O MNOŽINÁCH VZDIALENOSTÍ MNOŽÍN METRICKÉHO PRIESTORU

TIBOR NEUBRUNN a TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Úvod

Nech (X, ϱ) je metrický priestor, A, B nech sú množiny $A, B \subset X$. Množinu všetkých čísel $\varrho(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$ označíme znakom $D(A, B)$ a nazveme ju množinou vzdialeností množín A, B. Špeciálne, ak $A = B$, kladieme $D(A, B) = D(A)$. Množinu $D(A)$ nazývame množinou vzdialeností množiny A. Štúdium množín vzdialeností množín euklidovských priestorov viedlo k pozoruhodným výsledkom a problémom, ktoré presiahli pôvodný rámec problematiky. Základom tohto štúdia boli práce W. Sierpinského, H. Steinhausa, S. Ruziewicza a iných. Súhrnne o tejto problematike pojednáva monografia [1] S. Piccardovej.

Táto práca obsahuje náčrt hlavných výsledkov zo štúdia množín vzdialeností množín euklidovských priestorov, ďalej niektoré zovšeobecnenia známych výsledkov na ľubovoľné metrické priestory a konečne niektoré ďalšie vlastnosti množín vzdialeností množín metrických priestorov.

V ďalšom znakom E_n označujeme n-rozmerný euklidovský priestor, znakom (X, ϱ) metrický priestor X s metrikou ϱ.

§ 1. O mohutnosti množiny D(A)

V monografii [1] sa odvodzuje súvislosť mohutnosti množiny $D(A)$ s mohutnosťou množiny A. Ukazuje sa, že pre konečnú množinu $A \subset E_1$ platí ($\overline{\overline{M}}$ značí mohutnosť množiny M)

$$m \leq \overline{\overline{D(A)}} \leq \frac{m(m-1)}{2} + 1,$$

kde $m = \overline{\overline{A}}$. Pre nekonečnú množinu $A \subset E_n$, $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}$ sa ukazuje platnosť vzťahu: $\overline{\overline{D(A)}} = \mathfrak{n}$.

Z nasledujúcej vety dostaneme súvislosť mohutnosti množiny $D(A)$ s mohutnosťou množiny A pre $A \subset X$.

Veta 1,1. *Nech (X, ϱ) je metrický priestor $A, B \subset X$, A, B nech sú nekonečné množiny. Potom platí:*

$$\overline{\overline{D(A, B)}} \leq \overline{\overline{A \times B}} \leq \max(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}).$$

Dôkaz. Utvorme množinu $A \times B$. Množinu $A \times B$ rozdelíme na disjunktné triedy T_d takto: Do tej istej triedy T_d, $d \geq 0$ dáme všetky tie dvojice $[x, y] \in A \times B$, pre ktoré $\varrho(x, y) = d$. Zrejme je $T_d \neq 0$ vtedy a len vtedy, keď $d \in D(A, B)$. Nech S značí množinu všetkých neprázdnych tried T_d, $d \gtrsim 0$. Potom

$$\overline{\overline{D(A, B)}} = \overline{\overline{S}} \leqq \overline{\overline{A}} \,.\, \overline{\overline{B}} \leq \max(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}})$$

(pozri [2], str. 96, 217).

Dôsledok: Keď $A = B$ a $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{n}$ (A nekonečná), potom dostávame

$$\overline{\overline{D(A)}} \leqq \mathfrak{n}.$$

Poznámka 1. Rovnosť v predošlom vzťahu nemusí platiť. Nech napr. (X, ϱ) je Hilbertov priestor. Vezmime za A množinu $A = \{(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)\}$, teda množinu všetkých takých postupností, kde na k-tom mieste je jednotka a na ostatných miestach sú nuly ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Potom zrejme $D(A) = \{0, \sqrt{2}\}$ a teda $\overline{\overline{D(A)}} < \overline{\overline{A}}$.

2. Všeobecné vzťahy platné pre D(A)

Veta 2,1. *Nech (X, ϱ) je metrický priestor a nech pre $t \in T$ je $A_t \subset X$. Potom platí*

$$D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t) + \sum_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} D(A_t, A_{t'}).$$

Dôkaz. Číslo d je prvkom $D(\sum_{t \in T} A_t)$ vtedy a len vtedy, keď existujú prvky $x, y \in \sum_{t \in T} A_t$ tak, že $d = \varrho(x, y)$. Uvážme, že $x, y \in \sum_{t \in T} A_t$ vtedy a len vtedy, ak existujú $t, t' \in T$ tak, že $x \in A_t$, $y \in A_{t'}$. Teraz už stačí len nahliadnuť, že buď $t = t'$ alebo $t \neq t'$. V prvom prípade $d \in \sum_{t \in T} D(A_t)$, v druhom prípade $d \in \sum_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} D(A_t, A_{t'})$.

Existujú množinové systémy $A_t \subset X$, $t \in T$ také, že operácie D a Σ sú na nich zámenné, t. j.

$$D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t). \tag{a}$$

Dokážeme v tejto súvislosti túto vetu:

Veta 2,2. *Nutná podmienka pre to, aby pre systém množín $\{A_t\}$, $t \in T$ platilo $D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t)$ je, aby $\sup_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} d(A_t, A_{t'}) \leq \sup_{t \in T} d(A_t)$, kde $d(A_t, A_{t'})$ pre $t \neq t'$ je $\sup\{\varrho(x, y), x \in A_t, y \in A_{t'}\}$ a $d(A_t)$ je priemer množiny A_t.*

Dôkaz. Označme $p = \sup_{\substack{t \neq t \\ t, t' \in T}} d(A_t, A_{t'})$, $q = \sup_{t \in T} d(A_t)$. Nech $p, q < +\infty$.

Poznamenajme najprv, že rovnosť (a) je ekvivalentná so vzťahom

$$\sum_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} D(A_t, A_{t'}) \subset \sum_{t \in T} D(A_t) \,, \tag{b}$$

ako to okamžite vyplýva z vety 2,1.

Dôkaz urobíme nepriamo. Nech $p > q$, teda $\frac{p-q}{2} > 0$. Existujú $t_1, t_2 \in T$ tak, že $d(A_{t_1}, A_{t_2}) > p - \frac{p-q}{4}$. Ďalej existujú $\bar{x} \in A_{t_1}$, $\bar{y} \in A_{t_2}$ tak, že

$$\varrho(\bar{x}, \bar{y}) > d(A_{t_1}, A_{t_2}) - \frac{p-q}{4},$$

teda

$$\delta = (\bar{x}, \bar{y}) > d(A_{t_1}, A_{t_2}) - \frac{p-q}{4} > p - \frac{p-q}{2} = \frac{p+q}{2} > q. \tag{c}$$

Pretože $\varrho(\bar{x}, \bar{y}) = \varrho \in D(A_{t_1}, A_{t_2})$ existuje [podľa (b)] také $t_0 \in T$, že $\delta \in D(A_{t_0})$. Teda $\delta \leq d(A_{t_0}) \leq q$. Podľa (C) je $\delta > q$ a to je spor.

Pre $q = +\infty$ je veta zrejmá. Ak $p = +\infty$, ľahko sa zistí, že aj $q = +\infty$.

Poznámka 2. Podmienka uvedená vo vete 2,2 platí napr. pre systém množín $\{A_t\}$, $t \in T$, ktorý má nasledujúcu vlastnosť: K ľubovoľným dvom množinám $A_{t'}$, A_t, t', $t \in T$ existuje množina $A_{t''}$, $t'' \in T$ tak, že $A_{t''} \supset A_{t'}$, $A_{t''} \supset A_t$.

Teraz ukážeme postačujúcu podmienku pre zámenu D a Σ u istých systémov množín.

Veta 2,3. Nech $\{A_t\}$, $t \in T$ *je systém neprázdnych množín takých, že pre každé* $t \in T$ *je* $D(A_t)$ *interval* {*to je splnené napr. vtedy, ak* A_t *sú súvislé*}. *Potom k tomu, aby platilo*

$$D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t)$$

stačí, aby

$$\sup_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} d(A_t, A_{t'}) < \sup_{t \in T} d(A_t).$$

Dôkaz. Nech $p < q$ (označenie ako v predchádzajúcej vete). Nech $\delta \in \sum_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} D(A_t, A_{t'})$, potom $\delta \in D(A_{t_1}, A_{t_2})$, t_1, $t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, $\delta = \varrho(x, y)$, $x \in A_{t_1}$, $y \in A_{t_2}$, $\delta \leq p < q$. Z $\delta < q$ vyplýva existencia t_0, x_1, y_1, $t_0 \in T$; x_1, $y_1 \in A_{t_0}$, tak, že $\varrho(x_1, y_1) = \delta_1 > \delta$, $\delta_1 \in D(A_{t_0})$. Pretože $D(A_{t_0})$ je interval a $0 \in D(A_{t_0})$, je aj $\delta \in D(A_{t_0})$ a teda $\delta \in \sum_{t \in T} D(A_t)$.

Príklad. Ak $p = q$, veta nemusí platiť. Nech napr.

$$A_n = \langle 0, 1) \text{ pre } n = 0, 2, 4, 6, \ldots$$
$$A_n = (0, 1\rangle \text{ pre } n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Potom $p = q = 1$, zatiaľ čo $D(\sum_0^\infty A_n) = \langle 0, 1\rangle$ a $\sum_0^\infty D(A_n) = \langle 0, 1)$.

Nech $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_n,$$

potom ľahko nahliadneme, že $D(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n D(A_i)$. Toto nemusí platiť pre nekonečný systém množín. Nech napr.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\} \subset X$$

je (nekonečná) spočetná množina. Položme

$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

zrejme je

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots,\ \prod_{n=1}^\infty A_n = 0,$$

teda $D(\prod_{n=1}^\infty A_n) = 0$. Ale $0 \in D(A_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

takže $\prod_{n=1}^\infty D(A_n) \neq 0$.

V ďalšom ukážeme postačujúcu podmienku pre platnosť uvedeného vzťahu pre nekonečnú postupnosť množín.

Veta 2,4. *Nech* $A_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ *sú kompakty v* (X, ϱ), $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$

Potom platí:

$$D(\prod_{n=1}^\infty A_n) = \prod_{n=1}^\infty D(A_n).$$

Dôkaz. 1. Ukážeme, že $D(\prod_{n=1}^\infty A_n) \subset \prod_{n=1}^\infty D(A_n)$. Uvážme, že $\prod_{n=1}^\infty A_n \subset A_k$ pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$, odtiaľ ihneď vyplýva $D(\prod_{n=1}^\infty A_n) \subset \prod_{n=1}^\infty D(A_n)$.

2. Ukážeme, že $\prod_{n=1}^\infty D(A_n) \subset D(\prod_{n=1}^\infty A_n)$. Nech $d \in \prod_{n=1}^\infty D(A_n)$, potom $d = \varrho(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $x_n, y_n \in A_n$. Uvažujme postupnosti $\{x_n\}_1^\infty$ (1), $\{y_n\}_1^\infty$ (2). Všetky členy oboch postupností sú prvkami množiny A_1. Keďže A_1 je kompakt, existuje postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ vybraná z (1) tak, že $x_{n_k} \to x \in A_1$. Z postupnosti $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ vyberieme postupnosť $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$, tak, aby $y_{n_{k_l}} \to y \in A_1$. Uvážme, že $x_{n_{k_l}} \to x$. Je $d = \varrho(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$ a pre všetky dosť veľké l už $x_{n_{k_l}} \in A_m$,

$y_{n_{k_l}} \in A_m$. Z kompaktnosti A_m vyplýva, že $x, y \in A_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, teda $x, y \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ a keďže

$$d = \varrho(x, y) = \lim_{l\to\infty} \varrho(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}),$$

dostávame odtiaľ, že $d \in D(\prod_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Poznámka 3. Z prvej časti dôkazu je jasné, že pre ľubovoľný systém $\{A_t\}$, $t \in T$ množín z X platí:

$$D(\prod_t A_t) \subset \prod_t D(A_t).$$

§ 3. Množiny vzdialeností rôznych druhov množín

Je známe (pozri [1]), že množina $D(A)$ nemusí byť izolovaná, i keď A je izolovaná. Napr.

$$A = \left\{1, 1 + \frac{1}{2}, 2, 2 + \frac{1}{2^2}, \ldots, n, n + \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

$$\text{a } \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \right\} \subset D(A).$$

Ďalej sa dá ukázať (pozri [1]), že množina vzdialeností otvorenej množiny $G \subset E_n$ je množinou G_δ. Dôkaz tejto skutočnosti sa zakladá na možnosti vyjadriť G ako zjednotenie spočetného systému otvorených intervalov a na vete 2,1.

Označme v ďalšom znakom $d(M)$ priemer množiny M. Potom platí:

Veta 3,1. *Nech $A \subset X$. Potom $d(A) = d(D(A))$.*

Dôkaz. Pre ľubovoľné $x, y \in A$ je $\varrho(x, y) \leq d(A)$, teda pre každé $\delta \in D(A)$ je $\delta \leq d(A)$ a keďže $d(D(A)) = \sup_{\delta \in A(D)} \{\delta\}$, dostávame odtiaľ $d(D(A)) \leq d(A)$.

Naopak, ak $\delta < d(A)$, $\delta \in D(A)$, potom existujú $x, y \in A$, tak, že $\delta < \varrho(x, y)$. Keďže $\varrho(x, y) \in D(A)$, vyplýva odtiaľ vzťah $\delta \leq d(D(A))$ a teda $d(A) \leq \leq d(D(A))$.

Dôsledok. $D(A)$ je ohraničená vtedy a len vtedy, ak je ohraničená A.

Veta 3,2. *Nech A je kompakt v (X, ϱ). Potom $D(A)$ je kompakt.*

Dôkaz. Ohraničenosť $D(A)$ vyplýva z predošlej vety. Uzavretosť $D(A)$ dokážeme takto: Nech $d_n \in D(A)$, $d_n \to d$. Potom $d_n = \varrho(x_n, y_n)$, x_n, $y_n \in A$. Rovnako ako v dôkaze vety 2,4 nahliadneme, že existujú postupnosti $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ vybrané z $\{x_n\}_1^{\infty}$, resp. $\{y_n\}_1^{\infty}$ tak, že $x_{n_{k_l}} \to x \in A$, $y_{n_{k_l}} \to y \in A$, teda

$$d = \lim_{l\to\infty} (x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = \varrho(x, y) \in D(A).$$

Množina $D(A)$ môže byť hustá (pozri [1]) i vtedy, keď A neobsahuje žiadnu neprázdnu huste rozloženú podmnožinu. Nech napr. R je množina všetkých kladných racionálnych čísel,

$$R = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots\}.$$

Množina

$$A = \{r_1, r_1 + r_2, r_1 + r_2 + r_3, \ldots\}$$

zrejme neobsahuje žiadnu neprázdnu huste rozloženú podmnožinu (je to izolovaná množina) a predsa $D(A) = \{0\} + R$ je hustá v $\langle 0, +\infty)$.

Veta 3,3. *Nech $A \subset X$, A hustá v (X, ϱ). Potom $D(A)$ je hustá v $D(X)$.*

Dôkaz. Nech $d \in D(X)$, treba ukázať, že $d \in \overline{D(A)}$ ($\overline{D(A)}$ je uzáver $D(A)$ v $D(X)$). Keďže $d = \varrho(x, y)$, $x, y \in \bar{A} = X$, existujú postupnosti $\{x_n\}_1^{\infty}$, $\{y_n\}_1^{\infty}$ bodov z A tak, že $x_n \to x$, $y_n \to y$. Potom $d_n = \varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y) = d$; pritom $d_n \in D(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, teda $d \in \overline{D(A)}$.

Veta 3,4. *Nech $0 \neq A \subset X$, A súvislá množina. Potom $D(A)$ je interval s ľavým koncovým bodom 0.*[1])

Dôkaz. Pre každé $a \in A$ definujeme na množine A zobrazenie $f_a(x) = \varrho(x, a)$ do $\langle 0, +\infty)$. f_a je, ako ihneď vidieť, spojité zobrazenie A do $\langle 0, +\infty)$. Teda $f_a(A)$ je súvislá množina v $\langle 0, +\infty)$. Keďže $D(A) = \sum_{a\in A} f_a(A)$ a $0 \in \prod_{a\in A} f_a(A)$, je $D(A)$ neprázdna súvislá množina v $\langle 0, +\infty)$, teda $D(A)$ je interval obsahujúci bod 0, ktorý je zrejme jeho ľavým koncovým bodom.

Skúmajme teraz úplnosť priestoru. $D(X)$ ($D(X)$ chápeme ako podpriestor E_1). Ak (X, ϱ) nie je úplný, potom o úplnosti $D(X)$ nemožno nič určitého tvrdiť. Napr. ak X je množina všetkých racionálnych čísel, potom $D(X) = \langle 0, +\infty)$. X nie je úplný priestor. Ak X je množina všetkých iracionálnych čísel, potom $D(X) = \langle 0, +\infty)$ je úplný priestor.

Z úplnosti (X, ϱ) nevyplýva úplnosť $D(X)$. Nech napr. X je množina všetkých postupností

$$\bar{x}_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\},$$

$$\bar{x}_2 = \left\{0, 1 + \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots\right\}, \ldots$$

$$\bar{x}_n = \left\{0, 0, 0, \ldots, 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}, 0, \ldots\right\}, \ldots$$

Metrika $\varrho(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} = \{x_k\}_1^{\infty}$, $\bar{y} = \{y_k\}_1^{\infty}$ je definována takto:

$$\varrho(\bar{y}, \bar{x}) = \sup_{k=1,2,3,\ldots} |x_k - y_k|.$$

Zrejme je $\varrho(\bar{x}_i, \bar{y}_j) > 1$ pre $i \neq j$ a preto v (X, ϱ) sú cauchyovské postupnosti

[1]) Slovo interval môže značiť aj zvrhlý interval, t. j. jednobodovú množinu.

totožné s postupnosťami skoro stacionárnymi. Teda (X, ϱ) je úplný priestor. Ale

$$D(X) = \left\{0,\ 1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2},\ \ldots\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k},\ \ldots\right\}$$

nie je úplný $\left(\text{pretože neobsahuje } 2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\right)\right)$.

Definícia. *Množina $A \subset X$ sa nazýva monomorfná, ak neexistuje $A' \subset A$, $A' \neq A$ taká, že A' je izometrická s A.*

Teda ak A nie je monomorfná, potom existuje $A' \subset A$, $A' \neq A$ tak, že $D(A) = D(A')$. Naskytá sa táto prirodzená otázka: Ak A má tú vlastnosť, že pre nejakú množinu $A' \subset A$, $A' \neq A$ je $D(A) = D(A')$, možno potom tvrdiť, že A nie je monomorfná? Ľahko ukážeme, že to tak nie je. Nech napr. (X, ϱ) je priestor s triviálnou metrikou (t. j. $\varrho(x, y) = 0$ pre $x = y$, $\varrho(x, y) = 1$ pre $x \neq y$), $\overline{\overline{X}} \geqq 3$. Nech $A \subset X$, A nech je práve trojbodová. Vezmime $A' \subset A$, A' nech je dvojbodová. Potom $D(A) = D(A') = \{0, 1\}$ a pritom A, A' nie sú izometrické. Zrejme A nie je izometrická so žiadnou svojou pravou podmnožinou, teda A je monomorfná. Existuje teda monomorfná množina A, ktorá má tú vlastnosť, že obsahuje pravú podmnožinu $A' \subset A$ tak, že $D(A) = D(A')$.

Množina vzdialeností množiny $A \subset E_1$ majúcej kladnú Lebesguovu mieru obsahuje interval, ktorého ľavý koncový bod je 0. Tento výsledok je obsiahnutý v práci [2] H. Steinhausa. W. Sierpinski ukázal (pozri [3]), že $D(A)$ môže nebyť merateľná (L), i keď A je merateľná (L). Ak však $A \subset E_1$ i $D(A)$ sú merateľné (L) a $\mu(A) > 0$, je aj $\mu(D(A)) > 0$ podľa citovaného výsledku Steinhausovho.

Treba ešte poznamenať, že $D(A)$ môže mať kladnú mieru, i keď A má mieru 0. Príkladom takej množiny je Cantorovo diskontinuum C, pre ktoré $D(C) = \langle 0, 1\rangle$ (pozri [4]).

§ 4. Operácia D ako množinová funkcia

Tvorenie množiny vzdialeností $D(A)$ k množinám $A \subset X$ možno chápať ako množinovú funkciu definovanú na systéme 2^X, podmnožín metrického priestoru (X, ϱ), ktorých oborom hodnôt je systém podmnožín z $2^{\langle 0,\infty)}$. Táto množinová funkcia (ďalej len funkcia) sa dá charakterizovať spomedzi všetkých funkcií uvedeného typu niekoľkými jednoduchými vlastnosťami. Platí táto veta:

Veta 4,1. *Nech (X, ϱ) je metrický priestor. Existuje práve jedna funkcia F definovaná na 2^X s oborom hodnot v $2^{\langle 0,\infty)}$, ktorá má nasledujúce vlastnosti:*

(1) *Pre každé $\emptyset \neq A \in 2^X$ je $0 \in F(A)$. $F(\emptyset) = \emptyset$.*

(2) *Pre každé A, $B \in 2^X$; $A \subset B$ je $F(A) \subset F(B)$.*

(3) *Pre každé $A \in 2^X$ je $d(F(A)) = d(A)$.*

(4) *Ak $\{0, a\} \subset F(A)$ potom existuje aspoň jeden kompakt $K \subset A$ tak, že $F(K) = \{0, a\}$.*

(5) *Pre $\{x, y\} \in 2^X$ je $F(\{x, y\})$ uzavretá množina.*

Touto funkciou je práve funkcia D.

Dôkaz: Funkcia D skutočne uvedené vlastnosti má. Vlastnosť (3) plynie z vety 3,1 a ostatné vlastnosti sú zrejmé. Dokážeme, že je to jediná taká funkcia, t. j. ak pre nejakú funkciu F platí (1)—(5), potom $F(A) = D(A)$ pre $A \in 2^X$.

Teraz dokážeme rovnosť $D(A) = F(A)$. Nech $a \in D(A)$, potom $\varrho(x, y) = a$; $x, y \in A$. Keďže $\{x, y\} \subset A$, tak $F(\{x, y\}) \subset F(A)$ (podľa (2)). Podľa (5) je $F(\{x, y\})$ uzavretá a v dôsledku (3) je $d(F\{x, y\})) = d(\{x, y\}) = \varrho(x, y) = a$, teda $F(\{x, y\})$ je aj ohraničená v E_1, teda je to kompakt. Položme $x_1 = \inf F(\{x, y\})$ a $y_1 = \sup F(\{x, y\})$. Zrejme $x_1, y_1 \in F(\{x, y\})$ a $y_1 - x_1 = a$. Pretože $0 \in F(\{x, y\})$ je $x_1 = 0$ a teda $y_1 = a$, čiže $D(A) \subset F(A)$.

Pre prázdnu množinu A je opačná inklúzia zrejmá z (1). Nech množina A je neprázdna a nech $a \geqq 0$, $a \in F(A)$. Ak $a = 0$ potom $a \in D(A)$. Nech teda $a > 0$. Pretože $0 \in F(A)$ je $\{0, a\} \subset F(A)$. Podľa (4) existuje v A kompakt K tak, že $F(K) = \{0, a\}$. V dôsledku (3) je $d(K) = d(F(K)) = d(\{0, a\}) = a$ a preto v K existujú dva prvky x, y tak, že $\varrho(x, y) = a$. Teda $a \in D(A)$ a preto $F(A) \subset D(A)$.

Vlastnosti (1)—(5) nie sú nezávislé. Uviedli sme ich všetky len pre zjednodušenie dôkazu vety 4,1. Ukážeme, že vlastnosť (5) plynie z ostatných vlastností. Teda na to, aby sme charakterizovali funkciu D, vystačíme s vlastnosťami (1)—(4). Formulujme to v tejto vete:

Veta 4,2. *Nech $F(A)$ má vlastnosti (1)—(4). Potom má aj vlastnosť (5) dokonca v tomto zosilnenom tvare:*

(5') *Obraz dvojprvkovej množiny je dvojprvková množina. Vlastnosti (1)—(4) sú nezávislé.*

Dôkaz: Nech $\{x, y\} \subset X$, $x \neq y$. Pretože $F(\{x, y\})$ má kladný priemer, obsahuje okrem nuly aspoň jeden prvok x_1. Ukážeme, že $x_1 = d$ kde $d = \varrho(x, y)$ je priemer množiny $\{x, y\}$ (a teda aj množiny $F(\{x, y\})$. Ukážeme to tak, že dokážeme, že v množine $F(\{x, y\})$ sa nemôže nachádzať žiadny prvok x_2 splňujúci nerovnosť $0 < x_2 < d$. Keďže pre žiadne x_2 z $F(\{x, y\})$ neplatí $x_2 > d$ a keďže existencia prvku $x_1 \in F(\{x, y\})$ je zaručená, dokážeme tým, že $x_1 = d$. Súčasne tým dokážeme, že je to jediný prvok z $F(\{x, y\})$ rôzny od nuly.

Nech teda $0 < x_2 < d$, $x_2 \in F(\{x, y\})$, potom k množine $\{0, x_2\} \subset F(\{x, y\})$ existuje podľa (4) kompakt $K \subset \{x, y\}$ taký, že $F(K) = \{0, x_2\}$ teda $d(K) = d(F(K)) = d(\{0, x_2\}) = x_2$. To je spor, pretože v množine $\{x, y\}$ sú len dva kompakty s priemerom 0 a d.

Ostáva ešte dokázať nezávislosť vlastností (1)—(4). K tomu zostrojíme

4 príklady. Prvý bude ukazovať, že vlastnosť (1) nezávisí od ostatných troch vlastností a ďalšie príklady budú po rade ukazovať to isté pre ostatné vlastnosti.

Príklad 1. Funkciu $F(A)$ definujeme takto: Nech $c>0$.

$$F(A) = \{x : x = y + c,\ y \in D(A)\}.$$

Príklad 2.

$$F(A) = \begin{cases} \{0, d\} & \text{ak } A \text{ je neprázdny kompakt, } (d \text{ je priemer } A) \\ D(A) & \text{pre ostatné } A. \end{cases}$$

Príklad 3. Nech $k > 0$

$$F(A) = \left\{x : x = \frac{y}{k},\ y \in D(A)\right\}.$$

Príklad 4. Nech $F(A) = \langle 0, d\rangle$, kde $\langle 0, d\rangle$ je interval v E_1 ($d > 0$ je priemer množiny A). Nech $F(\emptyset) = \emptyset$, $F(\{a\}) = \{0\}$ pre jednobodovú množinu $\{a\}$.

Podrobnou diskusiou týchto jednoduchých príkladov sa nebudeme zaoberať.

V súvislosti s pojmom množiny druhej kategórie vynára sa tento problém: Ak (X, ϱ) je druhej kategórie v sebe, potom ešte $D(X)$ nemusí byť druhej kategórie. Stačí vziať za ϱ triviálnu metriku. Nech však je aj $D(X)$ druhej kategórie a nech $A \subset X$. Ak A je druhej kategórie v (X, ϱ), je potom nutne $D(A)$ druhej kategórie v $D(X)$?

K tomuto problému poznamenávame, že $D(X)$ môže byť druhej kategórie, i keď X nie je druhej kategórie v sebe. Napr. $X = C$, C, Cantorova množina. ($D(C) = \langle 0, 1\rangle$)

§ 5. Operácia D a Hausdorffova limita postupnosti množín

Vyšetrime ešte súvislosť operácie D s Hausdorffovou limitou postupnosti množín metrického priestoru.

Pre operáciu D a Hausdorffovu limitu platí zrejme tento vzťah: $D(\underline{\lim}\, A_n) \subset \underline{\lim}\, D(A_n)$, kde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť množín z X.

Ak má platiť pre nejakú postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ výrok:

$$\lim A_n = A \Rightarrow \lim D(A_n) = D(A),$$

potom podľa predošlého je nutné a stačí, aby

$$\overline{\lim}\, D(A_n) \subset D(A).$$

Nutnosť tejto podmienky je zrejmá. To, že je to podmienka postačujúca, plynie zo vzťahov:

$$D(\lim A_n) \subset \underline{\lim}\, D(A_n) \subset \overline{\lim}\, D(A_n) \subset D(\lim A_n).$$

Hovoríme, že operácia $D(A)$ množinová funkcia je spojitá na $2^{\times}$, ak platí výrok:

$$\lim A_n = A;\quad A_n, A \in 2^{\times} \Rightarrow D(A) = \lim D(A_n).$$

L. Mišík upozornil na tento problém:

1. Aká je nutná a postačujúca podmienka, ktorú má spĺňať priestor (X, ϱ), aby D bola spojitá na X.

2. Ako majú vyzerať postupnosti množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (v priestoroch, kde D obecne nie je spojitá), aby platila vyššie uvedené implikácia t. j. z $A_n \to A$ aby vyplývalo $D(A_n) \to D(A)$.

Otázku 1 rieši táto veta:

Veta 5,1. *Nech (X, ϱ) je metrický priestor. Funkcia $D(A)$ je spojitá na 2^X vtedy a len vtedy, ak X je konečná množina.*

Dôkaz: Nech X je konečná. Nech $A_n \subset X$, $(n = 1, 2, \ldots)$; $\lim A_n = A$. Skúmajme $\overline{\lim}\, D(A_n)$. Stačí dokázať, že $\overline{\lim}\, D(A_n) \subset D(A)$. Nech $d \in \lim D(A_n)$, potom $d \in D(A_{n_k})$, $(k = 1, 2, \ldots)$, teda

$$d = \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}),\ x_{n_k}, y_{n_k} \in A_{n_k}\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Pretože X je konečná množina, je $X \times X$ konečná. To znamená, že existujú vybrané postupnosti $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{y_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že

$$x_{n_{k_j}} = x_0,\ y_{n_{k_j}} = y_0 \text{ pre } j = 1, 2, \ldots$$

Teda $x_0 \in \overline{\lim}\, A_n = \lim A_n = A$, $y_0 \in A$, $\varrho(x_0, y_0) = d \in D(A)$.

Nech X je nekonečná množina. Vyberieme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pomocou tejto postupnosti zostrojíme postupnosť množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $A_n \subset A_{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $D(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$, $\prod_{n=1}^{\infty}(D(A_n) \neq \emptyset$. (Pozri príklad za vetou 2,3.)

Pretože $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} D(A_n) = \lim_{n\to\infty} D(A_n)$ je

$$D(\lim_{n\to\infty} A_n) \neq \lim_{n\to\infty} D(A_n).$$

K 2 uvedieme tieto postačujúce podmienky:

Veta 5,2. *Na to, aby pre postupnosť množín $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subset X$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ platilo $\lim D(A_n) = D(A)$, stačí, aby množiny $B_m = \sum_{n=m}^{\infty} A_n$ boli kompakty.*

Dôkaz: Stačí dokázať (podľa vyššie uvedenej poznámky), že $\overline{\lim}\, D(A_n) \subset D(A)$. Z vety 2,1 a 2,4 dostávame:

$$\overline{\lim}\, D(A_n) = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_n) \subset \prod_{m=1}^{\infty} D(\sum_{n=m}^{\infty} A_n) = D(\prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_n) = D(\overline{\lim A_n}) = D(A).$$

Veta 5,3. *K platnosti* $\lim A_n = A \Rightarrow \lim D(A_n) = D(A)$ *stačí, aby*

1° *Množina* $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} A_n}$ *bola kompaktná v* (X, ϱ),

2° $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dôkaz. Ak $d \in \overline{\lim}\, D(A_n)$, potom $d = \varrho(x_{n_k}, y_{n_k})$, $x_{n_k}, y_{n_k} \in A_{n_k}$. Existujú postupnosti $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_{k_l}} \to x$.

$$y_{n_{k_l}} \to y,\ x, y \in \overline{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} \text{ t. j. } x, y \in A, \text{ teda } d \in D(A).$$

LITERATÚRA

[1] Piccard S., *Sur les ensembles de distances, des ensembles de points d'un espace Euclidien*, Neuchatel 1939.

[2] Sierpiński W., *Lecons sur les nombres transfinis*, Paris 1950.

[3] Steinhaus H., Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, Fund. Math. I. (1920), 93–104.

[4] Sierpiński W., Sur l'ensembles de distances entre points d'un ensemble, Fund. Math. VII (1925), 144–148.

[5] Steinhaus H., Nowa vlasnosć mnogosći G. Cantora, Wektor (1917), 105–107.

Došlo dňa 10. 4. 1959.

Katedra matematiky Univerzity
Komenského v Bratislave

О МНОЖЕСТВАХ РАССТОЯНИЙ МНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

ТИБОР НЕУБРУНН И ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

В этой статьи автора дают обзор важнейших результатов касающихся расстояний множеств в Евклидовом пространстве. На другой стране дают обобщения некоторых результатов знакомых в пространствах Евклида, для произвольных метрических пространств и также некоторые новые результаты.

Пусть (X, ϱ) метрическое пространство. Пусть $A, B \subset X$. множество всех чисел $\varrho(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$ обозначим $D(A, B)$ и назовем множеством всех расстояний множеств A, B. Положим $D(A, A) = D(A)$ для $A \subset X$.

В первой части работы исследуется связь между мощностями множеств A и $D(A)$. Если A бесконечно и $\overline{\overline{A}} \leq n$ то $\overline{\overline{D(A)}} \leq n$.

Во второй части приведены некоторые общие формулы для $D(A)$ и дано необходимое (теорема 2,2) и достаточное условие (теорема 2,3) для перемены операций D и Σ.

Теорема 2,2. Необходимым условием для того чтобы система A_t, $t \in T$, $A_t \subset X$ удовлетворяла равенству

$$D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t) \tag{1}$$

является условие $\sup\limits_{t \neq t'} d(A_t, A_{t'}) \leq \sup d(A_t)$.

где $d(A_t, A_t') = \sup \{\varrho(x, y), x \in A_t, y \in A_t'\}$;
$t \neq t'$

$d(A_t)$ — диаметер множества A_t.

Теорема 2,3. Если $D(A_t)$, $(t \in T)$ является интервалом, то для выполнения (1) достаточно чтобы

$$\sup_{\substack{t \neq t' \\ t, t' \in T}} d(A_t, A_t') < \sup_{t \in T} d(A_t)$$

Аналогичная проблема решена для операций D и Π.

Теорема 2,4. Пусть A_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ компакты в (X, ϱ); $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ тогда $D(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) = \prod_{n=1}^{\infty} D(A_n)$

В третей части исследуются множества расстояний различных видов множеств метрического пространства.

Теорема 3,2. Если A компакт в (X, ϱ) то $D(A)$ компакт (в $\langle 0, +\infty)$).

Теорема 3,3. Если $A \subset X$, A плотно в (X, ϱ) то $D(A)$ плотно (в $\langle 0, +\infty)$)

Теорема 3,4. Если $\emptyset \neq A \subset X$, A связное множество, то $D(A)$ является интервалом левым концом которого есть нуль (слово интервал может обозначать тоже одноточенное множество).

На примере показывается что из полноты пространства (X, ϱ) не вытекает необходимо полнота $D(X)$.

В дальнейшем создается конструкция мономорфного множества $A \subset X$, которое содержит собственное подмножество $A' \subset A$ такое, что $D(A) = D(A')$.

В четвертой части исследуются свойства операции D как функции множества. (Отображение пространства 2^X в $2^{\langle 0, +\infty)}$. Показывается что D — как отображение F пространства 2^X в $2^{\langle 0, +\infty)}$ можно характеризировать следующими свойствами:

1° Для всякого A, $\emptyset \neq A \in 2^X$ имеет место $0 \in F(A)$. $F(\emptyset) = \emptyset$.
2° Для всяких двух A, B; A, $B \in 2^X$; $A \subset B$ имеет место $F(A) \subset F(B)$
3° Если $A \in 2^X$ то $d(F(A)) = d(A)$
4° Если $\{0, a\} \subset F(A)$ то существует хотя бы один компакт $K \subset A$ для которого $F(K) = \{0, a\}$.

В конце этой части автора предлагают следующий вопрос: Пусть (X, ϱ) метрическое пространство, пусть $D(X)$ множество второй категории в $\langle 0, +\infty)$. Если $A \subset X$, A второй категории в (X, ϱ), необходимо — ли также D(A) второй категории в $D(X)$?

В пятой части изучаются некоторые вопросы на которые предупредил Л. Мишик, касающиеся связи между операцией D и хаусдорфского предела последовательности множеств в метрическом пространстве.

Говорим, что D непрерывна в (X, ϱ) если для всякой последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. $A_n \subset X, \lim_{n\to\infty} A_n = A$, имеет место $\lim_{n\to\infty} D(A_n) = D(A)$

В этой части дано необходимое и достаточное условие для непрерывности D (конечность пространства (X, ϱ)) и также достаточные условия для того, чтобы для некоторой последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subset X$ $A_n \to A$, выполнилось (2) (теорема 5,2 и 5,3).

ON THE SETS OF DISTANCES OF THE SETS IN A METRICAL SPACE

TIBOR NEUBRUNN and TIBOR ŠALÁT

Summary

In this paper the authors give a review of some important results relating to the sets of the distances belonging to the sets of the Euclidean space, on the other hand they give some generalizations of this results for metrical spaces not necessary Euclidean and also some new results are given.

Let (X, ϱ) be a metrical space. Let A, $B \subset X$. Then we denote the set of all numbers $\varrho(x, y)$; $x \in A$, $y \in B$ by means of the sign $D(A, B)$ and we call it the set of all distances of the sets A, B. We put $D(A, A) = D(A)$ for $A \subset X$.

In the first part of the paper the relation of the cardinal number of the set A to the cardinal number of the set $D(A)$ is studied. If A is infinite and $\overline{\overline{A}} \leq n$ then $\overline{\overline{D(A)}} \leq n$.

In the second part some general formulas for $D(A)$ are given. The necessary (theorem 2,2) and the sufficient (theorem 2,3) conditions for the change of operations of D and H are introduced.

Theorem 2,2. The necessary condition for the validity of the relation

$$D(\sum_{t \in T} A_t) = \sum_{t \in T} D(A_t) \tag{1}$$

where $t \in T$, $A_t \subset X$ is the validity of the relation

$$\sup_{t \neq t'} d(A_t, A_{t'}) \leq \sup_{t \in T} d(A_t), \text{ where } d(A_t, A_{t'}) = \sup_{t \neq t'} \{\varrho(x, y);\ x \in A_t,\ y \in A_{t'}\}$$

$d(A_t)$ is the diameter of the set A_t.

Theorem 2,3. Let for every $t \in T$ is $D(A_t)$ an interval. Then a sufficient condition for the validity of (1) is

$$\sup_{t \neq t'} d(A_t, A_{t'}) < \sup_{t \in T} d(A_t)$$

Analogical problem for the operations D and Π is studied.

Theorem 2,4. Let A_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ are compacts in (X, ϱ), $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

Then $D(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) = \prod_{n=1}^{\infty} D(A_n)$

In the third part the sets of the distances of various kinds of the sets in a metrical space are studied.

Theorem 3,2. If A is a compact in (X, ϱ) then $D(A)$ is a compact (in $\langle 0 + \infty)$).

Theorem 3,3. If $A \subset X$, A is dense in (X, ϱ) then $D(A)$ is dense in $\langle 0, +\infty)$.

Theorem 3,4. If $\emptyset \neq A \subset X$, A is connect, then $D(A)$ is an interval with the left end-point zero. (The word interval may significate also a one-point set.)

An example is given showing that the completness of the space (X, ϱ) does not influence the completness of $D(X)$.

Further a construction of monomorfe set $A \subset X$ containing a proper set $A' \subset A$ such that $D(A) = D(A')$, is given.

In the fourth part are discussed the properties of the operation D as of a set function. (The mapping of the space 2^X into $\langle 0, +\infty)$. It is shown that D as a function of set F, which mapps 2^X into $\langle 0, +\infty)$ may be described by means of the following properties:

1° For every A, $\emptyset \neq A \in 2^X$ is $0 \in F(A)$. $F(\emptyset) = \emptyset$.
2° For every A, B; A, $B \in 2^X$; $A \subset B$ is $F(A) \subset F(B)$.
3° For every $A \in 2^X$ is $d(F(A) = d(A)$.
4° If $\{0, a\} \subset F(A)$ then there exits at least one compact $K \subset A$ such that $F(K) = \{0, a\}$.

At the end of this part the authors put this question: Let (X, ϱ) be a metrical space and $D(X)$ is a set of second cathegory in $\langle 0, +\infty)$. If $A \subset X$, A of second cathegory; is then necessary also $D(A)$ of second cathegory in $D(X)$?

In the fifth part are are discussed some questions suggested by L. Mišík. These questionts relate to the relation of operation and the limit of a sequence of the sets in the sense of Hausdorf.

We say that D is continuous in (X, ϱ), if for every sequence $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subset X$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ the relation

$$\lim_{n\to\infty} D(A_n) = D(A) \tag{2}$$

is valid.

In this part is given a necessary and sufficient condition for the continuity (finitness of the space (X, ϱ)) and further sufficient conditions for validity of (2) for a sequence of the sets $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $A_n \subset X$, $A_n \to A$ (theorems 5,2 and 5,3).