{Q}_i-L\right)\delta t+\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\delta Q_i+\delta F\right\}\mathrm{d}t=0.$$

Výraz v guľatej zátvorke je Hamiltonovou funkciou H systému a teda dostávame

$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{-H\delta t+\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\delta Q_i+\delta F\right\}\mathrm{d}t=0.$$

Z tohto vyplývajú zákony o zachovaní v tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{-H\delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\delta Q_i+\delta F\right\}=0. \tag{24}$$

Toto je hľadané vyjadrenie vety Noetherovej pre klasickú sústavu o n stupňoch voľnosti. Pritom δF je určený pomocou vzťahu (20).

Prírastky δQ_i a $\delta\dot{Q}_i$ (vyskytujú sa aj vo výraze δF) môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu prírastkov nezávislých parametrov, ktoré sú obsiahnuté v uvažovaných transformáciách. Keďže sú tieto parametre (napríklad

o počte p) lineárne nezávislé, vyplýva z (24) p lineárne nezávislých zákonov o zachovaní (v ktorých môže byť obsiahnutý i zákon o zachovaní úhrnnej energie v prípade uzavretej sústavy).

Použitie na klasický n-oscilátor

5. Lagrangián klasického n-oscilátora

$$L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_i^2-\frac{1}{2}m\omega^2q_i^2\right)$$

môžeme previesť na obvykle používaný tvar

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\dot{Q}_i^2-Q_i^2), \tag{25}$$

kde Q_i a $\dot{Q}_i=\frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}$ reprezentujú zovšeobecnené súradnice a rýchlosti. Pohybové rovnice (9) sú v tomto prípade

$$\ddot{Q}_i+Q_i=0,\qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{26}$$

Pre ďalší postup zoberieme do úvahy „otočenia“

$$Q_i\to Q_i'=\sum_k(a_{ik}Q_k+b_{ik}\dot{Q}_k),$$
$$\dot{Q}_i\to\dot{Q}_i'=\sum_k(-b_{ik}Q_k+a_{ik}\dot{Q}_k), \tag{27}$$

pričom sme použili (26) (zámena $b_{ik}\to-b_{ik}$ nemá tuná podstatný význam). Pripomeňme, že transformácie (27) obsahujú aj rýchlosti. Nech tieto transformácie (27) tvoria grupu (počet nezávislých parametrov sa tým nezmenšuje).

Vyšetríme, ako sa chová lagrangián (25) voči grupe transformácií (27). Dosadením (27) do (25) dostaneme

$$L(Q_i',\dot{Q}_i')=\sum(\dot{Q}_i'^2-Q_i'^2)=$$
$$=\sum_{i,j,k}\{(a_{ij}a_{ik}-b_{ij}b_{ik})(\dot{Q}_j\dot{Q}_k-Q_jQ_k)-2(a_{ij}b_{ik}+b_{ij}a_{ik})\,Q_j\dot{Q}_k\}. \tag{28}$$

Všimnime si, že koeficient pri poslednom člene tohto výrazu je symetrický v indexoch j, k. Ak žiadame, aby platilo

$$\sum_i(a_{ij}a_{ik}-b_{ij}b_{ik})=\delta_{jk}, \tag{29}$$

môžeme (28) prepísať do tvaru

$$L(Q_i',\dot{Q}_i')=L(Q_i,\dot{Q}_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i,j,k}Q_jQ_k(a_{ij}b_{ik}+b_{ij}a_{ik}). \tag{30}$$

[Podmienka (29) vyjadruje to, že v $2n$-rozmernom „fázovom priestore" premenných $Q_1, Q_2, \ldots, \dot{Q}_n, \ldots, \dot{Q}_n$ sa obmedzujeme iba na ortogonálne transformácie.]

Keďže transformácie (27) tvoria grupu (podľa predpokladu), môžeme v ďalšom vyšetrovať, ako sa chová lagrangián (25) voči nekonečne malej transformácii

$$Q_i' = Q_i + \delta Q_i,$$
$$\dot{Q}_i' = \dot{Q}_i + \delta \dot{Q}_i,$$

pričom prírastky δQ_i a $\delta \dot{Q}_i$ môžeme zistiť pomocou (27) $(a_{ik} \to \delta_{ik} + \delta a_{ik}, b_{ik} \to \delta b_{ik})$

$$\begin{aligned} \delta Q_i &= \sum_k (\delta a_{ik} Q_k + \delta b_{ik} \dot{Q}_k), \\ \delta \dot{Q}_i &= \sum_k (-\delta b_{ik} Q_k + \delta a_{ik} \dot{Q}_k). \end{aligned} \tag{31}$$

Pomocou infinitezimálnych prírastkov môžeme zapísať podmienku (29) v tvare

$$\delta a_{ik} + \delta a_{ki} = 0 \tag{32}$$

(prírastky δa_{ik} sú antisymetrické) a vzťah (30) v tvare

$$L(Q_i', \dot{Q}_i') = L(Q_i, \dot{Q}_i) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j,k} Q_j Q_k (\delta b_{jk} + \delta b_{kj}). \tag{33}$$

Z tohto vzťahu hneď vidíme, že prírastky δb_{ik} sú symetrické, t. j. platí

$$\delta b_{ik} = \delta b_{ki}. \tag{34}$$

6. Dva druhy zákonov o zachovaní môžeme získať z (24) priamo.

a) V prípade homogenity času (lagrangián je invariantný voči časovej translácii) je $\delta t \neq 0$, $\delta Q_i = \delta \dot{Q}_i = 0$, a z (24) dostaneme zákon o zachovaní úhrnnej energie celého systému. V našom prípade je platnosť tohto zákona už zrejmá i z tvaru lagrangiánu (25), ktorý neobsahuje explicitne čas.

b) V prípade homogenity „priestoru" vo smere niektorej súradnice, napríklad Q_k (t. j. $\delta Q_i = 0$ pre $i \neq k$ a $\delta Q_k \neq 0$, ale všetky $\delta \dot{Q}_i = 0$) dostaneme z (24), že sa zachováva príslušný sdružený impulz $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}$.

V ďalšom uvážime transformácie tvaru (27), resp. (31) ($\delta t = 0$). Do vzťahu (24) potrebný výraz δF môžeme zistiť hneď zo (17) ($\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$), resp. zrejme z (20). S ohľadom na (33) a (34) dostaneme

$$\delta F = 2 \sum_{i,k} \delta b_{ik} Q_i Q_k.$$

Tento výraz spolu s (31) dosadíme do vyjadrenia vety Noetherovej (24) a s ohľadom na lagrangián (25) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i,k} (2\dot{Q}_i Q_k \delta a_{ik} + 2\dot{Q}_i \dot{Q}_k \delta b_{ik} + 2 Q_i Q_k \delta b_{ik}) = 0. \tag{35}$$

Uvážime dva prípady.

A. Uvažujme otočenie v priestore súradníc, a to konkrétne v rovine (i, k). Teda nech

$$Q_i' = Q_i + \delta a_{ik} Q_k,$$
$$Q_k' = Q_k + \delta a_{ki} Q_i,$$

(nesčituje sa) a ostatné prírastky δa_{rs} a všetky prírastky δb_{ik} sa rovnajú nule. S ohľadom na to, že δa_{ik} sú antisymetrické (32), dostaneme z (35)

$$\dot{Q}_i Q_k - Q_i \dot{Q}_k = \text{konst.} \tag{36a}$$

pre ľubovoľnú dvojicu i, k. Počet týchto zákonov o zachovaní je $\dfrac{n^2 - n}{2}$ (v súhlase s počtom nezávislých antisymetrických parametrov δa_{ik}).

B. Ak uvážime transformácie, pri ktorých je splnená podmienka symetričnosti parametrov δb_{ik} (34) ($\delta a_{ik} = 0$)

$$Q_i' = Q_i + \sum \delta b_{ik} \dot{Q}_k,$$
$$\dot{Q}_i' = \dot{Q}_i - \sum \delta b_{ik} Q_k,$$

dostaneme z (35)

$$\dot{Q}_i \dot{Q}_k + Q_i Q_k = \text{konst.} \tag{36b}$$

pre ľubovoľnú dvojicu i, k. Špeciálne pre $i = k$ máme

$$\dot{Q}_i^2 + Q_i^2 = \text{konst.}$$

V tomto prípade sa teda zachováva aj energia, pripadajúca na každý stupeň voľnosti (čo zasa vidieť už z vyjadrenia lagrangiánu, v ktorom nevystupuje žiaden „väzbový" člen). Rovnice (36b) vyjadrujú $\dfrac{n^2 + n}{2}$ zákonov o zachovaní (v súhlase s počtom nezávislých symetrických parametrov δb_{ik}).

Počet zákonov o zachovaní (36) je n^2.

Záver

7. Dá sa ukázať, že podmienky, aby existoval pre danú fyzikálnu sústavu o n stupňoch voľnosti lagrangián, spĺňajúci pohybové rovnice (9) a aby účinok bol invariantný (15) voči uvažovanej grupe spojitých transformácií (o p nezávislých parametroch) sú nutnými i postačujúcimi pre platnosť vety Noetherovej (24).

Fyzikálny systém o n stupňoch voľnosti je obvykle popísaný n pohybovými diferenciálnymi rovnicami druhého rádu (9). Integrovaním týchto rovníc môžeme zistiť, ako sa mení n súradníc a rýchlostí s časom (teda dostaneme $2n$ rovníc) a pritom vystúpi $2n$ lineárne nezávislých integračných konštánt. Keďže pohybové rovnice uzavretej sústavy neobsahujú explicitne čas, možno ľubovoľne zvoliť počiatok pre odpočítavanie času. Jednu z integračných konštánt v riešeniach pohybových rovníc možno preto vždy vybrať ako additívnu konštantu t_0 k času t. Tým sa počet ďalších integračných konštánt zmenší na $2n - 1$. Ak vylúčime $t + t_0$ zo získaných $2n$ rovníc, môžeme vyjadriť týchto $2n - 1$ konštánt pomocou súradníc a rýchlostí. Teda týchto $2n - 1$ lineárne nezávislých kombinácií súradníc a rýchlostí nezávisí do času a predstavujú zachovávajúce sa veličiny [4].

Ako vidíme, prvá podmienka pre platnosť vety Noetherovej už implicitne zaručuje existenciu $2n - 1$ zákonov o zachovaní. S ohľadom na vetu Noetherovej môžeme potom povedať, že počet nezávislých parametrov p (v akýchkoľvek možných spojitých transformáciách, voči ktorým je účinok invariantný) je väčší alebo sa aspoň rovná dvojnásobku stupňov voľnosti uvažovaného systému, zmenšenému o jednotku, t. j. platí $p \geqq 2n - 1$. Existencia lagrangiánu (a splnenie pohybových rovníc) zaručuje teda, že účinok [alebo v prípade (27) i sám lagrangián, keďže $dt' = dt$] je invariantný aspoň voči $2n - 1$ nezávislým transformáciám.

Úhrnom dostávame, že platnosť vety Noetherovej (24) zahrňuje v sebe i platnosť pohybových rovníc (9). Teda zákony o zachovaní, plynúce z pohybových rovníc, sú nutne obsažené vo vete Noetherovej (24) (splnenie pohybových rovníc je nutnou, ale nie postačujúcou podmienkou pre platnosť vety Noetherovej). Z vety Noetherovej môžu preto plynúť okrem toho niektoré zákony o zachovaní, ktoré integrovaním pohybových rovníc nezískame. Príklad na toto podáva práve uvedený klasický n-oscilátor.

Poznámka. Niektorí autori sa zaoberajú ešte otázkou, do akej miery je jednoznačnou zachovávajúca sa veličina vo vzťahu (24) (v zátvorke). Vychádzajú pritom z toho poznatku, že pohybové rovnice (9) sa nezmenia, ak k lagrangiánu L pridáme ľubovoľnú funkciu G tvaru: $G = \frac{d\Omega(Q_i, t)}{dt}$ [pozri (14)]. V tomto prípade spomenutá veličina bude jednoznačná, ak pri infinitezimálnej transformácii (1) a (2) bude funkcia G spĺňať určitý vzťah — pozri [5], vzťah (C), — ktorý môžeme pre náš klasický prípad písať v tvare

$$\sum_i \frac{\partial G}{\partial Q_i} \delta Q_i + \sum \frac{\partial G}{\partial \dot{Q}_i} \delta \dot{Q}_i + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t + G \frac{d\delta t}{dt} = 0$$

[porovnaj tuná s (20)]. Treba si však uvedomiť, že uvedený vzťah rieši otázku jednoznačnosti iba s ohľadom na tvar lagrangiánu (resp. s ohľadom na funkciu G). Ďalšia nejednoznačnosť totiž môže vyplynúť z toho, že prírastky

„δQ_i“ nie sú jednoznačne určené. Takýto prípad nastáva napríklad v elektromagnetickom poli, kde úlohu „súradníc“ Q_i majú potenciály, ktoré sú určené až na ciachovaciu transformáciu (druhého druhu).

Záverom ďakujem kandidátom vied M. Petrášovi a Ľ. Hrivnákovi za námet a diskusie k tejto téme.

LITERATÚRA

[1] Baker G. A. Jr., Physical Review **103** (1956), 1119.
Demkov J. N., Žurnal eksp. i teor. fiziki **36** (1959), 88.
[2] Noether E., Gött. Nachrichten 1918, 235.
[3] Hill E. L., Rev. Mod. Physics **23** (1951), 253.
[4] Landau L. D. i Lifšic E. M., *Mechanika*, Moskva 1958.
[5] Roman P., Il Nuovo Cimento (X), **10** (1958), 546.

Došlo 14. 7. 1959.

Katedra fyziky Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského v Bratislave

ЗАМЕТКА К КЛАССИЧЕСКОМУ n-ОСЦИЛЛЯТОРУ

МИКУЛАШ БЛАЖЕК

Выводы

В этой работе помощью первой теоремы Э. Нэтэр показано, каким законам сохранения подчиняется классический n-размерный гармонический изотропный осциллятор (классический n-осциллятор). При этом лагранжиан преобразуется таким образом, чтобы выступило выражение типа дивергенции [см. уравнение (33)]. Этим путем получаются законы сохранения в виде (36), число которых n^2 в согласии с числом независимых антисимметричных δa_{ik} (32) и симметричных δb_{ik} (34) параметров. В конце работы обсуждается число этих законов сохранения. Для замкнутой механической системы с n степенями свободы число независимых интегралов равно $2n-1$ [4]. Но в этом случае, когда лагранжиан (действие) системы инвариантный относительно группы преобразований, которая содержит p параметров, по теореме Нэтэр можно получить p сохраняющихся величин. Уравнения движения необходимы но не достаточны для теоремы Нэтэр и потому сохраняющиеся величины полученные из уравнений движения находятся в числе тех, которые можно получить помощью теоремы Нэтэр. По сказанному видно, что $p \geqq 2n-1$. Итак уже существование лагранжиана говорит о том, что он (действие) инвариантен по крайней мере относительно $2n-1$ преобразований. Наглядным примером сказанного является предложенный классический n-осциллятор. Полученные законы сохранения формально одинаковые с теми, которым подчиняется и квантовой n-осциллятор (рассмотренный напр. в раб. [1]).

A REMARK ON THE CLASSICAL n-OSCILLATOR

MIKULÁŠ BLAŽEK

Summary

With the aid of the first E. Noether theorem we show the further conservation laws (36) for the classical n-dimensional isotropic harmonic oscillator (as a consequence of the invariance of the lagrangian over an n^2-parameter group of transformations). There is discussed also the number of these conserving quantities. From the validity of the equations of motion for a system of n degrees of freedom (considering a close system) there follows namely $2n - 1$ conservation laws (see e. g. [4]) and from the E. Noether theorem for this system follows p these laws where p is the number of the transformations over whose is lagrangian invariant. The validity of the equations of motion is necessary but not sufficient condition for the validity of the Noether theorem and therefore the conservation laws following from the equations of motion will be included in these following from the Noether theorem. From this follows: $p \geqq 2n - 1$. An explicit demonstration of this is given by introduced example of the classical n-oscillator. The conservation laws under discussion are formally equal with these that are valid in the case of the quantum n-dimensional isotropic oscillator (that was investigated e. g. in [1]).