MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, IX, 4 – 1959

O ISTOM ZOBRAZENÍ KOMPLEXNEJ PROJEKTÍVNEJ ROVINY

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

B. A. Rozenfeľd [1] udáva jednu možnosť interpretácie komplexného projektívneho priestoru $P_n(\mathrm{i})$ tak, že k bodom tohto priestoru priraďuje priamky reálneho projektívneho priestoru P_{2n+1}. A. P. Norden [2] sa zaoberá touto interpretáciou pre $n = 1$. Cieľom tejto práce je odvodiť niektoré základné pojmy a vzťahy tejto interpretácie pre $n = 2$.

1. Pod komplexnou projektívnou rovinou $P_2(\mathrm{i})$ budeme rozumieť množinu všetkých usporiadaných trojíc čísel $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$[1]), kde aspoň jedno z reálnych čísel x_i je rôzne od nuly; pritom dve usporiadané trojice čísel $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$, $[\varrho(x_1 + x_2\mathrm{i}), \varrho(x_3 + x_4\mathrm{i}), \varrho(x_5 + x_6\mathrm{i})]$, kde $\varrho = \lambda + \mu\mathrm{i} \neq 0$, budeme považovať za ekvivalentné. Tým sme rozdelili množinu všetkých usporiadaných trojíc do tried. Každú triedu nazveme bodom roviny $P_2(\mathrm{i})$, každú usporiadanú trojicu čísel z tejto triedy nazveme predstaviteľkou tohto bodu a každým takýmto trom usporiadaným číslam budeme hovoriť súradnice toho bodu.

Nech bod X je určený predstaviteľkou $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$. Potom všetky ostatné predstaviteľky bodu X majú tvar $[\lambda x_1 - \mu x_2 + (\mu x_1 + \lambda x_2)\,\mathrm{i}, \lambda x_3 - \mu x_4 + (\mu x_3 + \lambda x_4)\,\mathrm{i}, \lambda x_5 - \mu x_6 + (\mu x_5 + \lambda x_6)\,\mathrm{i}]$. Ku každej takejto predstaviteľke možno priradiť (až na pomer $\lambda : \mu$) práve jeden bod reálneho projektívneho päťrozmerného priestoru P_5 o súradniciach $[\lambda x_1 - \mu x_2, \mu x_1 + \lambda x_2, \lambda x_3 - \mu x_4, \mu x_3 + \lambda x_4, \lambda x_5 - \mu x_6, \mu x_5 + \lambda x_6]$. Všetky tieto body vyplnia zrejme priamku X_1 prechádzajúcu bodmi $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$[2]) a $X'(-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5)$. Každý bod $X \in P_2(\mathrm{i})$ definuje takýmto spôsobom v priestore P_5 involutórnu kolineáciu I o rovniciach

$$x_1' = -x_2,\ x_2' = x_1,\ x_3' = -x_4,\ x_4' = x_3,\ x_5' = -x_6,\ x_6' = x_5,$$

ktorá nemá žiadne samodružné body a spojnice odpovedajúcich si bodov sú obrazmi bodov roviny $P_2(\mathrm{i})$. Ľahko nahliadneme, že toto zobrazenie bodov roviny $P_2(\mathrm{i})$ do uvedených spojníc v P_5 je jednojednoznačné. Spojniciam typu

---

[1]) Niekedy budeme používať i takéto označenie $X_1 = x_1 + x_2\mathrm{i}$, $X_2 = x_3 + x_4\mathrm{i}$, $X_3 = x_5 + x_6\mathrm{i}$.

[2]) Pre bod $X \in P_2(\mathrm{i})$ a $X \in P_5$ budeme používať to isté označenie, pokiaľ nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu.

XX' v P_5 budeme hovoriť k-priamky. Z vlastností zobrazenia ihneď vyplýva, že dve rôzne k-priamky nemajú nijaký spoločný bod.

Pod priamkou $p \in P_2(i)$ prechádzajúcou bodmi A, B, kde $A \neq B$ budeme rozumieť množinu bodov X, ktoré možno vyjadriť takto: $X = \lambda A + \mu B$, kde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$. Súradnice príslušného bodu X v P_5 sú potom

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2, & x_4 &= \lambda_1 a_4 + \lambda_2 a_3 + \mu_1 b_4 + \mu_2 b_3, \\ x_2 &= \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + \mu_1 b_2 + \mu_2 b_1, & x_5 &= \lambda_1 a_5 - \lambda_2 a_6 + \mu_1 b_5 - \mu_2 b_6, \\ x_3 &= \lambda_1 a_3 - \lambda_2 a_4 + \mu_1 b_3 - \mu_2 b_4, & x_6 &= \lambda_1 a_6 + \lambda_2 a_5 + \mu_1 b_6 + \mu_2 b_5, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $[a_1 + a_2 i,\ a_3 + a_4 i,\ a_5 + a_6 i]$ a $[b_1 + b_2 i,\ b_3 + b_4 i,\ b_5 + b_6 i]$ sú predstaviteľky bodov A a B. Ak $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ prebiehajú všetky reálne čísla, potom všetky body X vytvoria trojrozmerný priestor ${}^pP_3$. Na to stačí ukázať, že matica

$$\begin{pmatrix} a_1, & -a_2, & b_1, & -b_2 \\ a_2, & a_1, & b_2, & b_1 \\ a_3, & -a_4, & b_3, & -b_4 \\ a_4, & a_3, & b_4, & b_3 \\ a_5, & -a_6, & b_5, & -b_6 \\ a_6, & a_5, & b_6, & b_5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

má hodnosť 4. Priamym výpočtom sa presvedčíme, že determinant z prvých štyroch riadkov tejto matice má hodnotu $(a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_2b_3 + a_1b_4 - a_3b_2 - a_4b_1)^2$. Z predpokladu $A \neq B$ vyplýva, že matica

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 i, & a_3 + a_4 i, & a_5 + a_6 i \\ b_1 + b_2 i, & b_3 + b_4 i, & b_5 + b_6 i \end{pmatrix}$$

má hodnosť 2. Potom determinant z prvých dvoch stĺpcov musí byť rôzny od nuly

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 i, & a_3 + a_4 i \\ b_1 + b_2 i, & b_3 + b_4 i \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2 + (a_2b_3 + a_1b_4 - a_3b_2 - a_4b_1)\, i \neq 0.$$

Z toho už naše tvrdenie vyplýva priamo.

Trojrozmerné priestory, ktoré sú obrazmi priamok roviny $P_2(i)$, budeme nazývať k-priestormi.

Ak zvolíme v k-priestore ${}^pP_3$ za základné body bázy body A, A', B, B' (sú lineárne nezávislé, pretože matica (2) má hodnosť 4), potom bod $X \in {}^pP_3$ má súradnice $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ a bod $X'(-\lambda_2, \lambda_1, -\mu_2, \mu_1)$. Vidíme, že involúcia I indukuje v priestore ${}^pP_3$ involúciu I' o rovniciach $\lambda_1' = -\lambda_2, \lambda_2' = \lambda_1, \mu_1' = -\mu_2, \mu_2' = \mu_1$. Spojnice odpovedajúcich si bodov v involúcii I' sú k-priamky a tvoria v ${}^pP_3$ kongruenciu navzájom mimobežných priamok.

Veta 1. *Dva rôzne k-priestory majú spoločnú práve jednu k-priamku.*

Dôkaz. Dva rôzne trojrozmerné priestory v P_5 majú vždy aspoň jednu priamku spoločnú. Nech X je bod spoločný dvom k-priestorom. Potom obidva tieto k-priestory musia obsahovať aj bod X' a teda celú k-priamku XX'.

Okrem tejto k-priamky nemôžu mať spoločný žiaden bod, pretože by museli mať spoločnú ďalšiu k-priamku a potom by museli splynúť.

Z tejto vety priamo vyplýva, že dve rôzne priamky v $P_2(i)$ majú spoločný práve jeden bod. Všetky priamky roviny $P_2(i)$, ktoré prechádzajú jej ľubovoľným bodom O, môžeme potom dostať takto: Zvolíme ľubovoľnú priamku $o \in P_2(i)$ neprechádzajúcu bodom O. Potom spojnice bodu O so všetkými bodmi priamky o sú zároveň všetky priamky prechádzajúce bodom O. Tento systém priamok nazveme zväzkom priamok o strede O.

Zväzok priamok v $P_2(i)$ sa zobrazuje takto: Daná je k-priamka O_1 a k-priestor ${}^oP_3$, ktorý ju neobsahuje. Potom každá k-priamka priestoru ${}^oP_3$ spolu s priamkou O_1 určujú k-priestor, ktorý je obrazom jednej priamky zväzku v rovine $P_2(i)$. Takýto systém k-priestorov budeme nazývať zväzkom k-priestorov s osou O_1.

2. Kolineácie a antikolineácie roviny $P_2(i)$, t. j. príbuznosti o rovniciach

$$X_i' = A_{ij}X_j \quad \text{(a)} \qquad X_i' = A_{ij}\overline{X}_j \quad \text{(b)} \tag{3}$$

majú tú vlastnosť, že transformujú body do bodov. Odpovedajúce transformácie v P_5 musia mať potom tú vlastnosť, že transformujú k-priamky do k-priamok.

Vyšetrujme také kolineácie v priestore P_5, ktoré transformujú k-priamky do k-priamok. Platí:

Veta 2. *Nutná a postačujúca podmienka, aby kolineácia K priestoru P_5 transformovala k-priamky do k-priamok je, aby $KI = IK$.*

Dôkaz. Nech kolineácia K má rovnice

$$y_i = a_{ik}x_k.$$

Kolineácia K priraďuje teda bodu X bod Y. Ďalej nech $K(X') = \overline{Y}$. Aby kolineácia K transformovala k-priamku XX' do k-priamky, treba, aby body $YY'\overline{Y}$ ležali na jednej priamke, a to pre ľubovoľnú voľbu bodu X. Prvé dve súradnice bodov $YY'\overline{Y}$ sú

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6, \\ y_1' &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5 - a_{26}x_6, \\ \overline{y}_1 &= a_{12}x_1 - a_{11}x_2 + a_{14}x_3 - a_{13}x_4 + a_{16}x_5 - a_{15}x_6, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6, \\ y_2' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6, \\ \overline{y}_2 &= a_{22}x_1 - a_{21}x_2 + a_{24}x_3 - a_{23}x_4 + a_{26}x_5 - a_{25}x_6. \end{aligned}$$

Aby body Y, Y', $\overline{Y}$ ležali na jednej priamke pre ľubovoľný bod X, musia existovať také čísla λ, μ, ν, ktoré nie sú súčasne rovné nule, že platí

$$\lambda y_1 + \mu y_1' + \nu \overline{y}_1 = 0, \qquad \lambda y_2 + \mu y_2' + \nu \overline{y}_2 = 0,$$

a to nezávisle od čísel x_i. Musí teda platiť napríklad

$$\begin{aligned} \lambda a_{11} - \mu a_{21} + \nu a_{12} &= 0, & \lambda a_{12} - \mu a_{22} - \nu a_{11} &= 0, \\ \lambda a_{21} + \mu a_{11} + \nu a_{22} &= 0, & \lambda a_{22} + \mu a_{12} - \nu a_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Ak vypočítame pomer $\lambda : \mu : \nu$ z prvých dvoch rovníc a z posledných dvoch rovníc, dostaneme porovnaním výsledkov rovnicu

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0. \qquad (\times)$$

Ak vypočítame pomer $\lambda : \mu : \nu$ z prvej a poslednej rovnice a tak isto z druhej a tretej rovnice, dostaneme porovnaním výsledkov rovnice

$$a_{11}^2 - a_{22}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0, \qquad a_{11}^2 - a_{22}^2 - a_{12}^2 + a_{21}^2 = 0.$$

Z toho

$$a_{11} = \pm a_{22}, \qquad a_{12} = \pm a_{21}.$$

Dosadením do rovnice $(\times)$ zistíme, že môžu nastať tieto dva prípady: 1. $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$ 2. $a_{11} = -a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. Tým istým postupom, použijúc aj ostatné súradnice y_i, y_i', $\overline{y}_i$ bodov Y, Y', $\overline{Y}$, dostaneme obdobné vzťahy pre koeficienty a_{ik}. Rovnice kolineácie K môžu mať potom dvojaký tvar:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6,\\
y_2 &= -a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 - a_6x_5 + a_5x_6,\\
y_3 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6,\\
y_4 &= -b_2x_1 + b_1x_2 - b_4x_3 + b_3x_4 - b_6x_5 + b_5x_6,\\
y_5 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6,\\
y_6 &= -c_2x_1 + c_1x_2 - c_4x_3 + c_3x_4 - c_6x_5 + c_5x_6;
\end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

$$(4)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + \alpha_5x_5 + \alpha_6x_6,\\
y_2 &= \alpha_2x_1 - \alpha_1x_1 + \alpha_4x_3 - \alpha_3x_4 + \alpha_6x_5 - \alpha_5x_6,\\
y_3 &= \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + \beta_6x_6,\\
y_4 &= \beta_2x_1 - \beta_1x_2 + \beta_4x_3 - \beta_3x_4 + \beta_6x_5 - \beta_5x_6,\\
y_5 &= \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3 + \gamma_4x_4 + \gamma_5x_5 + \gamma_6x_6,\\
y_6 &= \gamma_2x_1 - \gamma_1x_2 + \gamma_4x_3 - \gamma_3x_4 + \gamma_6x_5 - \gamma_5x_6.
\end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Ľahko sa presvedčíme, že pre obidve tieto kolineácie platí $KI = IK$.

Nech naopak platí $KI = IK$. Potom porovnaním príslušných koeficientov ihneď vyplýva, že kolineácia K musí mať alebo rovnice (4a) alebo (4b).

Veta 3. *Každá kolineácia (antikolineácia) roviny P_2(i) je reprezentovaná v priestore P_5 kolineáciou typu* (4a) *typu* (4b) *a naopak.*

Dôkaz vety vyplýva ihneď z rozpisu rovníc (3a) a (3b).

Kolineácie typu (4a) budeme nazývať kolineáciami prvého druhu a kolineácie typu (4b) kolineáciami druhého druhu priestoru P_6. Z tvaru rovníc kolineácií prvého a druhého druhu vyplýva, že každú kolineáciu druhého druhu možno dostať ako súčin istej kolineácie prvého druhu a tejto špeciálnej kolineácie druhého druhu:

$$x_1' = x_1, \; x_2' = -x_2, \; x_3' = x_3, \; x_4' = -x_4, \; x_5' = x_5, \; x_6' = -x_6. \qquad (5)$$

Identickej kolineácii roviny P_2(i) odpovedá identická kolineácia priestoru P_5. Súčinu dvoch kolineácií $K_2K_1 = K_3$ roviny P_2(i) odpovedá súčin odpovedajúcich kolineácií prvého druhu v P_5. Skutočne, nech $K_1(X) = Y$, $K_2(Y) = Z$, potom $K_3(X) = Z$. Bodom X, Y, Z odpovedajú v P_5 priamky X_1, Y_1, Z_1 a pre odpovedajúce kolineácie prvého druhu v P_5 (ktoré označíme taktiež K_1, K_2, K_3) musí platiť tiež $K_1(X_1) = Y_1$, $K_2(Y_1) = Z_1$, teda $K_3(X_1) = Z_1$, čiže $K_2K_1 = K_3$.

Kolineácie roviny P_2(i) tvoria grupu. Súčin kolineácie a antikolineácie je antikolineácia a súčin dvoch antikolineácií je kolineácia. Kolineácie a antikolineácie tvoria grupu.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva:

Veta 4. *Kolineácie prvého druhu v P_5 tvoria grupu. Súčin kolineácie prvého druhu a kolineácie druhého druhu je kolineácia druhého druhu. Kolineácie prvého a druhého druhu tvoria grupu.*

Nech A, B, C sú rôzne body priamky $p \in P_2$(i). Zvoľme súradnicový systém tak, aby tieto body mali súradnice $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 0)$. Nech $X = \lambda A + \mu B$, kde $\mu \neq 0$, to znamená $X \neq A$. Potom dvojpomer $(ABCX) = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Ak $\dfrac{\lambda}{\mu}$ je reálne číslo, možno dať tomuto faktu geometrický význam. Nech ${}^pP_3$ je k-priestor, do ktorého sa zobrazuje priamka p. Súradnice bodov A, B, C, X v tomto k-priestore sú $A(1, 0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1, 0)$, $C(1, 0, 1, 0)$ $X(\lambda, 0, \mu, 0)$. Všetky tieto body ležia na jednej priamke a zrejme $(ABCX) = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Vidíme ak $\dfrac{\lambda}{\mu}$ je reálne číslo, všetky body X vyplnia celú spojnicu ABC (s výnimkou bodu A). k-priamky, ktoré prechádzajú bodmi spojnice ABC, vytvárajú regulus (spájajú body spojnice ABC a im v involúcii I priradené body spojnice $A'B'C'$). Dvojpomer $(ABCX)$ je teda dvojpomer k-priamok prechádzajúcich týmito bodmi v tomto regule.

Ľubovoľné tri rôzne priamky k-priestoru určujú jediný regulus. Každá štvorica k-priamok tohoto regulu má reálny dvojpomer, to znamená, že aj príslušná štvorica bodov v rovine P_2(i) má reálny dvojpomer. Takýto systém bodov roviny P_2(i) nazývame reťazcom. Platí teda:

Veta 5. *Reťazce roviny P_2(i) sa zobrazujú do regulov zložených z k-priamok.*

Podobne ako v reálnej projektívnej rovine, aj v rovine P_2(i) platí:

Veta 6. *Jediné involutórne kolineácie roviny P_2(i) sú jej harmonické homológie.*

Dôkaz možno robiť presne tak ako v reálnej projektívnej rovine [3].

Príslušná konštrukcia v P_5 vypadá takto: Nech OO' je k-priamka odpovedajúca stredu homológie. Nech ${}^oP_3$ je k-priestor odpovedajúci osi homológie, pričom k-priamka OO' neleží v priestore ${}^oP_3$. Nech AA' je k-priamka rôzna od OO' a neležiaca v ${}^oP_3$. Potom k-priamky OO' a AA' určujú k-priestor ${}^aP_3$, ktorý má s k-priestorom ${}^oP_3$ spoločnú k-priamku $\bar{A}\bar{A}'$. k-priamky OO', AA', $\bar{A}\bar{A}'$ ležia v k-priestore ${}^aP_3$ a určujú v ňom reťazec. V tomto reťazci existuje k-priamka BB' harmonicky združená ku k-priamke AA' vzhľadom na spojnice OO' a $\bar{A}\bar{A}'$ a to je hľadaná k-priamka.

V rovine $P_2(i)$ existuje jediný typ antikolineácií [1]. Vhodnou voľbou súradnicového systému možno písať rovnice antikolineácie vo tvare

$$X_i = \bar{X}_i. \tag{6}$$

Táto antikolineácia má za samodružné body všetky body, ktorých jedna predstaviteľka má všetky súradnice reálne.

3. Všetky body, ktorých jedna predstaviteľka má všetky súradnice reálne, zobrazujú sa do bodov roviny ${}^oP_2$ o rovniciach $x_2 = x_4 = x_6 = 0$. Nazvime všetky roviny, ktoré vzniknú z roviny ${}^oP_2$ kolineáciami prvého druhu r-rovinami.

Veta 7. *r-rovina neobsahuje žiadne k-priamky.*

Dôkaz. Vetu stačí dokázať pre r-rovinu ${}^oP_2$. Body roviny ${}^oP_2$ majú súradnice $(a, 0, b, 0, c, 0)$. Involúcia I priraďuje týmto bodom body $(0, a, 0, b, 0, c)$. Tieto body ležia v rovine ${}^oP_2'$. Roviny ${}^oP_2$ a ${}^oP_2'$ sú zrejme mimobežné a teda rovina ${}^oP_2$ nemôže obsahovať žiadnu k-priamku.

Kritérium, podľa ktorého možno určiť, či rovina je r-rovinou, udáva táto veta.

Veta 8. *Rovina je r-rovinou vtedy a len vtedy, ak obsahuje také tri body, že tieto body a body k nim priradené involúciou I sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Rovina ${}^oP_2$ je určená bodmi $A_1(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $A_5(0, 0, 0, 0, 1, 0)$. Involúcia I transformuje tieto body do bodov $A_1'(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $A_3'(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $A_5'(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Kolineácia prvého druhu transformuje tieto body do bodov $\bar{A}_1(a_1, -a_2, b_1, -b_2, c_1, -c_2)$, $\bar{A}_3(a_3, -a_4, b_3, -b_4, c_3, -c_4)$, $\bar{A}_5(a_5, -a_6, b_5, -b_6, c_5, -c_6)$, $\bar{A}_1'(a_2, a_1, b_2, b_1, c_2, c_1)$, $\bar{A}_3'(a_4, a_3, b_4, b_3, c_4, c_3)$, $\bar{A}_5'(a_6, a_5, b_6, b_5, c_6, c_5)$. Tieto body sú lineárne nezávislé, lebo ich súradnice tvoria stĺpce v determinante kolineácie. Rovina ${}^oP_2$ sa pritom transformuje do roviny P_2 určenej bodmi $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$.

Ak sú naopak dané lineárne nezávislé body $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_1'$, $\bar{A}_3'$, $\bar{A}_5'$, potom body $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$ určujú rovinu a existuje jediná kolineácia prvého druhu, ktorá transformuje body A_1, A_3, A_5, A_1', A_3', A_5' po rade do bodov $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_1'$, $\bar{A}_3'$, $\bar{A}_5'$ a teda rovina určená bodmi $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$ je r-rovinou.

Definícia. *Všetky body roviny $P_2(i)$, ktoré sa zobrazujú do k-priamok pretínajúcich r-rovinu, tvoria 2-reťazec.*

Veta 9. *Existuje jediný 2-reťazec prechádzajúci štyrmi bodmi roviny $P_2(i)$, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.*

Dôkaz. Nech body M, N, P, Q roviny $P_2(i)$, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, zobrazujú sa do k-priamok M_1, N_1, P_1, Q_1 priestoru P_5; potom žiadne tri z priamok M_1, N_1, P_1, Q_1 nemôžu ležať v jednom k-priestore. Priamkami M_1, N_1 je určený k-priestor ${}^1P_3$ a priamkami P_1, Q_1 je určený k-priestor ${}^2P_3$. k-priestory ${}^1P_3$, ${}^2P_3$ majú spoločnú k-priamku O_1. Nech O je ľubovoľný bod priamky O_1. Bodom O prechádza jediná priamka ${}^1a$ taká, že

pretína priamky M_1, N_1; nech má s týmito priamkami spoločné body M, N. Podobne bodom O prechádza jediná priamka ${}^2a$ pretínajúca priamky P_1, Q_1 v bodoch P, Q. Priamkami ${}^1a$, ${}^2a$ prechádza r-rovina P_2, pretože napr. body M, N, P, M', N', P' sú lineárne nezávislé. Každým bodom priamky O_1 prechádza teda jedna r-rovina, ktorá pretína k-priamky M_1, N_1, P_1, Q_1.

Naopak nech nejaká r-rovina $\bar{P}_2$ pretína priamky M_1, N_1, P_1, Q_1 v bodoch $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$. Potom body $\bar{M}$, $\bar{N}$ a ich spojnica ${}^1\bar{a}$ musia ležať v k-priestore ${}^1P_3$ a body $\bar{P}$, $\bar{Q}$ a ich spojnica ${}^2\bar{a}$ v k-priestore ${}^2P_3$. Pretože priamky ${}^1\bar{a}$, ${}^2\bar{a}$ ležia v jednej rovine, musia sa pretínať v bode $\bar{O}$. Bodom $\bar{O}$ prechádza k-priamka $\bar{O}_1$ spoločná obom k-priestorom ${}^1P_3$, ${}^2P_3$. Pretože taká priamka je len jedna, je $\bar{O}_1 \equiv O_1$. Teda r-rovina $\bar{P}_2$ je jednou z r-rovín, konštruovaných v predchádzajúcom odseku.

Priamky M_1, N_1, P_1, Q_1 pretína teda systém r-rovín, ktoré majú tú vlastnosť, že každým bodom priamok M_1, N_1, O_1, P_1, Q_1 prechádza práve jedna rovina tohto systému (budeme hovoriť o k-systéme r-rovín). Nech R_1 je k-priamka pretínajúca r-rovinu P_2 v bode R. Potom priamka R_1 pretína všetky r-roviny k-systému. O bode R môžeme predpokladať, že neleží na žiadnej z priamok ${}^1a$, ${}^2a$, pretože v tých prípadoch je tvrdenie zrejmé. Zvoľme bodom R dve priamky ${}^1r$, ${}^2r$. Priamkou ${}^1r$ prechádza k-priestor ${}^1R_3$ a priamkou ${}^2r$ k-priestor ${}^2R_3$. k-priestory ${}^1R_3$, ${}^2R_3$ majú spoločnú priamku R_1. Ľubovoľnú inú r-rovinu $\bar{P}_2$ toho istého k-systému pretínajú priestory ${}^1R_3$, ${}^2R_3$ v priamkach ${}^1\bar{r}$, ${}^2\bar{r}$, ktoré sa pretínajú v bode $\bar{R}$. Týmto bodom musí potom prechádzať aj priamka R_1, ktorá teda pretína aj rovinu $\bar{P}_2$.

Veta 10. *Daný je 2-reťazec r-rovinou P_2 a k-priamka P_1, ktorá neprislúcha tomuto 2-reťazcu; potom existuje jediný k-priestor P_3 priamkou P_1 taký, že má s daným 2-reťazcom spoločný reťazec.*

Dôkaz. Každý trojrozmerný priestor má s rovinou P_2 spoločný aspoň jeden bod. Žiaden trojrozmerný prietor prechádzajúci priamkou P_1 nemôže obsahovať rovinu P_2, lebo by sa museli potom priamka P_1 a rovina P_2 pretnúť. Priamkou P_1 a rovinou P_2 je určený štvorrozmerný priestor P_4. Priestor P_4 nemôže obsahovať rovinu P_2' (roviny P_2, P_2' obsahujú 6 lineárne nezávislých bodov), preto ju pretína v priamke Q_1'. Priestor P_3 určený priamkami P_1, Q_1' je k-priestor. Skutočne, pretína rovinu P_2 v priamke $\bar{Q}_1$, ktorá má aspoň jeden bod A spoločný s priamkou Q_1. Potom priamka P_1 a spojnica AA' určujú ten istý priestor P_3 a je teda k-priestorom. Priamka $\bar{Q}_1$ musí potom splynúť s priamkou Q_1 a priestor P_3 je hľadaným k-priestorom.

Nech $\bar{P}_3$ je iný k-priestor prechádzajúci priamkou P_1 a pretínajúci rovinu P_2 v priamke $\bar{Q}_1$. Potom priamky Q_1 a $\bar{Q}_1$ majú spoločný bod A a priestory P_3, $\bar{P}_3$ by mali okrem priamky P_1 spoločnú ešte priamku AA', čo nie je možné.

Poznámka. Priamku Q_1 môžeme dostať priamo ako priesečnicu priestoru $\bar{P}_4$, určeného priamkou P_1 a rovinou P_2', s rovinou P_2.

Pomocná veta. *Reťazec je reprezentovaný k-priamkami kvadriky Q_2^2 v k-pries-*

tore P_3; potom k ľubovoľnej k-priamke P_1 je združená polára Q_1 taktiež k-priamkou.

Dôkaz. Priestor P_3 nech má rovnice $x_5 = x_6 = 0$. Kvadriku Q_2^2 určíme priamkou $p = (O_1 \times O_3)$, kde $O_1(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Kvadriku Q_2^2 tvoria všetky k-priamky pretínajúce priamku p. Rovnica kvadriky Q_2^2 je potom $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. k-priamka P_1 nech je určená bodmi $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $A'(-a_2, a_1, -a_4, a_3)$. Polárna rovina α bodu A vzhľadom na kvadriku Q_2^2 má rovnicu $a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4 = 0$. Polárna rovina α' bodu A' vzhľadom na kvadriku Q_2^2 má rovnicu $a_3x_1 + a_4x_2 - a_1x_3 - a_2x_4 = 0$. Ak nejaký bod B leží na priesečnici Q_1 rovín α, α', ľahko sa presvedčíme, že na nej leží aj bod B' a teda priamka Q_1 je k-priamkou.

Nech $\mathfrak{R}$ je ľubovoľný 2-reťazec reprezentovaný r-rovinou P_2. k-priamka P_1 nech neprislúcha 2-reťazcu $\mathfrak{R}$. Potom podľa vety 10 existuje jediný k-priestor P_3 prechádzajúci priamkou P_1, ktorý má s 2-reťazcom $\mathfrak{R}$ spoločný reťazec. V priestore P_3 zostrojme k priamke P_1 združenú poláru Q_1 vzhľadom na tento reťazec. Potom k-priamky P_1, Q_1 nazývame združenými vzhľadom na 2-reťazec $\mathfrak{R}$ a príslušné body P, Q v rovine P_2(i) taktiež združenými vzhľadom na 2-reťazec $\mathfrak{R}$.

4. V tomto odseku sa budeme zaoberať vzájomnou polohou reťazcov a 2-reťazcov.

Veta 11. *Dva rôzne reťazce v rovine P_2(i) možu mať spoločné žiaden, jeden alebo dva body.*

Dôkaz. Nech reťazec $^1\mathfrak{P}$ je určený v priestore P_5 priamkou ^1p a reťazec $^2\mathfrak{P}$ priamkou ^2p. Kvadriky $^1Q_2^2$ a $^2Q_2^2$, ktoré reprezentujú tie dva reťazce môžu ležať vo dvoch rôznych k-priestoroch $^1P_3$, $^2P_3$, alebo v jednom P_3. Ak ležia v rôznych k-priestoroch, potom tieto priestory majú jedinú k-priamku spoločnú. Táto priamka môže alebo nemusí prislúchať obom reťazcom.

Nech teraz obidve kvadriky $^1Q_2^2$, $^2Q_2^2$ ležia v jednom k-priestore P_3. Potom každá priamka môže mať s kvadrikou $^2Q_2^2$ spoločný žiaden, jeden alebo dva body. Treba ukázať, že všetky tieto tri prípady môžu nastať aj pre priamku ^1p, ktorá nie je k-priamkou. Ukážem to na troch konkrétnych príkladoch pre priestor P_3 o rovniciach $x_5 = x_6 = 0$ a kvadriku $^2Q_2^2$ o rovnici $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Priamka $^1p = [(1, 0, 0, 1) \times (1, 1, -2, 1)]$ nemá s kvadrikou $^2Q_2^2$ žiaden bod spoločný; priamka $^1p = [(1, 0, -2, 1) \times (-1, 2, 0, -1)]$ má jeden a priamka $^1p = [(1, 0, 0, 0) \times (0, 0, 0, 1)]$ dva body spoločné s kvadrikou $^2Q_2^2$.

Veta 12. *2-reťazec môže alebo obsahovať reťazec, alebo s ním môže mať spoločné žiaden, jeden alebo dva body.*

Dôkaz. 2-reťazec nech je reprezentovaný r-rovinou P_2 a reťazec priamkou p v k-priestore P_3. Priestor P_3 môže mať s rovinou P_2 spoločnú alebo priamku q, alebo bod Q. V prvom prípade ide o tvrdenie vety 11 a v druhom prípade môže k-priamka Q_1 alebo prislúchať reťazcu alebo nie, čiže 2-reťazec má s reťazcom alebo jeden alebo žiaden bod spoločný.

Veta 13. *Priamka roviny P_2(i) môže mať s 2-reťazcom spoločný alebo celý reťazec alebo jeden bod.*

Dôkaz. k-priestor P_3 reprezentujúci priamku a r-rovinu P_2 reprezentujúca 2-reťazec môžu mať spoločnú alebo priamku alebo bod.

Veta 14. *Dva rôzne 2-reťazce môžu mať spoločné alebo tri lineárne nezávislé body, alebo jeden bod alebo bod a reťazec ním neprechádzajúci, alebo reťazec.*

Dôkaz. Nech 2-reťazec $\mathfrak{R}$ je určený r-rovinou $^oP_2$ a 2-reťazec $\bar{\mathfrak{R}}$ r-rovinou $^o\bar{P}_2$. Potom existuje celý k-systém r-rovín $^x\bar{P}_2$, ktoré tiež určujú 2-reťazec $\bar{\mathfrak{R}}$. Ukážeme si najprv, že iba konečný počet rovín $^x\bar{P}_2$ môže mať spoločné body s rovinou $^oP_2$. Predpokladajme, že 2-reťazce $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$ majú nekonečne mnoho spoločných bodov. Potom k-priamky — obrazy týchto bodov — pretínajú rovinu $^oP_2$ v nejakej množine bodov. Všetky tieto body (s výnimkou konečného počtu) musia ležať na jednej priamke. Keby to nebolo tak, dali by sa nájsť štyri také body, že žiadne tri z nich by neležali na jednej priamke a 2-reťazce $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, podľa vety 9, by museli splynúť. Nech teda všetky tie body (s výnimkou konečného počtu) ležia na priamke p. Priamky p a p' určujú k-priestor P_3. Nech $^1\bar{P}_2$ je r-rovina, ktorá prechádza bodom R, jedným zo spoločných bodov priamky p. Rovina $^1P_2$ musí pretínať aj všetky ostatné k-priamky spoločné obom 2-reťazcom. Pretože však tieto priamky (s výnimkou konečného počtu) ležia v priestore P_3, musí rovina $^1P_2$ pretínať P_3 v priamke. Bodom R prechádza ale jediná priamka, ktorá pretína ostatné k-priamky reťazca, t. j. priamka p, musí teda rovina $^1\bar{P}_2$ obsahovať priamku p. Každá iná z rovín $^x\bar{P}_2$ môže pretínať rovinu $^oP_2$ v bodoch, ktoré neležia na priamke p a takých môže byť iba konečný počet. Existuje teda iba konečný počet rovín $^x\bar{P}_2$, ktoré pretínajú rovinu $^oP_2$. Každú z rovín $^x\bar{P}_2$ môžeme považovať za rovinu $^y\bar{P}_2'$ a celú úvahu môžeme zopakovať pre roviny $^y\bar{P}_2'$ a rovinu $^oP_2'$; existuje teda iba konečný počet rovín $^x\bar{P}_2$, ktoré pretínajú rovinu $^oP_2'$. Dohromady existuje teda iba konečný počet rovín k-systému $^x\bar{P}_2$, ktoré pretínajú alebo rovinu $^oP_2$ alebo rovinu $^oP_2'$.

Nech r-rovina $^z\bar{P}_2$ nepretína ani rovinu $^oP_2$ ani rovinu $^oP_2'$. Nech ^1X je ľubovoľný bod roviny $^oP_2$. Bodom ^1X a rovinou $^z\bar{P}_2$ je určený trojrozmerný priestor $^zP_3$. Priestor $^zP_3$ pretína rovinu $^oP_2'$ v bode $^2X'$ (keby ju pretínal v priamke, mala by táto priamka spoločný bod s rovinou $^z\bar{P}_2$ a teda roviny $^oP_2'$, $^z\bar{P}_2$ by sa pretínali). Bodu $^2X'$ odpovedá involúciou I v rovine $^oP_2$ bod ^2X. Príbuznosť $^1X \to {}^2X$ je kolineáciou, pretože bodom a priamkam odpovedajú jednoznačne body a priamky a incidencia sa zachováva. Samodružné body tejto kolineácie určujú spoločné body reťazcov $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$. Z klasifikácie kolineácií vyplýva potom tvrdenie vety priamo.

LITERATÚRA

[1] Розенфельд Б. А., *Неевклидовы геометрии*, Москва 1955, 578.
[2] Норден А. П. Пространство линейной конгруенции, Матем. сб. 24 (66), 1949.
[3] Busemann–Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, New York 1953.
[4] Young J. W., Two-dimensional Chains and the associated Collineations in a Complex Plane, Trans. amer. math. Soc. 11 (1910) 280–283.
[5] Juel C., Über einige Grundbegriffe der projektiven Geometrie, Acta mathematica 14 (1890–1891).

Došlo dňa 6. 1. 1959.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

В статьи рассматривается отображение точек комплексной проективной плоскости $P_2(i)$ на прямые вещественного пятиразмерного проективного пространства P_5. Выведены основные свойства этого отображения и показано как отображаются коллинеации, антиколлинеации, цепы и 2-цепы. Рассмотрены тоже соотношения между цепями и 2-цепями.

ÜBER EINE ABBILDUNG DER KOMPLEXEN PROJEKTIVEN EBENE

V. MEDEK

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung ist die Abbildung der Punkte der komplexen projektiven Ebene $P_2(i)$ auf die Geraden eines reellen fünfdimensionalen projektiven Raumes P_5 untersucht. Es sind die Grundeigenschaften dieser Abbildung ausgeführt und es ist gezeigt, wie sich Kollineationen, Antikollineationen, Ketten und 2-Ketten abbilden. Zuletzt sind die Zusammenhänge zwischen Ketten und 2-Ketten untersucht.