MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, IX, 4 — 1959

KONVEXNÉ REŤAZCE V ČIASTOČNE USPORIADANÝCH GRUPÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

Úvod. Cieľom tejto poznámky je prehĺbenie jedného výsledku z práce [2]. V nej bola dokázaná táto veta:

(A) Nech R je maximálny a konvexný reťazec vo sväzovo usporiadanej grupe G, obsahujúci jednotkový prvok tejto grupy. Potom R je priamy faktor v G.

Zároveň bola v práci [2] vyslovená otázka, či tvrdenie (A) platí aj za všeobecnejšieho predpokladu, keď G je čiastočne usporiadaná grupa s jedinou komponentou. V tejto poznámke dokážeme, že odpoveď na položenú otázku je záporná. Ďalej dokážeme, že ak reťazec R čiastočne usporiadanej grupy G s jedinou komponentou splňuje predpoklady z vety (A) a ak naviac splňuje istú dodatočnú podmienku [ktorú označujeme ako podmienku f)], platí pre R tvrdenie vety (A). Podmienka f) sa nedá „zlepšiť": je nutnou a postačujúcou k tomu, aby pre R platilo tvrdenie z vety (A).

1. Pojmy a označenia. Používame terminológiu ako v [1] a čiastočne ako v práci [3]. Pripomeňme hlavne nasledujúce pojmy:

Množinu G nazývame čiastočne usporiadanou grupou s jedinou komponentou, ak sú splnené podmienky a)—d):

a) G je grupa (grupovú operáciu v G označujeme — aj v nekomutatívnom prípade — znakom $+$ a jednotkový prvok symbolom 0),

b) G je čiastočne usporiadaná množina (vzťah čiastočného usporiadania v G označujeme $\leqq$),

c) ak $a, b, x, y \in G$, potom $x \leqq y$ vtedy a len vtedy, keď $a + x + b \leqq \leqq a + y + b$,

d) ak $x \in G$, existuje $y \in G$ tak, že $x \leqq y$, $0 \leqq y$. (Ak G splňuje len podmienky a), b), c), hovoríme, že G je čiastočne usporiadaná grupa.)

Vzhľadom na podmienky a), b), c) porov. napr. [1], kap. 14. Pojem komponenty pre čiastočne usporiadané grupy zaviedla E. P. Šimbireva v [3]; čiastočne usporiadaná grupa s jedinou komponentou sa v terminológii [1] (a niektorých iných prác) nazýva tiež „directed".

Nech je vo zmysle teórie grúp grupa G [1] priamym súčinom svojich podgrúp A, B (porov. napr. [4], str. 106) a nech pre $z_i = a_i + b_i$, $z_i \in G$, $a_i \in A$, $b_i \in B$ ($i = 1, 2$) platí $z_1 \leqq z_2$ vtedy a len vtedy, keď $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$. Potom hovoríme, že č. u. grupa G je priamym súčinom svojich č. u. podgrúp A, B a píšeme $G = AB$. Č. u. grupy A, B sú priame faktory v G. (Porov. [3], str. 153, resp. [5], ods. 2.)

Podmnožina $R \subset G$ je reťazec, ak pre $x, y \in R$ platí alebo $x \leqq y$ alebo $y \leqq x$. Reťazec R je maximálny, ak nie je vlastnou podmnožinou žiadneho reťazca $R' \subset G$. Množina $M \subset G$ je konvexná, ak zo vzťahov $u, v \in M$, $x \in G$, $u < x < v$ vyplýva $x \in M$.

1) Výraz „grupa G", resp. „č. u. množina G" budeme používať vtedy, ak zdôrazňujeme, že si v príslušnej úvahe všímame len „grupové vlastnosti", resp. len „vlastnosti čiastočného usporiadania" pre G.

2. Rozklad č. u. množiny s najmenším prvkom na priamy súčin. Nech je (v celom tomto odseku) S č. u. množina s najmenším prvkom 0. Nech $X, Y \subset S$. Predpokladajme, že platí:

e) ak $x \in X$, $y \in Y$, existuje v S prvok $x \cup y$ (najmenšie horné ohraničenie prvkov x, y); každý prvok $z \in S$ sa dá vyjadriť jediným spôsobom v tvare $z = x \cup y$, $x \in X$, $y \in Y$; ak $z_i = x_i \cup y_i$, $z_i \in S$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$, $i = 1, 2$, potom $z_1 \leqq z_2$ vtedy a len vtedy, keď $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$.

Za týchto predpokladov hovoríme, že S je priamym súčinom č. u. množín X, Y a píšeme $S \simeq XY$.

Podľa [5] (ods. 13 a 14) sa táto definícia len formálne líši od definície, vyslovenej v [1], kap. II.

2,1. *Nech $S \simeq XY$, $x \in X$, $y \in Y$. Potom $x \cap y = 0$.*[2])

Dôkaz. Podľa e) existuje $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tak, že $0 = x_0 \cup y_0$. Z toho vyplýva $x_0 = 0 = y_0$, $0 \in X$, $0 \in Y$. Nech $z_1 \in S$, $z_1 = x_1 \cup y_1$, $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$, $z_1 \leqq x$, $z_1 \leqq y$. Keďže $x = x \cup 0$, $y = 0 \cup y$, musí byť podľa e) $x_1 \leqq 0$, $y_1 \leqq 0$, teda $z_1 = 0$. Tým je dokázaná rovnosť $x \cap y = 0$.

2,2. *Nech $S \simeq XY$, $z \in S$, nech pre každé $x \in X$ platí $x \cap z = 0$. Potom $z \in Y$.*

Dôkaz. Podľa e) dá sa prvok z vyjadriť v tvare $z = x_1 \cup y_1$, $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$. Ak by bolo $x_1 > 0$, nemohlo by platiť $x_1 \cap z = 0$. Teda $x_1 = 0$, $z = y_1 \in Y$.

Z 2,1 a 2,2 vyplýva:

2,3. *Nech $S \simeq XY$. Potom Y je množina všetkých prvkov $y \in S$, pre ktoré platí: pre každé $x \in X$ je $x \cap y = 0$.*

Poznámky. 1. Z 2,3 vyplýva: ak $S \simeq XY$, $S \simeq XZ$, potom $Y = Z$. 2. Definíciu priameho rozkladu pomocou vlastnosti e) by sme mohli vhodným spôsobom rozšíriť na č. u. systém bez najmenšieho prvku. (Porov. [5], ods. 16.) Dá sa dokázať, že v tomto prípade by nemuselo platiť tvrdenie, analogické ku 1.

2,4. *Nech G je č. u. grupa s jedinou komponentou, nech $G = AB$. Potom $G^+ \simeq A^+B^+$.*

2) Znakom $x \cap y$ označujeme najväčšie dolné ohraničenie prvkov x, y. Rovnicou $x \cap y = 0$ vyjadrujeme, že prvok $x \cap y$ v S existuje a že je tento prvok rovný prvku 0. Analogicky v ďalšom texte.

Dôkaz. Ak $z \in G^+$, $z = a_1 + b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, potom zo vzťahov $0 \leqq z$, $0 = 0 + 0$, $0 \in A$, $0 \in B$ a z definície priamého súčinu pre č. u. grupy vyplýva $0 \leqq a$, $0 \leqq b$. Ak ďalej pre vyšetrované z platí $z \leqq a$, $z \leqq b$, $a \in A$, $b \in B$, potom z predošlých nerovností a z rovníc $a = a + 0$, $b = 0 + b$ dostávame $a_1 \leqq 0$, $b_1 \leqq 0$, takže $z = 0$. Pre každé $a \in A^+$, $b \in B^+$ teda platí $a \cap b = 0$. Podľa [5], ods. 12 je pre každé $a \in A^+$, $b \in B^+$ $a + b = a \cup b$. Podľa definície priameho rozkladu pre č. u. grupy je teda splnená podmienka e), potrebná k platnosti vzťahu $G^+ \simeq A^+B^+$.

3. Príklad. E. P. Šimbireva ([3], str. 149) uvádza nasledujúci príklad č. u. grupy s jedinou komponentou (v súvislosti s otázkou, či pre č. u. grupy platí tvrdenie analogické s prvou vetou o izomorfizme abstraktných grúp): Nech G je množina všetkých dvojíc celých čísel. Pre $(x_i, y_i) \in G$, $i = 1, 2$ definujeme sčitovanie rovnicou

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

a čiastočné usporiadanie definujeme tak, že platí $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ vtedy a len vtedy, keď je $x_1 < x_2$, $y_1 \leqq y_2$.

[Ľahko sa zistí, že podmienky a), b), c) sú splnené. Ak $d \in G$, $d = (x, y)$, označme $x_1 = \max\{0, x\} + 1$, $y_1 = \max\{0, y\}$, $e = (x_1, y_1)$. Potom $0 < e$, $d < e$, takže je splnená tiež podmienka d).]

Množina A všetkých dvojíc tvaru $(x, 0)$, kde x je ľubovoľné celé číslo, je **reťazec** v G. Ľahko sa zistí, že reťazec A je konvexný. Keďže množina A nie je v G ani zhora ani zdola ohraničená, musí byť A maximálnym reťazcom v G.

Predpokladajme, že A je priamy faktor v G. Potom existuje $B \subset G$ tak, že $G = AB$. Podľa 2.4 je $G^+ \simeq A^+B^+$.

Nech m je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme o prvku $p = (1, m)$. Nech $a \in A^+$, $a = (n, 0)$, $n \geqq 1$. Prvky a, p sú neporovnateľné. Ak $z \in G^+$, $z = (n_1, m_1)$, $z < p$, $z < a$, musí byť $n_1 < 1$, $m_1 \leqq 0$, teda $z = (0, 0)$. V č. u. množine G^+ teda platí $a \cap p = (0, 0)$, takže podľa 2,3 $p \in B^+$.

Označme $a_0 = (1, 0)$, $b_0 = (1, 1)$. Keďže $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, podľa predpokladu a podľa e) existuje v G^+ prvok $a_0 \cup b_0 = c$. Ak m je ľubovoľné prirodzené číslo, platí $a_0 < (2, m)$; $b_0 < (2, m)$, takže $c \leqq (2, m)$. Prvok c nemôže byť tvaru $c = (2, m)$, keďže by potom pre prirodzené číslo $m_1 \neq m$ prvky c, $(2, m_1)$ boli neporovnateľné. Pre každé prirodzené číslo m musí teda byť $c < (2, m)$. Nech $c = (n_2, m_2)$. Musí byť $n_2 < 2$, a keďže $c \geqq a_0$, musí byť ďalej $n_2 = 1$. Ak $c = a_0$, dostávame spor proti $c \geqq b_0$. Z toho vyplýva $c > a_0$, takže $n_2 > 1$, čím sme opäť došli ku sporu. V č. u. systéme G^+ neexistuje prvok $a_0 \cup b_0$. Teda podľa e) A nie je priamy faktor v G.

Tým je dokázané, že odpoveď na otázku položenú v úvode je záporná.

Poznámka. Pri dôkaze predošlého tvrdenia by sme miesto vyššie opísanej č. u. grupy G z práce [3] mohli použiť tiež č. u. grupu, ktorú uvádza Ky Fan v práci [6]: nech H je množina všetkých dvojíc reálnych čísel (x, y) takých, že $x - y$ je racionálne číslo. Sčitovanie v H je definované obvyklým spôsobom (po súradniciach) a vzťah $(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2)$ považujeme za splnený, keď $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$. H je č. u. grupa s jedinou komponentou. Množina R všetkých prvkov tvaru $(x, 0)$, kde x je ľubovoľné reálne číslo, je maximálnym a konvexným reťazcom v H; ľahko sa zistí, že R nie je priamy faktor v H.

4. Podmienka f). Všade ďalej predpokladáme, že G je č. u. grupa s jedinou komponentou a že R je maximálny a konvexný reťazec v G, $0 \in R$. Uvažujme o nasledujúcej podmienke:

f) *ak* $z \in G^+$, $r \in R^+$, *existuje v* G *prvok* $z \cap r$.

Za predpokladu ako v f) musí byť $0 \leqq z \cap r \leqq r$, teda $z \cap r \in R$. Ak sú pritom prvky z, r neporovnateľné a ak $r' \in R$, $r' \geqq z \cap r (r' < z \cap r)$, platí zrejme $z \cap r' = z \cap r (z \cap r' = r')$. Ak je špeciálne pre niektoré $r \in R^+$, $r > 0$ splnený vzťah $r \cap z = 0$, potom pre každé $r' \in R^+$ platí $r' \cap z = 0$.

Dokážeme, že podmienka f) je postačujúcou na to, aby platilo tvrdenie vety (A).

5. Konštrukcia rozkladu na priamy súčin. V celom odseku predpokladáme, že R spĺňuje podmienku f).

Nech $z \in G^+$. Vyberme prvky $z_1, z_2 \in G$ takto: ak $z \in R$, položme $z_1 = z$. Ak $z \bar{\in} R$, potom (keďže R je maximálny reťazec) existuje prvok $r \in R$, neporovnateľný s prvkom z. V tomto prípade položíme $z_1 = z \cap r$. Podľa úvahy, urobenej v ods. 4, platí teda v oboch prípadoch

$$z_1 = \sup r (r \in R^+, r \leqq z). \tag{1}$$

Ďalej položme $z_2 = z - z_1$. (Porov. [2], ods. 9—10.)

Všade ďalej predpokladáme, že č. u. grupa G má viac ako jeden prvok. Potom G nemá najväčší prvok, teda ani R nemá najväčší prvok.

Vyberme $r \in R$, $r > z_1$. Označme $r - z_1 = r_1$; zrejme $r_1 \in R^+$. Zo vzťahu $r \cap z = z_1$ vyplýva $r_1 \cap z_2 = 0$. Keďže $r_1 > 0$, je podľa ods. 4

$$r \cap z_2 = 0 \text{ pre každé } r \in R^+. \tag{1'}$$

Nech Q je množina všetkých z_2, pričom z prebieha celú množinu G^+. Nech $r \in R^+$, $z_2 \in Q$. Podľa (1') a odseku 12 práce [5] existuje v G prvok $r \cup z_2$, pričom $r \cup z_2 = r + z_2 = z_2 + r$. Z rovnice $z = z_2 + z_1$ vyplýva teda rovnosť $z = z_1 \cup z_2 = z_1 + z_2$.

Predpokladajme, že súčasne platí $z = z_1' \cup z_2'$, $z_1' \in R^+$, $z_2' \in Q$. Potom je podľa (1') a odseku 12, [5] $z = z_1' + z_2'$. Keďže $z_2' \geqq 0$, je $z_1' \leqq z$, takže podľa (1) $z_1' \leqq z_1$. Podľa (1') je $z_1 \cap z_2' = 0$, teda podľa odseku 12, [5] v G^+ existuje prvok $z_1 \cup z_2'$; ľahko sa zistí, že musí byť $z_1 \cup z_2' = z_1' \cup z_2'$. Podľa (1') a odseku 12 [5] je potom $z_1 + z_2' = z_1' + z_2'$, $z_1 = z_1'$, z čoho vyplýva tiež $z_2 = z_2'$. Teda sa každý prvok $z \in G^+$ dá jednoznačne vyjadriť vo tvare $z = x \cup y$, $x \in R^+$, $y \in Q$.

Nech $z_i \in G^+$, $z_i = x_i \cup y_i$, $x_i \in R^+$, $y_i \in Q$, $i = 1, 2$. Ak je $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$, potom je zrejme $z_1 \leqq z_2$. Nech $z_1 \leqq z_2$. Pretože $x_1 \leqq z_1 \leqq z_2$, platí $x_1 + y_2 = x_1 \cup y_2 \leqq x_2 + y_2$, teda $x_1 \leqq x_2$. Podobne sa dokáže $y_1 \leqq y_2$.

Podľa podmienky e) z ods. 2 č. u. systém G^+ sa dá rozložiť na priamy súčin

$$G^+ \simeq R^+Q. \tag{2}$$

Podľa vety 3 [5] z toho vyplýva, že sa G dá rozložiť na priamy súčin $G = AB$, pričom $A^+ = R^+$, $B = Q$. Keďže G je č. u. grupa s jedinou komponentou, musí byť, ako sa ľahko zistí, tiež A, resp. B č. u. grupa s jedinou komponentou. Predpokladajme, že by v A existovali neporovnateľné prvky a_1, a_2. Potom by prvky $0, a_2 - a_1$ boli tiež neporovnateľné. Keďže A je č. u. grupa s jedinou komponentou, existuje prvok $a \in A$, $a \geqq 0$, $a \geqq a_2 - a_1$. Prvky $a, a - (a_2 - a_1)$ patria potom do A^+ a sú neporovnateľné. Tým sme došli ku sporu. Teda A je usporiadaná grupa.

Nech je $r \in R$. Ak $r \geqq 0$, potom $r \in A$. Nech $r < 0$. Potom $-r > 0$, takže podľa (2) dá sa prvok $-r$ vyjadriť vo tvare

$$-r = a \cup b,\ a \in A^+,\ b \in B^+. \tag{3}$$

Z (3) vyplýva (keďže zobrazenie $x \to -x$, $x \in G$ určuje duálny izomorfizmus na č. u. systéme G)

$$r = (-a) \cap (-b).$$

Ak $b = 0$, potom $r = -a$, $r \in A$. Predpokladajme, že by platilo $b > 0$. Vyberme ľubovoľný prvok $r_1 \in R$, $r_1 > 0$. Potom $r_1 \in A^+$, takže podľa 2,4 a 2,3 $r_1 \cap b = 0$. Z toho vyplýva, že prvky r_1, b sú neporovnateľné, takže tiež prvky $r_1 - b$, 0 sú neporovnateľné. Zároveň je $r_1 > r_1 - b > -b \geqq r$, a keďže $r_1, r \in R$, na základe konvexnosti reťazca R musí byť $r_1 - b \in R$. Prvky 0, $r_1 - b$ by potom boli porovnateľné, čím sme došli ku sporu. Z toho vyplýva, že musí byť $b = 0$, $r \in A$. Je teda $R \subset A$. Keďže A je reťazec, dostávame z maximálnosti reťazca R rovnosť $R = A$.

6. **Veta.** *Nech G je č. u. grupa s jedinou komponentou. Nech R je maximálny a konvexný reťazec v G, $0 \in R$. Podmienka f) je nutnou a postačujúcou na to, aby R bol priamy faktor v G.*

Dôkaz. Ak platí f), potom je podľa ods. 5 R priamy faktor v G. Predpokladajme teraz, že R je priamy faktor v G:

$$G = RB. \tag{4}$$

Nech $z \in G^+$, $r \in R^+$. Podľa (4) sa prvok z dá vyjadriť vo tvare

$$z = r_1 + b_1,\ r_1 \in R^+,\ b_1 \in B^+. \tag{5}$$

Zrejme je $r_1 \leqq z$. Ak je $r \leqq r_1$, potom $r \leqq z$, takže $r \cap z = r$. Nech je $r > r_1$. Z (5) a z rovnice $r = r + 0$ vyplýva podľa (4), že pre každý prvok $y \in G$, $y = r_2 + b_2$, $r_2 \in R$, $b_2 \in B$, pre ktorý platia nerovnosti $y \leqq r$, $y \leqq z$, musí platiť $r_2 \leqq r_1$, $b_2 \leqq 0$, takže $y \leqq r_1$. Z toho vyplýva $r \cap z = r_1$. V každom prípade teda existuje v G prvok $r \cap z$, takže platí f).

Poznámka. Predošlá veta sa dá zovšeobecniť analogicky ako bola v [2], ods. 17,1 zovšeobecnená veta (A).

LITERATÚRA

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948.

[2] Jakubík J., Konvexe Ketten in *l*-Gruppen, Čas. pěst. mat. 84 (1959), 53–63.

[3] Šimbireva E. P., K teorii častično usporjadočennych grupp, Matem. sbornik 20 (1947), 145–178.

[4] Kuroš A. G., *Teorija grupp*, Moskva 1953.

[5] Jakubík J., Priame rozklady čiastočne usporiadaných grúp, odoslané do Časopisu pro pěstování matematiky.

[6] Ky Fan, Partially ordered additive groups of continuous functions, Annals of Math. 51 (1950), 409–427.

Došlo dňa 25. 4. 1959.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysokej školy technickej
v Košiciach

ВЫПУКЛЫЕ ЦЕПИ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

ЯН ЯКУБИК

Выводы

В работе [2] доказано, что всякая максимальная и выпуклая в цепь в структурно упорядоченной группе G, содержащая элемент 0, является прямым сомножителем b G.

Пусть теперь G — однокомпонентная частично упорядоченная группа (в терминологии из [3]). Если $a, b \in G$ и если в G существует элемент inf.$\{a, b\}$, обозначим этот элемент $a \cap b$.

Обобщением цитированной теоремы является:

Теорема. Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G, $0 \in R$. R есть прямой сомножитель в G тогда и только тогда, если выполнено следующее условие:

f) если $r \in R$, $x \in G^+$, то в G существует элемент $r \cap x$.

На примерах доказывается, что не все однокомпонентные частично упорядоченные группы исполняют условие f).

KONVEXE KETTEN IN HALBGEORDNETEN GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK

Zusammenfassung

In der Arbeit [2] wurde bewiesen, daß jede maximale und konvexe Kette R in einer l-Gruppe G, welche das Element 0 enthält, ein direkter Faktor in G ist.

Es sei jetzt G eine halbgeordnete Gruppe, in welcher zu jedem Element $x \in G$ ein Element $y \in G$ vorhanden ist derart, daß $x \leq y$, $0 \leq y$. (D. h. G ist „directed" in der Terminologie von [1].) Wenn $a, b \in G$ und wenn in G das Element inf $\{a, b\}$ existiert, bezeichnen wir dieses Element $a \cap b$.

Eine Verallgemeinerung des oben angeführten Satzes ist:

Satz. *Es sei R eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. R ist direkter Faktor in G dann und nur dann, wen die folgende Bedingung f) erfüllt ist:*

f) Wenn $r \in R$, $x \in G^+$, dann gibt es in G das Element $x \cap r$.

An Beispielen zeigen wir, daß nicht jede halbgeordnete Gruppe (welche „directed" ist) die Bedingung f) erfüllt.

OPRAVA

V článku J. Krempaského: Koncentrácia voľných nosičov náboja v nehomogénnom polovodiči s jedným typom vodivosti (č. 1, str. 25) z pravej strany rovnice (3,2) omylom autora vypadol koeficient e/kT, ktorý potom chýba i v nasledujúcich vzťahoch. Výsledný vzťah (3,11) má správne znieť

$$\frac{n-n_0}{n_0} = \frac{a\varepsilon E_0}{2eN_0}$$

a vzťah (3,16)

$$\frac{\triangle R}{R_0} = \frac{a\varepsilon E_0}{eN_0} \cdot \frac{1-e^{-2al}}{1-e^{-la}} .$$

Autor.