MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK X ČÍSLO 1

O JISTÉM ZOBECNĚNÍ SANSONOVY VĚTY O NEOSCILACI INTEGRÁLŮ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

V práci je zobecněna Sansonova postačující podmínka pro to, aby každý integrál diferenciální rovnice $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0$ měl v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše dva nulové body.

V práci [1] uvádí Sansone následující větu:

Jsou-li v diferenciální rovnici

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \omega(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

$A'(x)$ a $\omega(x)$ *funkce spojité v intervalu* $\langle a, b\rangle$, $A(x) \leq 0$, $\omega(x) \leq 0$ *nebo* $\omega(x) \geq 0$, *při čemž není v žádném částečném intervalu* $\omega(x) \equiv 0$, $|A(x)| \geq \int_a^x |\omega(t)|\, dt$, *pak každý integrál diferenciální rovnice* (1) *má v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva nulové body eventuálně splývající.*

Důkaz se opírá o Mammanovu větu [2]:

Nutná a postačující podmínka pro to, aby levá strana diferenciální rovnice (1) *byla rozložitelná v symbolický součin tří lineárních diferenciálních operátorů, tj. aby každý integrál diferenciální rovnice* (1) *měl v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva nulové body eventuálně splývající, jest, aby integrály diferenciální rovnice* (1) *a diferenciální rovnice adjungované* $y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) - \omega(x)]\, y = 0$, *které mají dvojnásobný nulový bod v* a, *neměly v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *žádný další nulový bod.*

Důkaz věty, kterou uvedu, opírá se také o Mammanovu větu.

Věta. *Nechť* $A'(x)$ *a* $\omega(x)$ *jsou funkce spojité v intervalu* $\langle a, b\rangle$ {*uvažovaný interval může být též tvaru* $\langle a, \infty)$} *a*

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a, x)} \left| \int_\xi^x \omega(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{2(x-a)^2} \quad \text{pro } x \in (a, b). \tag{2}$$

Pak má každý integrál diferenciální rovnice (1) *v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *nejvýše dva jednoduché nulové body nebo jeden dvojnásobný.*

Důkaz. Podle Mammanovy věty stačí ukázat, že integrál $y(x)$ diferenciální rovnice

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + \varepsilon\omega(x)]\, y = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{3}$$

který splňuje v čísle a počáteční podmínky

$$y(a) = y'(a) = 0, \qquad y''(a) \neq 0, \tag{4}$$

nemá v intervalu $\langle a, b\rangle$ žádný další nulový bod.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y''(a) > 0$.

Násobíme-li rovnici (3) $y(x)$ a integrujeme od a do x, obdržíme vzhledem ke (4)

$$y(x)\, y''(x) - \frac{1}{2}\, y'^2(x) + A(x)\, y^2(x) = -\varepsilon \int_a^x \omega(t)\, y^2(t)\, dt. \tag{5}$$

Protože jest $y''(a) > 0$, jest $y''(x) > 0$ v jistém okolí bodu a zprava, a $y(x)$ je tam konvexní. Ukážeme, že $y(x)$ je konvexní v celém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Předpokládejme, že tomu tak není a označme x_1 infimum všech x, pro něž $y''(x) \leq 0$. Číslo x_1 leží uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ a $y''(x_1) = 0$. Položíme-li v (5) $x = x_1$, obdržíme

$$\frac{1}{2}\, y'^2(x_1) = A(x_1)\, y^2(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\, y^2(t)\, dt. \tag{6}$$

Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a, x_1)$ takové, že $y(x_1) - y(a) = (x_1 - a)\, y'(\xi)$, tj.

$$y'(\xi) = \frac{y(x_1)}{x_1 - a}. \tag{7}$$

Protože je $y''(x) > 0$ pro $x \in (a, x_1)$, je $y'(x)$ v tomto intervalu rostoucí, a tedy podle (7) $y'(x_1) > \dfrac{y(x_1)}{x_1 - a}$. Užitím tohoto odhadu dostaneme z (6)

$$\frac{1}{2}\, \frac{y^2(x_1)}{(x_1 - a)^2} < \frac{1}{2}\, y'^2(x_1) = A(x_1)\, y^2(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\, y^2(t)\, dt,$$

tedy

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \varepsilon \int_a^{x_1} \omega(t)\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt. \tag{8}$$

Funkce $\psi(t) = \dfrac{y(t)}{y(x_1)}$ jest v intervalu (a, x_1) rostoucí a $\psi(a) = 0$, $\psi(x_1) = 1$, takže podle druhé věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a, x_1)$ takové, že

$$\int_a^{x_1} \omega(t)\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt = \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt.$$

Vztah (8) se tedy redukuje na nerovnost

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \varepsilon \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt;$$

odtud však plyne

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \sup_{\xi \in (a, x_1)} \varepsilon \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt,$$

čili

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \sup_{\xi \in (a, x_1)} \left| \int_\xi^{x_1} \omega(t)\, dt \right|,$$

což je ve sporu s předpokladem. Má tedy $y(x)$ v bodě a dvojnásobný nulový bod a jest v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ konvexní, takže nemá v tomto intervalu žádný další nulový bod a věta je dokázána.

Poznámka. Jestliže $\omega(x)$ nemění v intervalu (a, b) znaménko, jest

$$\sup_{\xi \in (a, x)} \left| \int_\xi^x \omega(t)\, dt \right| = \int_a^x |\, \omega(t)\, |\, dt$$

a předpoklad (2) se dá nahradit předpokladem

$$\frac{1}{2} \geq A(x)\, (x - a)^2 + \int_a^x (t - a)^2\, |\, \omega(t)\, |\, dt. \tag{9}$$

Vskutku, v intervalu (a, x_1) je graf funkce $y(x)$ pod úsečkou $\eta(x) = \dfrac{y(x_1)}{x_1 - a}(x - a)$, $x \in (a, x_1)$, takže jest pro každé x tohoto intervalu

$$y(x) < \eta(x). \tag{10}$$

Nerovnost (8) můžeme nyní vzhledem k tomu, že $\omega(x)$ nemění v intervalu $\langle a, b\rangle$ znaménko, psát ve tvaru

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \int_a^{x_1} |\, \omega(t)\, |\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt.$$

Podle (10) jest

$$\int_a^{x_1} |\, \omega(t)\, |\, \frac{y^2(t)}{y^2(x_1)}\, dt < \int_a^{x_1} |\, \omega(t)\, |\, \frac{(t - a)^2}{(x_1 - a)^2}\, dt,$$

takže

$$\frac{1}{2(x_1 - a)^2} < A(x_1) + \int_a^{x_1} |\, \omega(t)\, |\, \frac{(t - a)^2}{(x_1 - a)^2}\, dt,$$

a to je ve sporu s nerovností (9).

Je-li například $I = \langle a, \infty)$, $a > 0$, $A(x) \equiv 0$, $\omega(x) = kx^s$, je nerovnost (2) splněna jen pro $\omega(x) \equiv 0$. Podle (9) však k tomu, aby každý integrál diferenciální rovnice $y''' + kx^s y = 0$ měl v intervalu I nejvýše dva nulové body, stačí předpokládat $s < -3$ a $|k| \leq \dfrac{|s+1|\,|s+2|\,|s+3|}{4a^{s+3}}$.

Vskutku

$$A(x)(x-a)^2 + \int_a^x (t-a)^2 |\omega(t)| \,\mathrm{d}t = |k| \int_a^x (t^{2+s} - 2at^{1+s} + a^2 t^s) \,\mathrm{d}t = = |k| \{F(x) - F(a)\},$$

kde

$$F(x) = \frac{x^{s+3}}{s+3} - 2a \frac{x^{s+2}}{s+2} + a^2 \frac{x^{s+1}}{s+1}.$$

Protože

$$F'(x) = x^s(x-a)^2 > 0 \quad \text{pro} \quad x > a \quad \text{a} \quad F(a) = \frac{2a^{s+3}}{(s+1)(s+2)(s+3)} < 0,$$

jest $F(x)$ záporná pro všechna x, neboť konverguje s rostoucím x k nule. Pro všechna $x \geq a$ platí tedy nerovnost

$$|k| \{F(x) - F(a)\} \leq |k| \frac{2a^{s+3}}{|s+1|\,|s+2|\,|s+3|} \leq \frac{1}{2},$$

takže předpoklad (9) je splněn.

LITERATURA

[1] Sansone G., Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale, Revista, ser. A, 6 (1947), 195–253.

[2] Mammana G., Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), 186–231.

Došlo 14. 7. 1959.

Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty university v Brně

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ САНСОНЕ О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0$$

МИЛОШ РАБ

Выводы

В настоящей работе обобщается достаточное условие Дж. Сансоне для того, чтобы решения дифференциального уравнения третьего порядка

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

не колеблялись.

Доказывается: Пусть $A'(x)$ и $\omega(x)$ непрерывные функции в интервале $\langle a, b\rangle$ $[\langle a, \infty)]$ и пусть

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a,b)} \left| \int_\xi^x \omega(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2(x-a)^2} \quad \text{для} \quad x \in (a, b). \tag{2}$$

Потом всякое решение дифференциального уравнения (1) имеет в интервале $\langle a, b\rangle$ больше всего два простых корня или один двойной корень.

Если функция $\omega(x)$ в интервале $\langle a, b\rangle$ не меняет знака, можно условие (2) заменить следующим:

$$\frac{1}{2} \geqq A(x)(x-a)^2 + \int_a^x (t-a)^2 |\omega(t)| \,\mathrm{d}t.$$

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG EINES SATZES VON SANSONE ÜBER NICHTOSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0$$

MILOŠ RÁB

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine hinreichende Bedingung von G. Sansone für die Nichtoszillation der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + \omega(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

verallgemeinert.

Es wird bewiesen:

Seien $A'(x)$ und $\omega(x)$ zwei im Intervall $\langle a, b\rangle$, $\{\langle a, \infty)\}$ stetige Funktionen und

$$A(x) + \sup_{\xi \in (a,x)} \left| \int_\xi^x \omega(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2(x-a)^2} \quad \text{für} \quad x \in (a, b). \tag{2}$$

Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung (1) im Interval $\langle a, b\rangle$ **höchstens zwei** einfache Nullstellen oder eine zweifache Nullstelle.

Wenn die Funktion $\omega(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, kann man die Voraussetzung (2) durch folgendes ersetzen:

$$\frac{1}{2} \geq A(x)(x-a)^2 + \int_a^x (t-a)^2 \,|\, \omega(t) \,|\, dt.$$