MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, X, 1-1960

O POLOGRUPÁCH, KTORÝCH KAŽDÝ ĽAVÝ IDEÁL MÁ JEDNOSTRANNÚ JEDNOTKU

BLANKA KOLIBIAROVÁ, Bratislava

V práci [1] skúmal Vorobjev štruktúru pologrúp, ktorých každý ľavý ideál má jednotku. V predloženej práci zaoberáme sa pologrupami, ktorých každý ľavý ideál má ľavú (pravú) jednotku. Ukážeme, že v týchto pologrupách každý ľavý ideál musí mať obojstrannú jednotku, t. j. že sú to pologrupy typu študovaného Vorobjevom. Okrem viet o štruktúre týchto pologrúp dokážeme vetu o konštrukcii takýchto pologrúp.

Budeme hovoriť, že pologrupa je:

1. typu A, ak každý jej ľavý ideál L má práve jednu pravú jednotku e (t. j. $ae = a$ pre každé $a \in L$),

2. typu B, ak každý jej ľavý ideál L má práve jednu ľavú jednotku e (t. j. $ea = a$ pre každé $a \in L$).

Znakom $(x)_L$ označme ľavý hlavný ideál v $S : (x)_L = Sx \cup \{x\}$. Je to najmenší ľavý ideál obsahujúci prvok x.

Lemma 1. *Idempotent e ľubovolnej pologrupy S je pravou jednotkou v ľavom ideále $(e)_L = Se$. Ak S je typu B, je e aj ľavou jednotkou toho ideálu.*

Dôkaz. Prvé tvrdenie je zrejmé. Ak S je typu B, má ľavý ideál $(e)_L$ ľavú jednotku e'. Potom $e' = se$, kde $s \in S$. Z toho $e' = se = see = e'e$. Ale e' bola v $(e)_L$ ľavá jednotka, teda $e'e = e$. Dostávame $e = e'$.

Lemma 2. *Ľavé ideály pologrupy S typu A sú vzťahom inklúzie usporiadané do reťazca. Pritom každá množina ľavých ideálov má najväčší prvok.*

Dôkaz. Nech L_1, L_2 sú ľavé ideály v S s pravými jednotkami e_1, e_2. Nech $L = L_1 \cup L_2$ má pravú jednotku e. Potom buď $e \in L_1$, teda $e = e_1$, buď $e \in L_2$, teda $e = e_2$. Nech $e = e_1$; potom pre $x \in L_2$ platí $x = xe = xe_1 \in L_1$, teda $L_2 \subset L_1$. V prípade $e = e_2$ dostávame podobne $L_1 \subset L_2$.

Teraz ukážeme, že každý rastúci reťazec ľavých ideálov má najväčší prvok.

Naprv ukážeme, ak dva ľavé ideály L_1, L_2 v S majú tú istú pravú jednotku e, potom $L_1 = L_2$. — Nech napr. $L_1 \subset L_2$. Pretože L_1 je ľavý ideál a $e \in L_1$, musí $L_2 = L_2e \subset L_1$, z čoho $L_1 = L_2$.

Uvažujme teraz rastúci reťazec ľavých ideálov. Súčet všetkých ideálov reťazca je zrejme ľavý ideál, má podľa predpokladu pravú jednotku e. Tá však je prvkom súčtu, teda je prvkom nejakého ideálu z reťazca a je v tom ideáli pravou jednotkou. Podľa predchádzajúceho sa teda súčet ideálov rovná nejakému prvku reťazca, teda reťazec má najväčší prvok.

Označme množinu idempotentov v S znakom $I(S)$.

Lemma 3. *Nech S je pologrupa typu A (typu B). Nech $e_1, e_2 \in I(S)$. Potom platí buď $e_1e_2 = e_2e_1 = e_1$, buď $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$.*

Dôkaz. a) Nech S je typu A. Podľa lemmy 1 je e_i pravou jednotkou v ľavom ideáli $L_i = Se_i$ $(i = 1, 2)$. Podľa lemmy 2 je buď $L_1 \subset L_2$, buď $L_2 \subset L_1$. — Nech $L_1 \subset L_2$. Pretože e_2 je pravá jednotka v L_2, je $e_1e_2 = e_1$. Ďalej je zrejme $e_2e_1 \in L_1$; e_2e_1 je pravá jednotka v L_1. Nech totiž $x \in L_1$, potom $x(e_2e_1) = (xe_2)\, e_1 = xe_1 = x$. Ale pretože v L_1 je práve jedna pravá jednotka e_1, je $e_2e_1 = e_1$. — V prípade $L_2 \subset L_1$ tak isto ukážeme, že $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$.

b) Nech S je typu B. Uvažujme ľavý ideál v S tvaru $L = (e_1)_L \cup (e_2)_L$. Pretože S je typu B, má L ľavú jednotku e; pre ňu platí: buď $e \in (e_1)_L$, buď $e \in (e_2)_L$. — Nech $e \in (e_1)_L$. Pretože podľa lemmy 1 má $(e_1)_L$ ľavú jednotku e_1, musí $e = e_1$. To značí, že v L platí $e_1e_2 = e_2$.

Treba ešte ukázať, že $e_2e_1 = e_2$. Platí $(e_2e_1)(e_2e_1) = e_2(e_1e_2)\, e_1 = e_2e_1$, teda e_2e_1 je idempotent. Pritom $e_2e_1 \in (e_1)_L$. Označme $e_2e_1 = e_1'$. Uvažujme ľavý ideál $L' = (e_1')_L \cup (e_2)_L$. e_1' je v L' ľavou jednotkou, pretože (použijeme to, že e_1 je ľavá jednotka v L) pre $y \in (e_2)_L$ platí $e_1'y = (e_2e_1)\, y = e_2(e_1y) = e_2y = y$ a pre $y \in (e_1')_L$ je $e_1'y = y$ podľa lemmy 1. Ale v L' je ľavou jednotkou aj e_2, pretože pre $x \in (e_1')_L$ je $e_2x = e_2(e_1'x) = e_2(e_2e_1)\, x = e_2e_1x = e_1'x = x$. Pretože v L' je práve jedna ľavá jednotka, musí $e_2 = e_1'$, to značí $e_2e_1 = e_2$, *q. e. d.*

V prípade, že $e \in (e_2)_L$ dostávame podobne $e_2e_1 = e_1e_2 = e_1$.

Zaveďme v $I(S)$ reláciu $\leqq$ takto:

Definícia 1. *Budeme hovoriť, že $e_1 \leqq e_2$ vtedy a len vtedy, keď $e_1e_2 = e_1$.*

Lemma 4. *Množina $I(S)$ v pologrupe typu A alebo B je vzhľadom na reláciu danú definíciou 1 usporiadaná (reťazec). Pritom každá podmnožina množiny $I(S)$ má najväčší prvok.*

Dôkaz. Tvrdenie o reťazci vyplýva z lemmy 3.

Majme množinu idempotentov $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Nech L je súčet ľavých ideálov $(e_\gamma)_L = Se_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$, ktorých pravé (ľavé)[1] jednotky sú e_γ. Potom L je ľavý ideál s pravou (ľavou) jednotkou e, teda $e_\gamma e = e_\gamma$, $(ee_\gamma = e_\gamma)$, čiže $e_\gamma \leqq e$ pre všetky $\gamma \in \Gamma$. Pritom e patrí do uvažovanej množiny idempotentov, je totiž prvkom niektorého ideálu $(e_\gamma)_L$. Teda e je najväčší prvok v uvažovanej množine idempotentov.

Dôsledok. Pologrupa, ktorej každý prvok je idempotentný a ktorej každý ľavý ideál má pravú (ľavú) jednotku, je polosväz. Tento polosväz je reťazcom, ktorého každá podmnožina má najväčší prvok.

---

[1] Tu a v ďalšom výrok v zátvorke vzťahuje sa na pologrupy typu B, výrok pred zátvorkou na pologrupy typu A.

Lemma 5. *V pologrupe S typu A (typu B) platí $(x)_L = Sx$.*

Dôkaz. a) Nech S je typu A. Nech e je pravá jednotka v $(x)_L$. Potom existuje $s \in S$ také, že $e = sx$, teda $x = xe = x(sx) = (xs)\, x \in Sx$. Teda $(x)_L = Sx$.

b) Pre pologrupu typu B je tvrdenie zrejmé.

Lemma 6. *V pologrupe S typu A (typu B) platí pre ľavý ideál L s pravou (ľavou) jednotkou e vzťah $L = Se$ $(= (e)_L)$. (T. j. každý ľavý ideál je hlavný, vytvorený svojou pravou (ľavou) jednotkou.)*

Dôkaz. a) Nech pologrupa S je typu A. Potom $L = Le \subset Se \subset L$. Teda $L = Se$.

b) Nech pologrupa S je typu B. Najprv dokážeme, ak $(x)_L$ má ľavú jednotku e, platí $(x)_L = (e)_L$.

Zrejme $(e)_L \subset (x)_L$.

Ďalej je $e \in (x)_L$, teda $e = sx$ pre isté $s \in S$. Ukážeme, že $e \in (s)_L$; nech $(s)_L$ má ľavú jednotku e'. Potom podľa lemmy 4 buď $e' \leqq e$, buď $e \leqq e'$. Nech $e' \leqq e$. Platí $s = e's$. Potom zo vzťahu $e = sx$ vyplýva $e = (e's)\, x = e'(sx) = e'e$, teda $e \leqq e'$, takže $e = e'$. Potom však $e \in (s)_L$. Nech $e \leqq e'$. Potom zrejme $e = ee' \in (s)_L$. Dostávame teda: $e = s's$ pre isté $s' \in S$.

Platí $x = ex$, teda $x = (s's)\, x = s'(sx) = s'e$, čiže $x \in (e)_L$, teda $(x)_L \subset (e)_L$.

Úhrnom dostávame $(x)_L = (e)_L$.

Nech L je ľavý ideál v S s ľavou jednotkou e. Teda $(e)_L \subset L$. Ale pre každý prvok $x \in L$ platí $(x)_L = (e)_L$, teda každý prvok $x \in L$ sa dá písať v tvare $x = se$ pre $s \in S$. Teda $L \subset (e)_L$.

Úhrnom dostávame $L = (e)_L$.

Veta 1. *Každá pologrupa typu B je pologrupou typu A.*

Dôkaz vyplýva z lemmy 6 a 1.

Vzhľadom na vetu 1 nám v ďalšom stačí vyšetrovať pologrupy typu A. Všade v ďalšom S značí pologrupu tohoto typu.

Lemma 7. *Množina $I(S)$ s reláciou $\leqq$ je usporiadaná množina (reťazec), izomorfná s množinou ľavých ideálov, usporiadaných množinovou inklúziou. Idempotentu e odpovedá v tomto izomorfizme ľavý ideál $(e)_L$.*

Dôkaz. Nech I je množina všetkých ľavých ideálov. Že množiny $I(S)$ a I s príslušnými reláciami sú usporiadané, vyplýva z lemmy 4 a 2. — Nech φ je zobrazenie, ktoré každému prvku $e \in I(S)$ priraďuje ľavý ideál $(e)_L$. Podľa lemmy 6 φ zobrazuje $I(S)$ na I. Ak $e_1 \neq e_2$, je $(e_1)_L \neq (e_2)_L$ (ináč by ideál $(e_1)_L$ mal dve rôzne pravé jednotky e_1, e_2), teda zobrazenie φ je prosté. Ak $e_1 \leqq e_2$, je $e_1 = e_1e_2$, teda $(e_1)_L \subset (e_2)_L$. Z toho vyplýva tvrdenie.

Definícia 2. *Množinu prvkov vytvárajúcich tenže ľavý hlavný ideál nazveme ľavou triedou (znak F_L). Ľavú triedu prvkov vytvárajúcich ideál $(x)_L$ označíme $F_L(x)$.*

Označme v ďalšom symbolom $\bigcup_{e_i \leqq e} F_L(e_i)$ súčet tých F_L tried $F_L(e_i)$, pre ktoré platí $e_i \leqq e$.

Poznámka 1. Každá F_L-(spojník) trieda obsahuje len jeden idempotent. Ak totiž idempotenty e, e' patria do tej istej F_L-triedy, platí $(e)_L = (e')_L$, teda vzhľadom na lemmu 7 $e = e'$.

Lemma 8. *V pologrupe S platí $(e)_L = \bigcup_{e_i \leqq e} F_L(e_i)$.*

Dôkaz. Zrejme ak $e_i \in (e)_L$, tak $F_L(e_i) \subset (e_i)_L \subset (e)_L$. Teda pre $e_i \leqq e$ platí $F_L(e_i) \subset (e)_L$.

Obrátene, nech $x \in (e)_L$. Podľa lemmy 6 platí $(x)_L = (e_i)_L$ pre nejaký idempotent e_i, takže $x \in F_L(e_i)$. Pretože $(e_i)_L = (x)_L \subset (e)_L$, je podľa lemmy 7 $e_i \leqq e$.

Lemma 9. *Nech v S sú F_L-triedy podpologrupy. Nech L je ľavý ideál v S. Potom každý ľavý ideál L' v L je ľavým ideálom v S.*

Dôkaz. Nech $x \in L'$, $x \in F_L(e)$. Pretože $ex \in F_L(e)$, pre isté $s \in S$ je $e = sex$. Ale $se \in L$, teda $e \in L'$, t. j. L' má pravú jednotku, označme ju e'. Podľa lemmy 8 je $SL = S(Le') = (SL)e'\ Le' = L'$.

Dôsledok. Nech L je ľavý ideál v pologrupe S. Potom ľavé triedy v L (ako pologrupe) sú tie isté ako v pologrupe S.

Lemma 10. *Nech L je ľavý hlavný ideál v S vytvorený prvkom x. Potom $L = Lx$.*

Dôkaz. Zrejme $Lx \subset L$.

Nech e je pravá jednotka ideálu L. Potom $e = sx$ pre isté $s \in S$. Teda $L = Le = Lsx \subset Lx$. —

Spolu $L = Lx$.

Lemma 11. *Nech $e' \leqq e$, $x \in F_L(e)$, $y \in F_L(e')$. Potom $xy \in F_L(e')$. Nech $F_L(e') \neq \{e'\}$, potom $yx \in F_L(e')$.*

Dôkaz. Označme $Se = L$, $Se' = L'$.

a) Ukážeme, že $xy \in F_L(e')$. Vzhľadom na lemmu 5 a 10 platí $Sxy = (Sx)y = Ly \subset L' = L'y \subset Ly$, z čoho $Sxy = L'$. Prvok xy vytvára ideál L', teda $xy \in F_L(e')$.

b) Treba ukázať, že $yx \in F_L(e')$.

1. Najprv ukážeme, že $yx \in \bigcup_{e' \leqq e_i \leqq e} F_L(e_i)$.

Platí $Syx = (Sy)x = L'x$. $L'x$ je ľavý ideál, nech jeho pravá jednotka je e^*. Platí teda $yx \in F_L(e^*)$. Je $(L'x)e' = L'(xe')$, $xe' \in F_L(e')$ (podľa a), teda $(L'x)e' = L'$. Ak by bolo $e^* \leqq e'$, $e^* \neq e'$, bol by prvok e' pravou jednotkou v $L'x$, teda $(L'x)e' = L'x$. Platilo by potom $L'x = L'$, čo je v spore s $e^* \neq e'$. Teda $e' \leqq e^*$. Pretože $L'x \subset L$, je $e^* \leqq e$. Z toho vyplýva, že $yx \in \bigcup_{e' \leqq e_i \leqq e} F_L(e_i)$. Ak $e = e'$, z a), b) vyplýva, že F_L-triedy sú podpologrupy v S.

2. $S' = \bigcup_{e' \leqq e_i \leqq e} F_L(e_i)$ je podľa a) a b) 1. podpologrupa v S. Podľa a) je ďalej

$F_L(e')$ ľavý ideál v S'. Ukážeme, že je minimálnym ľavým ideálom v S'. Ak totiž $L \subset F_L(e')$ je ľavý ideál v S', je $L \cup \bigcup_{e_\alpha < e'} F_L(e_\alpha)$ $(e_\alpha \neq e')$ — ako vyplýva z a) — ľavý ideál v S'. Z toho vyplýva podľa lemmy 8 a 9 $L = F_L(e')$, teda $F_L(e')$ je skutočne minimálny.

Vzhľadom na vetu 5, 1 z práce [2], pretože S' je pologrupa bez nuly $(F_L(e') \neq \{e'\})$ a má minimálny ľavý ideál, ktorý obsahuje idempotent, je súčet minimálnych ľavých ideálov rovný súčtu minimálnych pravých ideálov, pričom každý minimálny pravý ideál je vytvorený idempotentom. Teda $F_L(e')$ je minimálny pravý ideál v S' a platí $F_L(e') = e'S'$. To značí $yx \in F_L(e')$.

Dôsledok. F_L — triedy pologrupy S sú podpologrupy pologrupy S.

Veta 2. *Pologrupa typu A je súčtom disjunktných grúp, ktorými sú F_L triedy.*

Dôkaz. V prípade, že $F_L(e) = \{e\}$ je $F_L(e)$ grupa. Nech $F_L(e) \neq \{e\}$. Potom je $F_L(e)$ pologrupa bez nuly s pravou jednotkou e. Avšak z dôkazu lemmy 11 vyplýva z časti b) 2. dôkazu (zvolíme $S' = F_L(e')$, $e' = e$) $F_L(e) = eF_L(e)$, teda e je jednotka v $F_L(e)$. Nech $x \in F_L(e)$. Potom platí $L = (e)_L = (x)_L = Lx$ (lemma 10), teda existuje $s \in L$ také, že $e = sx$. Vzhľadom na lemmu 11 musí $s \in F_L(e)$. Vzhľadom na to, že $F_L(e)$ je minimálny pravý ideál, ukážeme podobne, že existuje také $s' \in F_L(e)$, že platí $e = xs'$. To značí, že $F_L(e)$ je grupa.

Lemma 12. *Nech S je pologrupa typu A, nech $x \in F_L(e)$, nech $e' \leqq e$, $F_L(e') = \{e'\}$. Potom $e'x = e'$.*

Dôkaz. Nech $e'x \in F_L(e^*)$; potom $e' \leqq e^*$. (Z dôkazu lemmy 11 vyplýva, že $e' \leqq e^* \leqq e$.) Pretože $F_L(e^*)$ je grupa, existuje $s \in F_L(e^*)$ také, že $se'x = e^*$. Ale podľa lemmy 11 je $se' = e'$. Teda $e^* = e'x$. Potom však $e' = e'e^* = e'e'x = e'x = e^*$. Teda $e'x = e'$.

Z lemmy 11 a 12 vyplýva:

Veta 3. *Rozklad pologrupy S typu A na ľavé F_L triedy je vytvárajúci. Príslušná faktorová pologrupa je izomorfná s pologrupou idempotentov $I(S)$.*

Veta 4. *V pologrupe S typu A má každý ľavý ideál jednotku.*

Dôkaz. Nech L je ľavý ideál v S, nech e je jeho pravá jednotka. Nech $x \in L$, $x \in F_L(e')$. Podľa vety 2 je $F_L(e')$ grupa s jednotkou e'. Teda $xe' = e'x = x$. Vzhľadom na lemmu 8 a 6 je $ee' = e'$. Teda $ex = e(e'x) = (ee')x = e'x = x$, q. e. d.

Z viet 1 a 4 vyplýva, že pologrupy typu A a B sú pologrupami typu, ktorý vyšetroval Vorobjev v práci [1]. Uveďme niektoré ďalšie vety o pologrupách tohto typu, ktoré vyplývajú z predošlých úvah a z ktorých niektoré (tvrdenie I—IV) sú (poprípade v inej formulácii) obsiahnuté aj v práci [1].

I. Nutná a postačujúca podmienka, aby pologrupa S bola typu A alebo B, je, aby boli splnené tieto dve podmienky:

1. S je súčtom disjunktných podpologrúp, ktoré sú grupami,

2. idempotenty v S tvoria podpologrupu v S, ktorej každý ideál má jednotku. (Podľa dôsledku lemmy 4 je to reťazec, v ktorom každá podmnožina má najväčší prvok.)

Ľahko sa dá ukázať, že tvrdenie I je ekvivalentné s vetou 1 [1].

II. Každý jednostranný ideál v pologrupe typu A alebo B je súčasne obojstranným ideálom v S ([1] dôsledok 3).

III. Ak v pologrupe má každý ľavý ideál jednotku, má aj každý pravý ideál jednotku ([1] dôsledok 2).

IV. Nutná a postačujúca podmienka, aby v pologrupe S typu A alebo B bolo M ideálom, je, aby $M = \bigcup_{e_i \in N} G(e_i)$, pričom N je ideálom v pologrupe idempotentov.

Uvedieme teraz spôsob konštrukcie pologrupy, ktorej každý jednostranný ideál má jednotku. Platí tvrdenie:

V. Každá pologrupa S, v ktorej každý ľavý alebo každý pravý ideál má jednotku, sa dá vytvoriť takouto konštrukciou:

Zvoľme reťazec $J = \{e_\alpha\}$, v ktorom každá neprázdna podmnožina má najväčší prvok. Nech $e_\beta e_\alpha = e_\alpha e_\beta = e_\alpha$, vtedy a len vtedy, keď v J platí $e_\alpha \leqq e_\beta$. Množina J s touto operáciou je pologrupa. Každému prvku $e_\alpha \in J$ priraďme grupu $G(e_\alpha)$ s jednotkou e_α. Ku každej dvojici e_i, e_k, kde $e_i e_k = e_k$, priraďme homomorfné zobrazenie grupy $G(e_i)$ do $G(e_k)$ (označme ho φ_k^i). Pritom nech φ_i^i je identické zobrazenie $G(e_i)$ na seba. Žiadajme, aby platilo pre všetky homomorfizmy $\varphi_l^i \varphi_i^k = \varphi_l^k$. (Také priradenia φ_k^i vždy existujú, stačí napr. položiť pre $i \neq k$ $\varphi_k^i(x) = e_k$). Nech prvky všetkých grúp $G(e_\alpha)$ tvoria množinu S. Definujme na S násobenie takto: nech $x \in G(e_i)$, $y \in G(e_k)$, $e_i e_k = e_k$. Potom $xy = (\varphi_k^i x)(\varphi_k^k y)$, $yx = (\varphi_k^k y)(\varphi_k^i x)$.

Dôkaz. Ľahko sa ukáže, že množina S s uvedenou operáciou násobenia je pologrupa. Každý ľavý (pravý, obojstranný) ideál v S má zrejme tvar $M = \bigcup_{e_i \leqq e} G(e_i)$ pre isté $e \in J$, pričom e je zrejme jednotka v M (nech $x \in M$, $x \in G(e)$, potom sa dá ľahko zistiť, že $G(e) \subset M$). Teda v pologrupe S má každý ľavý (pravý, objstranný) ideál jednotku.

Ešte dokážeme, že sa každá pologrupa S, v ktorej každý ľavý (každý pravý) ideál má jednotku, dá zostrojiť uvedeným spôsobom.

Pre uvažovanú pologrupu S platí vlastnosť I. Nech $x \in G(e_i)$, $y \in G(e_k)$ a nech $e_i e_k = e_k$. Potom je napr. zobrazenie $x \to e_k x$ homomorfným zobrazením grupy $G(e_i)$ do $G(e_k)$ (platí $e_k x \in G(e_k)$, pozri lemmu 11 a 12). Označme ho φ_k^i; nech φ_k^k je identické zobrazenie $G(e_k)$ na $G(e_k)$. Potom však $xy = e_k(xy) = (e_k x) y = (\varphi_k^i x)(\varphi_k^k y)$, $yx = (ye_k) x = y(e_k x) = (\varphi_k^k y)(\varphi_k^i x)$. Ďalej nech $e_j \leqq e_k \leqq e_i$ a nech $x \in G(e_i)$. Potom $\varphi_j^k \varphi_k^i x = \varphi_j^k e_k x = e_j e_k x = e_j x = \varphi_j^i x$.

Tým je dôkaz ukončený.

LITERATÚRA

[1] Воробьев Н., Об ассоциативных системах всякий левий идеал которых имеет единицу, Вест. ленингр. гос. ист. (1955) 89—94.

[2] Schwarz Š., On the structure of simple semigroups without zero, Czech. Math. Journ. Vol. I (76), (1951), 41—53.

Došlo 19. 8. 1959.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

О ПОЛУГРУППАХ, ВСЯКИЙ ЛЕВЫЙ ИДЕАЛ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ОДНОСТОРОНЮЮ ЕДИНИЦУ

БЛАНКА КОЛИБИАРОВА

Выводы

В работе [1] рассматривал Воробьев структуру полугрупп, всякий левый идеал которых имеет единицу. В настоящей работе изучаются полугруппы, всякий левый идеал которых имеет левую (правую) единицу. Показывается, что в полугруппах этого типа левые идеалы являются главными и что они образуют (в упорядочении по теоретико-множественному включению) цепь, изоморфную цепи левых (правых) единиц левых идеалов (при этом, для левых (правых) единиц e, e', $e \leqq e'$ означает, что $ee' = e$). Наконец показывается, что F-классы (множетсва элементов порождающих один и тот же главный идеал) являются группами, следовательно в рассматриваемых полугруппах всякий левый идеал имеет единицу. Имеют место теоремы (S означает полугруппу):

I. Всякий левый идеал полугруппы S имеет левую (нравую) единицу тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. S есть объединение непересекающихся частичных полугрупп, которые являются группами.

2. Идемпотенты в S образуют частичную полугруппу, всякий идеал которой имеет единицу.

II. Пусть S полугруппа рассматриваемого типа. Всякий односторонний идеал в S является двусторонним идеалом и есть соединением групп, единицы которых образуют идеал в полугруппе идемпотентов.

V. Всякую полугруппу S, всякий левый (правый) идеал которой имеет левую (правую) единицу, можно построить слудующим образом: Возьмем цепь $J = \{e_\alpha\}$ всякое непустое подмножество которой имеет наибольший элемент. Пусть $e_\beta e_\alpha = e_\alpha e_\beta = e_\alpha$ тогда и только тогда, когда в J имеет место $e_\alpha \leqq e_\beta$. Всякому элементу $e \in J$ поставим в соответствие группу $G(e)$ с единицей e. Всякой паре $e_i, e_k \in J$, где $e_i e_k = e_k$ поставим в соответствие гомоморфное отображение $G(e_i)$ в $G(e_k)$ (обозначим ее через φ_k^i). При этом пусть φ_i^i — тождественное отображение группы $G(e_i)$ на себя и пусть далее для всяких φ_i^i, φ_i^k имеет место $\varphi_i^i \varphi_i^k = \varphi_i^k$ (такие гомоморфизмы всегда существуют, например, если положить $\varphi_k^i x = e_k$ для $i \neq k$.) Пусть S — теоретико-множественное соединение всех групп $G(e_\alpha), e_\alpha \in J$. Определим на S умножение следующим образом: Пусть $x \in G(e_i)$, $y \in G(e_k)$, $e_i e_k = e_k$. Тогда $xy = (\varphi_i^i y)(\varphi_k^k x)$, $yx = (\varphi_k^k y)(\varphi_k^i x)$.

ÜBER HALBGRUPPEN, DEREN JEDES LINKSIDEAL EIN EINSEITIGES EINSELEMENT HAT

BLANKA KOLIBIAROVÁ

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] untersuchte Vorobjev die Struktur der Halbgruppen, deren jedes Linksideal ein Einselement hat. In der vorliegenden Arbeit werden Halbgruppen, deren jedes Linksideal ein linksseitiges (rechtsseitiges) Einselement besitzt, behandelt.

Es wird gezeigt, daß in derartigen Halbgruppen alle Linksideale Linkshauptideale sind und (angeordnet vermöge der mengentheoretischen Inklusion) eine Kette (totalgeordnete Menge) bilden, die der Kette der Linksseitigen (rechtsseitigen) Einselemente der Linksideale isomorph ist (dabei bedeutet $e \leqq e'$ für linksseitige (rechtsseitige) Einselemente e, e', daß $ee' = e$ gilt). Endlich wird gezeigt, daß F-Klassen d. h. die Mengen derjenigen Elemente, die ein und dasselbe Linkshauptideal erzeugen) Gruppen sind, folglich hat in betrachteten Halbgruppen jedes Linksideal ein Einselement. Es gelten die Sätze (S bedeutet dabei eine Halbgruppe):

I. Jedes Linksideal von S hat linksseitiges (rechtsseitiges) Einselement genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: 1. S ist eine Vereinigung von elementenfremden Teilhalbgruppen, die Gruppen sind. 2. Die Idempotente in S bilden eine Teilhalbgruppe, deren jedes Ideal ein Einselement hat.

II. Sei S eine Halbgruppe von behandelten Typus. Jedes einseitiges Ideal von S ist auch zweiseitiges Ideal und ist eine Vereinigung von Gruppen, deren Einselemente ein Ideal der Halbgruppe von Idempotente bilden.

V. Jede Halbgruppe S, deren jedes Linsideal Rechtsideal) ein linksseitiges (rechtsseitiges) Einselement besitzt, kann in der folgenden Weise konstruiert werden: Wir wählen eine Kette (totalgeordnete Menge) $J = \{e_\alpha\}$, deren jede nicht leere Teilmenge ein maximales Element besitzt. Sei $e_\beta e_\alpha = e_\alpha e_\beta = e_\alpha$ genau dann, wenn in J $e_\alpha \leqq e_\beta$ gilt. Jedem Element $e \in J$ ordnen wir eine Gruppe $G(e)$ mit Einselement e zu. Jedem Paar e_i, $e_k \in J$ mit $e_i e_k = e_k$ ordnen wir eine homomorphe Abbildung von $G(e_i)$ in $G(e_k)$ zu (wir bezeichnen es mit φ_k^i). Dabei sei φ_i^i die identische Abbildung von $G(e_i)$ auf sich selbst und ferner für jede φ_i^i, φ_i^k sei es $\varphi_i^i \varphi_i^k = \varphi_i^k$. (Derartige Homomorphismen existieren, es genügt $\varphi_k^i x = e_k$ für $k \neq i$ erklären.) Sei nun S die mengentheoretische Vereinigung von Gruppen $G(e_\alpha)$, $e_\alpha \in J$. Wir erklären eine Multiplikation in S wie folgt: Seien $x \in G(e_i)$, $y \in G(e_k)$, $e_i e_k = e_k$. Dann $xy = (\varphi_k^i x)(\varphi_k^k y)$, $yx = (\varphi_k^k y)(\varphi_k^i x)$.