POZNÁMKA K VLASTNOSTIAM REÁLNEJ DVOJICE POLYNÓMOV

JÁN HORVÁTH, Bratislava

Pri vyšetrovaní vlastností reálnej dvojice polynómov má veľký význam otázka, kedy dva polynómy s reálnymi koeficientmi tvoria reálnu dvojicu polynómov. Táto otázka je rovnocenná s otázkou, kedy dva polynómy sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. S uvedenou otázkou sa zaoberá aj N. G. Čebotarev v monografii venovanej riešeniu Routh-Hurwitzovho problému ([1]). Pritom uvádza nutné a postačujúce podmienky, aby polynómy $g(z)$ a $h(z)$ boli polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Cieľom tejto poznámky je ukázať na nesprávnosť jednej z týchto podmienok a uviesť predpoklady, za ktorých platí.

Nech $g(z)$ a $h(z)$ sú polynómy s reálnymi koeficientmi, pričom pre ich stupne platí $n_g \geqq n_h$, $n_g + n_h \geqq 1$.

Hovoríme, že polynómy $g(z)$ a $h(z)$ tvoria reálnu dvojicu polynómov, ak pre ľubovoľné reálne λ a μ, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, je $\mu g(z) + \lambda h(z)$ polynóm, ktorý má všetky nulové body reálne.

Hovoríme, že $g(z)$ a $h(z)$ sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi:

1°. Ak $g(z)$ a $h(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy stupňov $n_g \leqq 1$, $n_h \leqq 1$.

2°. Ak $g(z)$ a $h(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy stupňov $n_g + n_h > 2$, $|n_g - n_h| \leqq 1$, ktorých všetky nulové body sú jednoduché a reálne, $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n_g}$, $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_{n_h}$, pričom pre tieto nulové body platí jeden zo vzťahov:

$$\gamma_1 < \varkappa_1 < \gamma_2 < \varkappa_2 < \ldots < \gamma_j < \varkappa_j < \gamma_{j+1} < \ldots < \gamma_n < \varkappa_n,$$
$$\gamma_1 < \varkappa_1 < \gamma_2 < \varkappa_2 < \ldots < \gamma_j < \varkappa_j < \gamma_{j+1} < \ldots < \gamma_n < \varkappa_n < \gamma_{n+1},$$
$$\varkappa_1 < \gamma_1 < \varkappa_2 < \gamma_2 < \ldots < \varkappa_j < \gamma_j < \varkappa_{j+1} < \ldots < \varkappa_n < \gamma_n,$$
$$\varkappa_1 < \gamma_1 < \varkappa_2 < \gamma_2 < \ldots < \varkappa_j < \gamma_j < \varkappa_{j+1} < \ldots < \varkappa_n < \gamma_n < \varkappa_{n+1}.$$

3°. Ak $g(z)$ a $h(z)$ sú súdeliteľné polynómy s najväčším spoločným deliteľom $d(z)$, ktorý má všetky nulové body reálne, $g(z) = d(z)\, g_1(z)$, $h(z) = d(z)\, h_1(z)$, pričom $g_1(z)$ a $h_1(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi.

P o z n á m k a. Pre takto zavedené pojmy platí veta:

Aby polynómy $g(z)$, $h(z)$ s reálnymi koeficientmi tvorili reálnu dvojicu polynómov, je nutné a postačujúce, aby $g(z)$ a $h(z)$ boli polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi ([1], str. 19).

Pre polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi uvádza N. G. Čebotarev medzi inými aj nasledujúcu nutnú a postačujúcu podmienku ([1], veta 7, str. 19):

„Aby polynómy $g(z)$ a $h(z)$ boli polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi, je nutné a postačujúce, aby polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ mal pre všetky reálne hodnoty z jedno a to isté znamienko. Pritom polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ je rovný nule iba pri súčasnom anulovaní polynómov $g(z)$ a $h(z)$."

Z tejto vety by predovšetkým vyplývalo, že ak polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ nemá reálne nulové body, potom polynómy $g(z)$, $h(z)$ sú súdeliteľné a majú len reálne nulové body, resp. jeden z nich nemá žiaden nulový bod. Toto tvrdenie je nesprávne, ako ukazuje tento príklad.

P r í k l a d 1. Uvažujme nesúdeliteľné polynómy:

$$g(z) = z^3 + z, \qquad h(z) = z^2 + 2.$$

Potom polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ sa rovná polynómu:

$$g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) = -z^4 - 5z^2 - 2.$$

Pretože $z^4 + 5z^2 + 2 > 0$ pre ľubovoľné reálne z, polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ nemá reálny nulový bod. Avšak nulové body polynómov $g(z)$ a $h(z)$ nie sú všetky reálne. Polynóm $g(z)$ má nulové body $z_1 = 0$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -\mathrm{i}$ a polynóm $h(z)$ má nulové body $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Na prvý pohľad by sa zdalo, že stačí pripojiť predpoklad o reálnosti nulových bodov polynómov $g(z)$ a $h(z)$, aby veta bola správna. Avšak i takto opravená veta je nesprávna, ako ukazuje nasledujúci príklad.

P r í k l a d 2. Majme polynómy

$$g(z) = z^5 - 2z^4, \qquad h(z) = z^2 - z.$$

Polynóm $g(z)$ má štvornásobný nulový bod $z_1 = 0$ a jednoduchý nulový bod $z_2 = 2$. Polynóm $h(z)$ má jednoduché nulové body $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Násobnosti spoločného nulového bodu sa líšia viac ako o jednotku, preto $g(z)$ a $h(z)$ nie sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Avšak pre polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ platí:

$$g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) = -3z^6 + 8z^5 - 6z^4.$$

Pretože platí:

$$-3z^6 + 8z^5 - 6z^4 = -3z^4\left[\left(z - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right],$$

je $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) \leqq 0$, pre všetky reálne z a rovnosť nastáva iba pre

$z = 0$, čo je spoločný nulový bod polynómov $g(z)$ a $h(z)$. Podľa uvedenej vety by polynómy $g(z)$ a $h(z)$ boli polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi, čo je zrejmý spor.

Z definície polynómov s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi vyplýva, že stupne týchto polynómov sú buď rovnaké, alebo sa líšia o jednotku. Tento predpoklad nie je zrejme v príklade 2 splnený. Možno sa domnievať, že pripojením tohto predpokladu dostaneme nutnú a postačujúcu podmienku. Avšak nasledujúci príklad vyvracia i tento dohad.

P r í k l a d 3. Uvažujme polynómy

$$g(z) = z^4(z - 1), \qquad h(z) = z(z - 1)^4,$$

čiže $n_g = n_h$. Polynómy $g(z)$, $h(z)$ majú iba také nulové body, ktoré sú reálne a spoločné obom polynómom $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Rozdiel násobností týchto spoločných nulových bodov je v oboch prípadoch rovný 3. Preto $g(z)$ a $h(z)$ nie sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Zato však platí:

$$g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) = 3z^4(z - 1)^4.$$

Pretože $z^4(z - 1)^4 \geqq 0$ pre všetky reálne z a rovnosť nastáva iba pre $z = 0$, $z = 1$, polynómy $g(z)$ a $h(z)$ by mali byť podľa uvedenej vety polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi, čo je spor.

Ukážeme však, že platí:

Veta. *Dva polynómy $g(z)$ a $h(z)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré majú všetky nulové body reálne, sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi vtedy a len vtedy, ak sú splnené tieto dve podmienky:*

1. *Ak $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ má reálne nulové body, potom sú bodmi párnej násobnosti.*

2. *Každý reálny nulový bod polynómu $G(z)$ je spoločným koreňom $g(z) = 0$, $h(z) = 0$ takých násobností ν_g, resp. ν_h že platí $|\nu_g - \nu_h| \leqq 1$.*

P o z n á m k a. Ak polynómy $g(z)$, $h(z)$ sú nesúdeliteľné, potom stačí žiadať okrem reálnosti všetkých nulových bodov polynómov $g(z)$ a $h(z)$, aby polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ nemal reálne nulové body.

D ô k a z. Ak pre stupne polynómov $g(z)$, $h(z)$ platí $n_g + n_h \leqq 2$, potom je tvrdenie triviálne. Podobne, ak stupeň polynómu $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ je menší ako 1, je tvrdenie triviálne. Uvažujme teda prípad $n_g + n_h > 2$, resp. $n_G \geqq 2$.

N u t n á p o d m i e n k a. Nech $g(z)$ a $h(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy. Podľa predpokladu polynóm $g(z)$ má všetky nulové body $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_g}$ reálne rôzne. Preto v každom z intervalov (γ_j, γ_{j+1}), $j = 1, 2, \ldots, n_g - 1$ leží jediný nulový bod polynómu $g'(z)$ ([2], veta 6,4). Podľa predpokladu má aj polynóm $h(z)$ iba jediný nulový bod v (γ_j, γ_{j+1}), $j = 1, 2, \ldots, n_g - 1$. Preto je $g'(\gamma_j)\,g'(\gamma_{j+1}) <$

< 0 a $h(\gamma_j)\,h(\gamma_{j+1}) < 0$, (pre $j = 1, 2, \ldots, n_g - 1$) a čísla $\dfrac{h(\gamma_k)}{g'(\gamma_k)}$ (pre $k = 1, 2, \ldots, n_g$) majú rovnaké znamienka. Z rovnosti

$$g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) = -\sum_{k=1}^{n_g} \frac{h(\gamma_k)}{g'(\gamma_k)}\, g_k^2(z),$$

kde

$$g_k(z) = (z - \gamma_1) \ldots (z - \gamma_{k-1})(z - \gamma_{k+1}) \ldots (z - \gamma_{n_g}), \qquad 1 \leqq k \leqq n_g$$

vyplýva, že polynóm $g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ nemá reálne nulové body.

Nech $g(z)$ a $h(z)$ sú súdeliteľné polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Nech $d(z)$ je ich najväčší spoločný deliteľ, $n_d \geqq 1$. Potom platí:

$$g(z) = d(z)\,g_1(z), \qquad h(z) = d(z)\,h_1(z)$$

a

(1) $$g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z) = d^2(z)[g_1(z)\,h_1'(z) - g_1'(z)\,h_1(z)],$$

pričom $g_1(z)$ a $h_1(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Preto podľa dokázaného polynóm $g_1(z)\,h_1'(z) - g_1'(z)\,h_1(z)$ nemá reálne nulové body. Z (1) vyplýva, že všetky nulové body polynómu $G(z)$ sú rovné nulovým bodom polynómu $d^2(z)$, t. j. majú párnu násobnosť a sú rovné spoločným nulovým bodom polynómov $g(z)$ a $h(z)$. Ak δ je jeden takýto spoločný nulový bod polynómov $g(z)$ a $h(z)$ o násobnosti ν_g, resp. ν_h, má $G(z)$ číslo δ za nulový bod násobnosti *aspoň* $\nu_g + (\nu_h - 1) = (\nu_g - 1) + \nu_h$. Ale $d^2(z)$ je deliteľné $(z - \delta)$ presne v mocnine $2\,\mathrm{Min}(\nu_g, \nu_h)$. Teda je $\nu_g + \nu_h - 1 \leqq 2\,\mathrm{Min}\,(\nu_g, \nu_h)$. Z toho plynie $|\nu_g - \nu_h| \leqq 1$. č. b. t. d.

Postačujúca podmienka. Nech sú najprv $g(z)$ a $h(z)$ $(n_g > 2)$ nesúdeliteľné polynómy, ktoré majú všetky nulové body reálne a polynóm $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ nemá reálne nulové body. Nech γ je reálny koreň $g(z) = 0$. Z rovnosti $G(\gamma) = -g'(\gamma)\,h(\gamma)$ vyplýva najprv $g'(\gamma) \neq 0$. Preto sú všetky korene $g(z) = 0$ jednoduché. Z toho plynie (podľa [2], veta 6,4), že $g(z)$ a $g'(z)$ sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Označme korene $g(z) = 0$ znakmi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_g}$; potom z práve dokázaného vyplýva, $g'(\gamma_k)\,g'(\gamma_{k+1}) < 0$, $1 \leqq k \leqq n_g - 1$. Z rovnosti $G(\gamma_k) = -g'(\gamma_k)\,h(\gamma_k)$ a z predpokladu, že $G(z) = 0$ nemá reálne korene, vyplýva, že čísla $g'(\gamma_k)\,h(\gamma_k)$ (pre $k = 1, 2, \ldots, n_g$) majú rovnaké znamienka. Teda je $G(\gamma_k)\,G(\gamma_{k+1}) > 0$, čiže $g'(\gamma_k)\,g'(\gamma_{k+1})\,h(\gamma_k)\,h(\gamma_{k+1}) > 0$, t. j. $h(\gamma_k)\,h(\gamma_{k+1}) < 0$ (pre $k = 1, 2, \ldots, n_g - 1$). Preto $h(z)$ má v intervale (γ_k, γ_{k+1}) aspoň jeden nulový bod. Keďže je $n_h \leqq n_g$, $h(z)$ má v (γ_k, γ_{k+1}) práve jeden nulový bod a $g(z)$, $h(z)$ sú polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi.

Nech teraz $g(z)$ a $h(z)$ sú súdeliteľné polynómy, ktoré majú iba reálne nulové body, a $d_1(z)$ je ich najväčší spoločný deliteľ, $n_{d_1} \geqq 1$. Potom je $g(z) = d_1(z)\,g_1(z)$,

$h(z) = d_1(z)\,h_1(z)$ pričom $g_1(z)$, $h_1(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy. Pre $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ potom platí:

$$G(z) = [g_1(z)\,h_1'(z) - g_1'(z)\,h_1(z)]\,d_1^2(z).$$

Podľa predpokladu má polynóm $g(z)$ a teda tiež $g_1(z)$ všetky nulové body reálne. Nech β je ľubovoľný nulový bod polynómu $g_1(z)$ o násobnosti $\nu_{g_1} \geqq 1$, pričom β je súčasne ν_g-násobný nulový bod polynómu $g(z)$ a ν_h-násobný nulový bod polynómu $h(z)$. Potom platí $\nu_g = \mathrm{Min}\,(\nu_g, \nu_h) + \nu_{g_1}$. Pretože $h_1(z)$ a $g_1(z)$ sú nesúdeliteľné polynómy, je $h_1(\beta) \neq 0$, čiže $\mathrm{Min}\,(\nu_g, \nu_h) = \nu_h$ a $\nu_{g_1} = \nu_g - \nu_h$. Podľa podmienky 2 je $|\nu_g - \nu_h| \leqq 1$. Preto zo vzťahov $\nu_{g_1} \leqq 1$, $\nu_{g_1} \geqq 1$ vyplýva, že $\nu_{g_1} = 1$ a teda $g_1'(\beta) \neq 0$. Podľa podmienky 1 má $G(z)$ reálne nulové body o párnej násobnosti, preto je buď $G(z) \geqq 0$, alebo $G(z) \leqq 0$ pre všetky reálne z. Preto tiež čísla $G(\beta_k) = -d_1^2(\beta_k)\,g_1'(\beta_k)\,h_1(\beta_k)$, kde β_k, $k = 1, 2, \ldots, n_{g_1}$ sú nulové body polynómu $g_1(z)$, majú rovnaké znamienko, alebo sú rovné nule. Podľa práve dokázaného je $g_1'(\beta_k)\,h_1(\beta_k) \neq 0$ a preto zo spojitosti polynómov $G(z)$ a $g_1(z)\,h_1'(z) - g_1'(z)\,h_1(z)$ vyplýva, že čísla $g_1'(\beta_k)\,h_1(\beta_k)$ (pre $k = 1, 2, \ldots, n_{g_1}$) majú rovnaké znamienko. Podľa už odkázaného pre nesúdeliteľné polynómy, sú $g_1(z)$, $h_1(z)$ polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi. Keďže $d(z)$ má všetky nulové body reálne, sú aj $g(z)$, $h(z)$ polynómy s oddeľujúcimi sa nulovými bodmi, č. b. t. d.

LITERATÚRA

[1] Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Мат. Института им. В. А. Стеклова XXVI, Москва—Ленинград 1949.

[2] Schwarz Š. *Základy náuky o riešení rovníc*, Praha 1958.

Došlo dňa 15. 1. 1960.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА К СВОЙСТВАМ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПАРЫ ПОЛИНОМОВ

ЯН ХОРВАТ

Выводы

В работе показано, что теорема 7 (стр. 19) работы [1] неверна. Показано, что имеет место только следующая теорема:

Теорема. Полиномы $g(z)$, $h(z)$ с вещественными коэффициентами, которых все корни вещественные, тогда и только тогда полиномы с перемежающимися корнями, когда выполнены следующие условия:

1. если $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ имеет вещественные корни, потом их кратности чётные,

2. всякий вещественный корень полинома $G(z)$ есть общий корень $g(z) = 0$, $h(z) = 0$, таких кратностей ν_g, ν_h, что $|\nu_g - \nu_h| \leqq 1$.

NOTES ABOUT PROPERTIES OF A PAIR OF POLYNOMIALS

JÁN HORVÁTH

In this work the Theorem 7 (p. 19) in [1] is found to be incorrect. However, the following theorem holds, which is here proved.

Theorem. Two polynomials $g(z)$ and $h(z)$ with real coefficients, all roots of which are real, are the polynomials with separating roots, if and only if, $g(z)$ and $h(z)$ satisfy two following conditions:

1. If $G(z) = g(z)\,h'(z) - g'(z)\,h(z)$ has real roots, than these are even-fold roots.
2. Every real root of polynomials $G(z)$ is such a ν_g-fold root of the polynomial $g(z)$ and ν_h-fold root of the polynomial $h(z)$, that $|\nu_g - \nu_h| \geqq 1$.