MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK IX ČÍSLO 4

PRAVDEPODOBNOSTI V POSTUPNOSTI OPAKOVANÝCH SKORO NEZÁVISLÝCH POKUSOV

ANTON KOTZIG, Bratislava

1

Uvažujme o postupnosti pokusov $\mathfrak{E} = E_1, E_2, \ldots, E_k$ (pokus E_{i+1} nasleduje po pokuse E_i), pričom výsledkom ľubovoľného pokusu $E_i \in \mathfrak{E}$ môže byť práve jeden z náhodných javov $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_n^i$ ($n > 1$ je dané prirodzené číslo).

Budeme hovoriť, že konečná postupnosť $\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k$ čísel $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ opisuje priebeh prvých k pokusov postupnosti $\mathfrak{E}$, ak výsledkom pokusu E_j je jav $A_{a_j}^j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$). Znak $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ použijeme pre označenie pravdepodobnosti, že priebeh prvých k pokusov z $\mathfrak{E}$ bude opisovať postupnosť $\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k$. Pre pohodlnejšie vyjadrovanie zavádzame znak $P(\mathfrak{A}_0) = 1$.

O pravdepodobnostiach $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ vyjadrujúcich zákonitosť skúmaného pretržitého stochastického procesu, pravda, platí:

$$1 \geqq P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) \geqq 0, \tag{A}$$

pre ľubovoľné k celé nezáporné a pre ľubovoľnú prípustnú postupnosť $\mathfrak{A}_k$ a platí ďalej:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \ldots, a_k, i) = P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) \tag{B}$$

a je teda vždy:

$$\sum_{a_k=1}^{n} \sum_{a_{k-1}=1}^{n} \ldots \sum_{a_1=1}^{n} P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) = P(\mathfrak{A}_0) = 1. \tag{C}$$

2

Je známe, že o pravdepodobnostiach v postupnosti opakovaných nezávislých pokusov s rovnakým rozložením pravdepodobností a len v takejto postupnosti platí:[1)]

$$P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}) = P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot P(\mathfrak{A}_1 = a_{k+1}), \tag{1}$$

[1)] Pozri napr. B. V. Gnedenko, *Kurs teorii verojatnostej*, Moskva 1954.

pre všetky $k = 1, 2, \dots$ a pre všetky rôzne prípustné postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Je tiež známe, že dôsledkom splnenia podmienky (1) je platnosť týchto rovníc:

$$P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_k) = P(\mathfrak{A}_k = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}), \tag{2}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k$ je ľubovoľná prípustná postupnosť a $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ je ľubovoľná permutácia čísel $1, 2, \dots, k$; ďalej z (1) vyplýva:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_k, i, j) = P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, j). \tag{3}$$

Iným dobre známym dôsledkom splnenia podmienky (1) je tento dôsledok: o absolútnej (nepodmienenej) pravdepodobnosti $P(A_i^k)$, že výsledkom k-teho pokusu bude jav A_i^k, platí:

$$P(A_i^1) = P(A_i^2) = \dots = P(A_i^k) = \dots \tag{4}$$

pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a pre ľubovoľné číslo k prirodzené.

V našom príspevku budeme sa zaoberať takým stochastickým procesom, v ktorom pravdepodobnosti vyhovujú podmienke (2). Vlastnému skúmaniu po pripomenutí známych vecí predošlime ešte poznámky, ktoré osvetlia vzťah podmienky (2) k ostatným podmienkam (1), (3), (4). Ako bolo už konštatované, platí:

$$(1) \Rightarrow (2); \qquad (1) \Rightarrow (3); \qquad (1) \Rightarrow (4);$$

čiže: ľubovoľná z podmienok (2), (3), (4) je nutnou podmienkou pre platnosť rovníc (1).

Ľahko sa presvedčíme, že platí toto:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Vzťah (1) $\Rightarrow$ (2) je známy. Dokážme, že platí (2) $\Rightarrow$ (3), t. j., že ak platí (2), platí aj (3). Ak totiž je splnená podmienka (2), potom súčet z (3) možno upraviť takto:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_k, i, j) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_k, j, i),$$

z čoho ihneď podľa (B) vyplýva rovnica (3). Obdobne je to, ak postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_k$ je prázdna (t. j. keď $k = 0$). Platí preto (2) $\Rightarrow$ (3). Dokážme napokon, že (3) implikuje (4): ak je splnená podmienka (3), potom je nutne pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a pre ľubovoľné k prirodzené:

$$\sum_{a_k=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i) = P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, i)$$

$$\sum_{a_{k-1}=1}^{n} P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, i) = P(\mathfrak{A}_{k-1} = a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, i)$$

. . . .

a teda:

$$P(A_i^{k+1}) = \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_k=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i) = P(\mathfrak{A}_1 = i) = P(A_i^1),$$

čo dokazuje platnosť vzťahu (3) $\Rightarrow$ (4).

Ukážme ešte, že žiadne dve z podmienok (1), (2), (3), (4) nie sú ekvivalentné. Že podmienky (3), (4) nie sú ekvivalentné, je známe. Podľa vyššie uvedeného je ktorákoľvek z podmienok (1), (2), (3) ostrejšia než podmienka (4), t. j. platnosť rovnice (4) je síce nutnou, nie však postačujúcou podmienkou pre splnenie ktorejkoľvek z požiadaviek (1), (2), (3). Ako príklad na stochastický proces, v ktorom je splnená požiadavka (3) a nie je splnená požiadavka (2), môže nám poslúžiť zovšeobecnená Pólyova schéma takto konštruovaná: nech $n \geqq 2$ a nech Δ je ľubovoľné číslo z intervalu $(0; 1)$. Nech pre ľubovoľnú prípustnú konečnú postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ pri ľubovoľnom celom nezápornom k platí:

$$\frac{P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, i)}{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})} = (1 - \Delta)\frac{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i)}{P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_k)} + \Delta,$$

ak je $i = a_{k+1}$ a nech je: (5)

$$\frac{P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, i)}{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})} = (1 - \Delta)\frac{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i)}{P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_k)}, \tag{6}$$

ak je $i \neq a_{k+1}$, [pri $k = 0$ kladieme $P(\mathfrak{A}_0) = 1$ a podiel $P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, \dots, a_k, i)$: $P(A_i^1 = a_1, \dots, a_k)$ prejde v pravdepodobnosť $P(\mathfrak{A}_1 = 1)$].

Pomocou rovníc (5), (6) možno zrejme pri daných pravdepodobnostiach $P(\mathfrak{A}_i^1) = p_i$ (kde $1 > p_i > 0$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) a danom čísle Δ určiť ľubovoľnú pravdepodobnosť $P(\mathfrak{A}_l = a_1, a_2, \dots, a_l)$, kde $l = 2, 3, 4, \dots$.

Z rovníc (5), (6) vyplýva pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ toto:

$$\sum_{a_{k+1}=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+2} = a_1, a_2, \dots, a_{k+1}, i) =$$

$$= (1 - \Delta)\frac{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i)}{P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \dots, a_k)} \cdot \sum_{a_{k+1}=1}^{n} P(\mathfrak{A}_{k+1} =$$

$$= a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) + \Delta P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i) =$$

$$= (1 - \Delta) . P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i) + \Delta P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i) =$$

$$= P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \dots, a_k, i).$$

Teda opísaná zovšeobecnená Pólyova schéma vyhovuje podmienke (3) pri ľubovoľnom $\Delta \in (0; 1)$ a pri ľubovoľných $p_i \in (0; 1)$, kde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Táto

schéma nevyhovuje však podmienke (2), lebo napr. požiadavke $P(\mathfrak{A}_3 = i, i, j) = P(\mathfrak{A}_3 = i, j, i)$ možno vyhovieť len tak, keď $\Delta = 0$ a to je už prípad opakovaných nezávislých pokusov, vybočujúci z rámca nami opísanej zovšeobecnenej Pólyovej schémy.

Ukážme napokon pomocou jednoduchého príkladu, že splnenie požiadavky (2) nie je postačujúcou podmienkou pre platnosť rovníc (1): Nech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (kde $n > 1$) sú ľubovoľné čísla $\in (0; 1)$ také, že platí $\sum_{(i)} p_i = 1$. Položme pri ľubovoľnom k prirodzenom: (α) $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) = p_i$, ak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ($\beta$) $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$, ak v $\mathfrak{A}_k$ sa vyskytujú aspoň dve rôzne čísla. Takto definované pravdepodobnosti priebehu pokusov postupnosti $\mathfrak{C}$ vyhovujú zrejme požiadavke (2) a nevyhovujú požiadavke (1), t. j. nejde o postupnosť opakovaných nezávislých pokusov. Platí teda (4) non $\Rightarrow$ (3) non $\Rightarrow$ (2) non (1), čím je naše tvrdenie dokázané. Z uvedeného vyplýva preto ohľadom vzájomného vzťahu medzi uvažovanými požiadavkami toto: požiadavka (2) implikuje požiadavky (3), (4), je nutnou, nie je však postačujúcou podmienkou pre splnenie požiadavky (1).

O postupnosti $\mathfrak{C}$ budeme hovoriť, že je postupnosťou opakovaných skoro nezávislých pokusov, ak pravdepodobnosti $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ priebehu pokusov tejto postupnosti vyhovujú požiadavke (2).

Poznámka 1. Uvedený názov opakované skoro nezávislé pokusy volíme preto, aby sme zvýraznili aj v samotnom názve skutočnosť, že medzi uvedenými často uvažovanými požiadavkami (2), (3), (4) je požiadavka (2) najbližšia požiadavke (1).

Poznámka 2. Pojem pravdepodobnosti v postupnosti opakovaných skoro nezávislých pokusov sa už v literatúre z teórie pravdepodobnosti vyskytol. Tento pojem spadá pod pojem tzv. postupností ekvivalentných náhodných veličín, o ktorých je v literatúre už niekoľko pojednaní (spomeňme napr. prácu H. M. Gruzewskej, *On the law of probability and the c. f. of the standardised sum of equivalent variables*). Hlavné výsledky týchto prác vyplývajú zo všeobecného pojednania založeného na metódach funkcionálnej analýzy pochádzajúceho od E. B. Dynkina (pozri [7]). Tam však sú riešené iné problémy a použité sú iné metódy než tie, o ktorých pojednáme v ďalšom.

3

Prejdime teraz ku skúmaniu postupností opakovaných skoro nezávislých pokusov. Skutočnosť, že pravdepodobnosti v stochanistických procesoch, ktoré hodláme skúmať, vyhovujú rovniciam (2), umožňuje nám zaviesť isté zjednodušené označenie: nech opäť $n > 1$ je dané prirodzené číslo; symbol $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$, kde $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \xi$, použijeme pre označenie pravdepodobnosti, že postupnosť $\mathfrak{A}_\xi$ o ξ členoch opisujúca priebeh prvých ξ pokusov bude obsahovať ako člena číslo 1 práve ξ_1 krát, číslo 2 práve ξ_2 krát, atď. až číslo n práve ξ_n krát. Teda napr. $P[2, 1, 0, \ldots, 0]$ možno vyjadriť, ak použijeme prv zavedeného označenia, ako súčet takto:

$$P[2, 1, 0, \ldots, 0] = P(\mathfrak{A}_3 = 1, 1, 2) + P(\mathfrak{A}_3 = 1, 2, 1) + P(\mathfrak{A}_3 = 2, 1, 1).$$

Pretože vo všeobecnosti rôznych postupností $\mathfrak{A}_\xi$ (ako o tom hovorí aj uvedený príklad), vyhovujúcich požiadavke, aby členom postupnosti bolo číslo i práve ξ_i krát ($i = 1, 2, \ldots, n$), môže byť viacej, je výhodné definovať si pre ľubovoľnú postupnosť celých nezáporných čísel o n členoch $X = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ aj pravdepodobnosť $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ pomocou $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ takto:

$$P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = \frac{\xi!}{\xi_1!\,\xi_2! \ldots \xi_n!}\,\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]. \tag{7}$$

Koeficient pri $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ v rovnici (7) je číslo, ktoré udáva počet rôznych takých postupností o $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ členoch, v ktorých číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sa vyskytuje práve ξ_i krát. Preto $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ — vzhľadom na to, že $\mathfrak{C}$ je postupnosť opakovaných skoro nezávislých pokusov — je pravdepodobnosť, že priebeh prvých ξ pokusov bude opisovať ľubovoľná (jedna) pevne zvolená taká postupnosť o ξ členoch, v ktorej číslo i sa vyskytuje práve ξ_i krát.

Poznámka 3. Aby nedošlo k nedorozumeniu, rozlišujeme symboly prv a teraz zavedené jednak tým, že prv za symbolom P používali sme guľaté a teraz hranaté zátvorky a jednak tým, že v novozavedenom symbole neuvádzame označenie pre postupnosť $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Z rovníc (B) ľahko vyplýva pre pravdepodobnosti $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ platnosť týchto, pre ďalšie úvahy dôležitých rovníc:

$$\text{(D)}\quad \left\{\begin{aligned} \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = {} & \pi[\xi_1 + 1, \xi_2, \ldots, \xi_n] + \\ & + \pi[\xi_1, \xi_2 + 1, \xi_3, \ldots, \xi_n] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + 1]. \end{aligned}\right.$$

Ak $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta$ sú ľubovoľné celé nezáporné čísla, kde $0 < \sum_{i=1}^{n} \xi_i$; $0 < \eta$, potom opakovaným dosazovaním do rovníc (D) presvedčíme sa, že platí vždy aj toto:

$$\text{(E)}\quad \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = \sum \frac{\eta!}{\eta_1!\,\eta_2! \ldots \eta_n!}\,\pi[\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n],$$

kde naznačený súčet treba previesť cez všetky rôzne rozklady čísla η na celých nezáporných sčítancov $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = \eta$.

Prvou úlohou, ktorú si vytyčujeme pri skúmaní postupností opakovaných skoro nezávislých pokusov, je odvodenie jednoduchého vzorca pre výpočet tzv. faktoriálnych momentov rozloženia pravdepodobností n-tíc náhodných premenných $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ po ξ pokusoch.

Definujme si najprv funkciu $u^{[v]}$ premenných u, v (kde u, v sú čísla celé nezáporné) takto:

$$\begin{cases} u^{[v]} = u(u-1)(u-2)\dots(u-v+1), & ak\ v > 0 \\ u^{[0]} = 1 \text{ pre ľubovoľné } u \text{ celé nezáporné (je tiež } 0^{[0]} = 1). \end{cases} \tag{8}$$

Pomocou funkcie $u^{[v]}$ definujme faktoriálne momenty $\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ rozloženia pravdepodobností pre ľubovoľné prirodzené ξ a pre ľubovoľné celé nezáporné čísla $s_1, s_2, \dots, s_n$ takto:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \Sigma P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \,.\, \xi_1^{[s_1]} \xi_2^{[s_2]} \dots \xi_n^{[s_n]}, \tag{9}$$

kde naznačený súčet treba previesť cez všetky rôzne rozklady čísla ξ na celých nezáporných sčítancov $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \xi$.

Poznámka 4. Faktoriálne momenty pri úvahách z teórie pravdepodobnosti používajú často mnohí autori (napr. V. I. Romanovskij, S. Guldberg, J. Seitz a i.)[2]) v tomže zmysle ako v našej práci, používajú však pre ich označenie inú symboliku.

Priamo z definície je zrejmé, že platí

$$\varphi_\xi(0, 0, \dots, 0) = 1 \qquad \text{pre všetky} \qquad \xi > 0. \tag{10}$$

Položme $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$. Ľahko dokážeme, že platí toto:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0 \quad \text{vždy, keď je} \quad \xi < s = s_1 + s_2 + \dots + s_n. \tag{11}$$

Ak je totiž $\xi < s$, potom pri ľubovoľnom rozklade čísla ξ na celých nezáporných sčítancov aspoň jedno číslo ξ_i je menšie než číslo s_i a pretože pre $\xi_i < s_i$ je zrejme $\xi_i^{[s_i]} = 0$ (pozri definíciu (8) funkcie $u^{[v]}$), musí sa rovnať nule každý zo sčítancov $P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \,.\, \xi_1^{[s_1]} \xi_2^{[s_2]} \dots \xi_n^{[s_n]}$ a teda aj celý súčet na pravej strane rovnice (9) rovná sa nule, ak je $\xi < s$.

Ak je $\xi = s$, potom platí:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = P[s_1, s_2, \dots, s_n]\, s_1!\, s_2! \dots s_n! = s!\, \pi[s_1, s_2, \dots, s_n]. \tag{12}$$

Nenulovým sčítancom v súčte pre $\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ môže byť totiž sčítanec $P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \,.\, \xi_1^{[s_1]} \,.\, \xi_2^{[s_2]} \dots \xi_n^{[s_n]}$, v ktorom je $\xi_1 = s_1$; $\xi_2 = s_2$; ...; $\xi_n = s_n$ a žiadny iný. Pretože je $s_i^{[s_i]} = s_i!$ pre ľubovoľné celé nezáporné s_i, vyplýva z uvedeného naše tvrdenie.

Nech teraz je $\xi > s$; $\xi = r + s$. Je teda:

$$\varphi_{r+s}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \Sigma P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \,.\, \xi_1^{[s_1]} \xi_2^{[s_2]} \dots \xi_n^{[s_n]}. \tag{13}$$

Položme $\xi_i = r_i + s_i$. Pretože nenulovým (teda kladným) sčítancom v súčte na pravej strane rovnice (13) môže byť len sčítanec, v ktorom $\xi_i \geqq s_i$, pre

[2]) Pozri [2], [3], [5].

všetky $i = 1, 2, \dots, n$, možno hľadaný faktoriálny moment vyjadriť takto:

$$\varphi_{r+s}(s_1, s_2, \dots, s_n) =$$
$$= \Sigma P[r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n](r_1 + s_1)^{[s_1]}(r_2 + s_2)^{[s_2]} \dots (r_n + s_n)^{[s_n]}, \tag{14}$$

kde súčet treba previesť cez všetky rôzne rozklady čísla r na celých nezáporných sčítancov $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Ak do rovnice (14) dosadíme podľa (7) a použijeme vzťah $(r_i + s_i)^{[s_i]} = \dfrac{(r_i + s_i)!}{r_i!}$, dostaneme:

$$\varphi_{r+s}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum \frac{(r+s)!}{(r_1 + s_1)!\,(r_2 + s_2)! \dots (r_n + s_n)!} \,.$$
$$. \frac{(r_1 + s_1)!}{r_1} \,.\, \frac{(r_2 + s_2)!}{r_2!} \,.\, \dots \,.\, \frac{(r_n + s_n)!}{r_n!} \,.\, \pi[r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n]$$

a po vykrátení a úprave dostávame napokon

$$\varphi_{r+s}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{(r+s)!}{r!} \sum \frac{r!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!} \pi[r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n], \tag{15}$$

čiže [pozri (E)]:

$$\varphi_{r+s}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{(r+s)!}{r!} \pi[s_1, s_2, \dots, s_n], \tag{16}$$

alebo — ak použijeme vyjadrenie pomocou funkcie $u^{[v]}$ a položíme $\pi[0, 0, \dots, 0] = 1$ — môžeme všetky rovnice (10), (11), (12), (16) nahradiť jedinou rovnicou:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \xi^{[s]} \,.\, \pi[s_1, s_2, \dots, s_n], \tag{17}$$

ktorá platí pre ľubovoľné celé nezáporné $s_1, s_2, \dots, s_n, \xi$.

Dostali sme tak veľmi jednoduchý vzorec pre výpočet faktoriálnych momentov zo známych pravdepodobností $\pi[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

4

Rovnica (17) umožňuje nám tiež pomerne ľahký výpočet obvyklých mocninových momentov $\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ takto definovaných:

$$\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \Sigma P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \,.\, \xi_1^{s_1} \,.\, \xi_2^{s_2} \dots \xi_n^{s_n} \tag{18}$$

kde $s_1, s_2, \dots, s_n$ sú ľubovoľné celé nezáporné čísla, ξ ľubovoľné prirodzené číslo a kde naznačený súčet treba previesť cez všetky rôzne rozklady čísla ξ na celých nezáporných sčítancov $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \xi$.

Veľmi jednoduchý je prechod od momentov $\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ na momenty $\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ pre malé $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$. Tak napr. priamo z definícií týchto momentov je zrejmé, že platí pre $s = 0$ a pre ľubovoľné ξ prirodzené toto:

$$\mu_\xi(0, 0, \dots, 0) = \varphi_\xi(0, 0, \dots, 0) = 1 \tag{19}$$

Je $\xi^{[0]} = \xi^0 = 1$ a je $\xi^{[1]} = \xi$; porovnaním rovníc (9), (18) ľahko zistíme, že ak je $s_i \leq 1$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$, tak platí:

$$\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n). \tag{20}$$

Teda je napr.:

$$\left.\begin{aligned} \mu_\xi(1, 0, 0, \dots, 0) &= \varphi_\xi(1, 0, 0, \dots, 0) = \xi \,.\, \pi[1, 0, 0, \dots, 0] \\ \mu_\xi(0, 1, 0, \dots, 0) &= \varphi_\xi(0, 1, 0, \dots, 0) = \xi \,.\, \pi[0, 1, 0, \dots, 0] \\ \mu_\xi(1, 1, 0, \dots, 0) &= \varphi_\xi(1, 1, 0, \dots, 0) = \xi(\xi - 1) \,.\, \pi[1, 1, 0, \dots, 0]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ak je $s_i = 2$ pre $i = 1$ a $s_i = 0$ pre všetky $i \neq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, platí podľa (9), (18) a (20):

$$\varphi_\xi(2, 0, 0, \dots, 0) = \mu_\xi(2, 0, 0, \dots, 0) - \mu_\xi(1, 0, 0, \dots, 0),$$

čiže:

$$\mu_\xi(2, 0, 0, \dots, 0) = \xi \,.\, (\xi - 1) \,.\, \pi[2, 0, 0, \dots, 0] + \xi \,.\, \pi[1, 0, 0, \dots, 0].$$

Obdobne platí:

$$\mu_\xi(0, 2, 0, \dots, 0) = \xi \,.\, (\xi - 1) \,.\, \pi[0, 2, 0, \dots, 0] + \xi \,.\, \pi[0, 1, 0, \dots, 0].$$

Tým sú odvodené všetky momenty potrebné napr. pre výpočet koeficientu korelácie $r_{1,2}(\xi)$ (ktorý je odvislý od počtu ξ vykonaných pokusov) takto definovaného:

$$r_{1,2}(\xi) = \\ = \frac{\mu_\xi(1, 1, 0, \dots, 0) - \mu_\xi(1, 0, 0, \dots, 0) \,.\, \mu_\xi(0, 1, 0, \dots, 0)}{[\mu_\xi(2, 0, 0, \dots, 0) - \mu_\xi^2(1, 0, 0, \dots, 0)]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\mu_\xi(0, 2, 0, \dots, 0) - \mu_\xi^2(0, 1, 0, \dots, 0)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Je totiž podľa (17), (20), (21), (22) po úprave:

$$r_{1,2}(\xi) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\pi[1, 1, 0, \dots, 0] - \pi[1, 0, 0, \dots, 0] \,.\, \pi[1, 1, 0, \dots 0]}{\left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\pi[2, 0, 0, \dots, 0] - \pi^2[1, 0, 0, \dots, 0]\right]^{\frac{1}{2}} \,.\, \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\pi[0, 2, 0, \dots, 0] - \pi^2[0, 1, 1, \dots, 0]\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{23}$$

z čoho ľahko odvodíme túto limitu:

$$\lim_{\xi \to +\infty} r_{1,2}(\xi) = \\ = \frac{\pi[1, 1, 0, \dots, 0] - \pi[1, 0, 0, \dots, 0] \,.\, \pi[0, 1, 0, \dots, 0]}{[\pi[2, 0, 0, \dots, 0] - \pi^2[1, 0, 0, \dots, 0]]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\pi[0, 2, 0, \dots, 0] - \pi^2[0, 1, 0, \dots, 0]]^{\frac{1}{2}}}.$$

Poznámka 5. Vzorec pre výpočet koeficientu korelácie $r_{i,j}(\xi)$, kde $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$; $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$, čitateľ si ľahko odvodí z (23). Podobne ľahko sa odvodzuje limita $\lim_{\xi \to +\infty} r_{i,j}(\xi)$.

Z porovnania rovníc (9), (18) možno však vyvodiť aj ďalšie dôsledky. Uvážme, že ľubovoľný nenulový súčin $\xi_1^{[s_1]} \,.\, \xi_2^{[s_2]} \,.\, \dots \,.\, \xi_n^{[s_n]}$ možno vyjadriť nasledovne:

$$\xi_1^{[s_1]} \,.\, \xi_2^{[s_2]} \,.\, \dots \,.\, \xi_n^{[s_n]} = \xi^{s_1} \,.\, \xi^{s_2} \,.\, \dots \,.\, \xi^{s_n}_n + \text{členy } c\begin{bmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{bmatrix} \xi_1^{r_1} \,.\, \xi_2^{r_2} \,.\, \dots \,.\, \xi_n^{r_n},$$

kde $r_1, r_2, \dots, r_n$ sú celé nezáporné čísla, ktorých súčet $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ je menší než $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$ a kde koeficient $c\begin{bmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{bmatrix}$ je odvislý od kombinácií čísel r_i, s_i a nie je odvislý od čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Platí preto:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) + \sum_{r=0}^{s-1} \sum c\begin{bmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{bmatrix} \mu_\xi(r_1, r_2, \dots, r_n), \tag{24}$$

kde naznačený druhý súčet treba previesť cez všetky rôzne rozklady čísel $r = 0, 1, \dots, s - 1$ na celých nezáporných sčítancov $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$. Koeficient $c\begin{bmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{bmatrix}$ je pritom vždy číslo celé. Podľa toho možno obrátene momenty $\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ vyjadriť pomocou momentov $\varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ takto:

$$\mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \varphi_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) + \sum_{r=0}^{s-1} \sum d\begin{bmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{bmatrix} \varphi_\xi(r_1, r_2, \dots, r_n), \tag{25}$$

kde opäť druhý súčet treba previesť pre všetky $r = 0, 1, \dots, s - 1$ a pre všetky rôzne rozklady čísla r na celých nezáporných sčítancov $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$.

Toho využijeme pre výpočet limít momentov rozloženia pravdepodobností náhodných premenných $\bar{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i}$. Definujme si momenty $M_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ (kladieme $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$) takto:

$$M_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum P[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{s_1} \cdot \left(\frac{\xi_2}{\xi}\right)^{s_2} \dots \left(\frac{\xi_n}{\xi}\right)^{s_n}; \tag{26}$$

(namiesto premennej ξ_i zaviedli sme premennú $\frac{\xi_i}{\xi} = \bar{\xi}_i$, ktorá udáva relatívny počet výskytov javu A_i v ξ pokusoch). Platí teda:

$$M_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{\xi^s} \cdot \mu_\xi(s_1, s_2, \dots, s_n). \tag{27}$$

Vypočítajme limitu $M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, keď ξ rastie nad všetky hranice. Platí:

$$\lim_{\xi \to +\infty} M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{1}{\xi^s} \mu_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) =$$

$$= \lim_{\xi \to +\infty} \frac{1}{\xi^s} \varphi_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) + \lim_{\xi \to +\infty} \sum_{r=0}^{s-1} \sum d\begin{bmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\xi^s} \varphi_\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Je však:

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{\xi^{(r)}}{\xi^s} = 1, \qquad \text{ak je } r = s,$$

a je:

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{\xi^{(r)}}{\xi^s} = 0, \qquad \text{ak je } r < s.$$

Platí preto [pozri (17)]:

$$\lim_{\xi \to +\infty} M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \pi[s_1, s_2, \ldots, s_n]. \tag{28}$$

$M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sú momenty náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ obmedzeného podmienkou $0 \leq \xi_i \leq 1$. V dôsledku toho a podľa vety 1,6 a koroláru 1,1 diela Shohat–Tamarkin, *The problem of moments*, New York 1943 existuje práve jedna distribučná funkcia $\overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ n-rozmerného vektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ obmedzeného podmienkou $0 \leq \xi_i \leq 1$, ktorá má za momenty výrazy

$$\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \lim_{\xi \to +\infty} M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Poznámka 6. Systém čísel splňujúcich (D) je ľubovoľný (pri samozrejmom obmedzení, že π sú pravdepodobnosti). Použitím postupnosti skoro nezávislých pokusov bola zostrojená distribučná funkcia $\overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ ako limitné rozdelenie, ktorá má uvedené hodnoty za momenty. Obrátene: ak je daná distribučná funkcia $\overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ obmedzeného podmienkou $0 \leq \xi_i \leq 1$ a $\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sú jej momenty, potom existuje postupnosť skoro nezávislých pokusov, o pravdepodobnostiach ktorej platí:

$$\pi[s_1, s_2, \ldots, s_n] = \overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

5

V predchádzajúcich častiach zaoberali sme sa základnými vlastnosťami stochastického procesu, v ktorom pravdepodobnosti vyhovujú podmienke (2); t. j. v ktorom pravdepodobnosť $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je invariantná voči ľubovoľnej permutácii čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ukázalo sa (v časti 2), že existujú stochastické procesy (ponímané ako priebeh výsledkov v postupnosti opakovaných skoro nezávislých pokusov), v ktorých — napriek tomu, že je splnená podmienka (2) — nie je splnená podmienka (1). Teda napriek tomu, že je splnená podmienka (2), podmienená pravdepodobnosť

$$\frac{P(\mathfrak{A}_{k+1} = a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})}{P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)} = P(a_{k+1} \mid \mathfrak{A}_k) \tag{30}$$

môže byť odvislá od voľby postupnosti $\mathfrak{A}_k$.

V literatúre z teórie pravdepodobnosti sa často stretávame so skúmaním takých postupností opakovaných pokusov, v ktorých podmienená pravdepodobnosť nie je síce konštantná, ale predsa spĺňa isté podmienky. Neraz boli skúmané také systémy pravdepodobností, v ktorých podmienená pravdepodobnosť javu A_j v $(k+1)$-om pokuse sa zvyšuje (resp. znižuje), ak relatívny počet výskytov javu A_j v predchádzajúcich k pokusoch bol vyšší (resp. nižší) než pravdepodobnosť $P(\mathfrak{A}_1 = j)$ (sem patrí napr. aj známa Pólyova schéma a jej mnohé zovšeobecnenia),[3]) alebo naopak. Takéto schémy vystihujú dobre procesy, v ktorých zmena podmienenej pravdepodobnosti $P(a_{k+1} \mid \mathfrak{A}_k)$ je vyvolaná odklonom skutočného priebehu procesu od „normálneho" priebehu, t. j. od priebehu, v ktorom relatívny počet výskytov javu rovná sa (alebo sa približne rovná) pravdepodobnosti $P(\mathfrak{A}_1 = j)$.

Pomerne široké možnosti vo voľbe distribučnej funkcie $\overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ (z predchádzajúcej 4. časti) charakterizujúcej stochastický proces, pravdepodobnosti ktorého vyhovujú podmienke (2), priamo nás nabádajú k tomu, aby sme na pravdepodobnosti v opakovaných skoro nezávislých pokusoch kládli ešte ďalšie podmienky. Urobíme tak a budeme požadovať nasledovné. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú ľubovoľné celé kladné čísla také, že je

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = P(\mathfrak{A}_1 = 1) : P(\mathfrak{A}_1 = 2) : \ldots : P(\mathfrak{A}_r = n).$$

Žiadajme, aby o pravdepodobnostiach $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ definovaných v časti 3 platilo toto:

$$\pi[\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \ldots, \xi_n + x_n] = \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \cdot \pi[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{31}$$

pre ľubovoľné celé nezáporné čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Vyslovená požiadavka má tento zmysel: žiadame, aby o pravdepodobnostiach $P(\mathfrak{A}_m = a_1, a_2, \ldots, a_m)$, ktoré vyhovujú podmienke (2), platilo ešte aj toto:

$$\frac{P(\mathfrak{A}_{m+k+1} = a_1, a_2, \ldots, a_{m+k}, i)}{P(\mathfrak{A}_{m+k} = a_1, a_2, \ldots, a_{m+k})} = \frac{P(\mathfrak{A}_{m+1} = a_1, a_2, \ldots, a_m, i)}{P(\mathfrak{A}_m = a_1, a_2, \ldots, a_m)} \tag{32}$$

za predpokladu, že je $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a že v čiastočnej postupnosti $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+k}$ sa číslo j vyskytuje práve x_j krát; ináč povedané: žiadame, aby podmienená pravdepodobnosť $P(i \mid \mathfrak{A}_m)$ sa nezmenila, ak v ďalších k pokusoch bude normálny priebeh (t. j. ak relatívne početnosti výskytov jednotlivých možných javov budú sa rovnať ich apriorným pravdepodobnostiam).

[3]) Pozri napr. [2], [4], [5], [6].

Poznámka 7. Ďalšiu podmienku pre pravdepodobnosti v postupnosti opakovaných skoro nezávislých pokusov formulovali sme rovnicou (31) predbežne len pre prípad, kde pravdepodobnosti $P(\mathfrak{A}_1 = i)$ sú čísla racionálne. V ďalšom sa ukáže, že uvedenú požiadavku možno ľahko zovšeobecniť aj pre ľubovoľné reálne $P(\mathfrak{A}_1 = i) \in (0, 1)$.

Prv než prikročíme ku konštrukcii systému pravdepodobností $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$, ktorý vyhovuje podmienke (31) [čím bude súčasne zostrojený uvažovaný systém pravdepodobností, vyhovujúci aj podmienke (32) aj podmienke (2)], urobme niekoľko prípravných úvah.

Nech je daná ľubovoľná štvorcová matica $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$, ktorá má tieto vlastnosti:

(α) $\quad 0 < a_{ij} < 1 \qquad$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

(β) $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \qquad$ pre všetky $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

(γ) determinant

$$D_a = \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

nerovná sa nule;

(δ) položme $b_{i,j} = \log a_{i,j}$; platí: determinant

$$D_b = \begin{vmatrix} b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n} \\ b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n} \end{vmatrix}$$

nerovná sa nule.

Nech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú isté kladné čísla, z ktorých každé je menšie než 1. Nech platí o nich $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$.

Definujme funkciu $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ premenných $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ takto:

$$\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = c_1 \cdot a_{1,1}^{\xi_1} \cdot a_{1,2}^{\xi_2} \ldots a_{1,n}^{\xi_n} + c_2 \cdot a_{2,1}^{\xi_1} \cdot a_{2,2}^{\xi_2} \ldots a_{2,n}^{\xi_n} + \ldots + c_n a_{n,1}^{\xi_1} a_{n,2}^{\xi_2} \ldots a_{n,n}^{\xi_n}. \tag{33}$$

Pokusme sa nájsť čísla $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tak, aby platilo:

$$\pi[z_1 + \xi_1, z_2 + \xi_2, \ldots, z_n + \xi_n] = \pi[z_1, z_2, \ldots, z_n] \cdot \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \tag{34}$$

pre ľubovoľné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Triviálnym riešením nadhodenej úlohy je riešenie $z_i = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. Preskúmajme, či existuje a za akých predpokladov existuje netriviálne riešenie úlohy.

Položme pre zjednodušenie:

$$c_i a_{i,1}^{z_1} a_{i,2}^{z_2} \ldots a_{i,n}^{z_n} = y_i \qquad \text{pre ľubovoľné } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{35}$$

a voľme $\xi_1 = \xi \neq 0$; $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. Z rovnice (34) dostaneme túto podmienku. Platí:

$$y_1 a_{1,1}^{\xi} + y_2 a_{2,1}^{\xi} + \ldots + y_n a_{n,1}^{\xi} = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)(c_1 a_{1,1}^{\xi} + c_2 a_{2,1}^{\xi} + \ldots + c_n a_{n,1}^{\xi})$$

pre všetky ξ, z čoho vyplýva ihneď:

$$\frac{y_1}{c_1} = \frac{y_2}{c_2} = \ldots = \frac{y_n}{c_n}, \tag{36}$$

čiže (pozri (35), (36)):

$$a_{1,1}^{z_1} a_{1,2}^{z_2} \ldots a_{1,n}^{z_n} = a_{2,1}^{z_1} a_{2,2}^{z_2} \ldots a_{2,n}^{z_n} = \ldots = a_{n,1}^{z_1} a_{n,2}^{z_2} \ldots a_{n,n}^{z_n}, \tag{37}$$

alebo tiež [pozri (α), (β), (δ)]:

$$\left.\begin{aligned} & b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 + \ldots + b_{1,n}z_n = \\ & = b_{2,1}z_1 + b_{2,2}z_2 + \ldots + b_{2,n}z_n = \\ & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ & = b_{n,1}z_1 + b_{n,2}z_2 + \ldots + b_{n,n}z_n. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Ak teda istá n-tica čísel $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ vyhovuje rovniciam (38), potom vyhovuje týmto rovniciam aj ľubovoľná n-tica $\{\varrho z_1, \varrho z_2, \ldots, \varrho z_n\}$, kde ϱ je ľubovoľné reálne číslo.

Možno preto jednu z takýchto n-tíc čísel nájsť riešením sústavy rovníc (uvážme, že $b_{i,j} = \log a_{i,j} \neq 0$ pre ľubovoľné $i, j \in 1, 2, \ldots, n\}$):

$$\left.\begin{aligned} & b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 + \ldots + b_{1,n}z_n = B \\ & b_{2,1}z_1 + b_{2,2}z_2 + \ldots + b_{2,n}z_n = B \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & b_{n,1}z_1 + b_{n,2}z_2 + \ldots + b_{n,n}z_n = B \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

(B je ľubovoľné číslo rôzne od nuly) a ostatné riešenia majú tvar $\{\varrho z_1, \varrho z_2, \ldots, \varrho z_n\}$. Vyhovujúce riešenie nadhodenej úlohy existuje zrejme vždy, keď determinant sústavy rovníc (39) je rôzny od nuly. To sme však predpokladali (pozri vlastnosť δ). Tým sme našli odpoveď na prvú otázku, ktorú sme si položili. Položme si teraz druhú otázku: aké vlastnosti musí mať matica $\|a_{i,j}\|$, aby sa dali nájsť čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ požadovaných vlastností ($c_i > 0$; $\sum_{(i)} c_i = 1$) tak, že platí toto:

$$z_1 : z_2 : \ldots : z_n = \pi[1, 0, 0, \ldots, 0] : \pi[0, 1, 0, \ldots, 0] : \ldots : \pi[0, 0, 0, \ldots, 1]. \tag{40}$$

K odpovedi na druhú otázku nás povedie táto úvaha: podľa (33) platí

$$\left.\begin{aligned} & \pi[1, 0, 0, \ldots, 0] = a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \ldots + a_{1,n}c_n \\ & \pi[0, 1, 0, \ldots, 0] = a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + \ldots + a_{n,2}c_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pi[0, 0, \ldots, 0, 1] = a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \ldots + a_{n,n}c_n. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

K tomu, aby existovali čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vyhovujúce rovniciam (41) tak, že platí (40), je nutné a stačí, aby existovalo riešenie tohto systému rovníc (neznáme sú $c_1, c_2, \ldots, c_n$):

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \ldots + a_{n,1}c_n = Cz_1 \\ a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + \ldots + a_{n,2}c_n = Cz_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \ldots + a_{n,n}c_n = Cz_n, \end{array}\right\} \quad (42)$$

kde $C \neq 0$ je ľubovoľné pevne zvolené číslo, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sú čísla vyhovujúce rovniciam (39).

Sústava rovníc (42) má vždy riešenie, pretože jej determinant je podľa vlastnosti (γ) rôzny od nuly. Tým však ešte nie sme s odpoveďou na druhú otázku hotoví. Od čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sme žiadali totiž, aby platilo: 1. $c_i > 0$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a aby 2. platilo $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Požiadavke 2 možno vyhovieť vhodnou voľbou čísla C v rovniciach (42). Ináč je tomu u požiadavky 1. Aby bolo vyhovené aj požiadavke prvej, je zrejme nutné a stačí, aby čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ktoré sú riešením sústavy (42) (pri pevne zvolenom $C \neq 0$), boli buď všetky kladné, alebo aby všetky boli záporné.

Teda ak má matica $\|a_{i,j}\|$ mať i tú vlastnosť, že k nej existujú čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ktoré majú všetky požadované vlastnosti, potom o tejto matici musí platiť: existujú čísla B, C ($B \neq 0$, $C \neq 0$), že riešením sústavy rovníc (42) sú čísla kladné.

Po týchto prípravných úvahách vráťme sa k systému pravdepodobností $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ (teraz opäť čísla ξ_i sú celé nezáporné), ktorý vyhovuje rovniciam (31). Z vykonaných úvah dochádzame k tomuto záveru: Nech $\|a_{i,j}\|$ je matica splňujúca podmienky (α), (β), (γ), (δ). Nech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú reálne čísla a nech $\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ je funkcia definovaná pre všetky nezáporné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vzťahom (33). Potom k tomu, aby existovali kladné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so súčtom rovným jednej a skupina kladných čísiel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tak, aby pre všetky nezáporné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ platil vzťah (34) a aby súčasne bolo

$$z_1 : z_2 : \ldots : z_n = \pi[1, 0, 0, \ldots, 0] : \pi[0, 1, 0, \ldots, 0] : \ldots : \pi[0, 0, \ldots, 0, 1],$$

je nutné a stačí, aby existovali čísla $B \neq 0$; $C > 0$ tak, že systém rovníc

$$\begin{array}{l} a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \ldots + a_{n,1}c_n = Cz_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \ldots + a_{n,n}c_n = Cz_n, \end{array}$$

kde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ je riešenie systému rovníc

$$\begin{array}{l} b_{1,1}z_1 + \ldots + b_{1,n}z_n = B, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}z_1 + \ldots + b_{n,n}z_n = B, \end{array}$$

má kladné riešenie.

Z týchto úvah je tiež zrejmé, ako možno zovšeobecniť požiadavku (31) a nájsť konštrukciu príslušného systému pravdepodobností, ak sa dané pomery $P(\mathfrak{A}_1 = 1) : P(\mathfrak{A}_1 = 2) : \ldots : P(\mathfrak{A}_1 = n)$ nedajú vyjadriť pomocou prirodzených čísel. Stačí totiž požiadavku (31) formulovať takto: Označme $P(\mathfrak{A}_1 = i) = p_i$; žiadame, aby platilo

$$\left.\begin{array}{l} \lim \dfrac{\pi[\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \ldots, \xi_n + x_n]}{\pi[x_1, x_2, \ldots, x_n]} = \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \\ \dfrac{x_1}{\Sigma x_i} \to p_1 \\ \vdots \\ \dfrac{x_n}{\Sigma x_i} \to p_n \end{array}\right\} \quad (44)$$

pre všetky celé nezáporné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

6

Uveďme niekoľko príkladov matíc, ktoré majú vlastnosti (α), (β), (γ), (δ), (ε), (φ) a im odpovedajúcich systémov pravdepodobností vyhovujúcich požiadavke (31).

Nech $n > 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo a nech Δ je ľubovoľné číslo z intervalu $\left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$. Zostrojme štvorcovú maticu $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^{n} = A$ takto: $a_{i,j} = \Delta$, ak $i \neq j$; $a_{i,i} = 1 - (n-1)\Delta$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matica A práve zostrojená má zrejme vlastnosti (α), (β), (γ), (δ). Ak položíme $B = \log \Delta^{n-1}[1 - (n-1)\Delta]$, potom rovnici (43) vyhovujú čísla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ a pri $C = \dfrac{1}{n}$ riešením sústavy rovníc (44) sú tieto čísla $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \dfrac{1}{n}$.

Teda matica A má aj vlastnosti (ε), (φ). Systém pravdepodobností odpovedajúci matici A je potom rovnicou (33) definovaný takto (kladieme $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$):

$$\pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = \frac{1}{n}\{[1 - (n-1)\Delta]^{\xi_1} . \Delta^{\xi - \xi_1} +$$

$$+ [1 - (n-1)\Delta]^{\xi_2}\Delta^{\xi - \xi_2} + \ldots + [1 - (n-1)\Delta]^{\xi_n}\Delta^{\xi - \xi_n}\}$$

a teda napr.

$$\pi[1, 0, \ldots, 0] = \frac{1}{n} = P(\mathfrak{A}_1 = 1); \ \pi[0, 1, 0, \ldots, 0] = \frac{1}{n} = P(\mathfrak{A}_1 = 2)$$

atď. až

$$\pi[0, \ldots, 0, 1] = \frac{1}{n} = P(\mathfrak{A}_1 = n).$$

Je ďalej $\pi[1, 1, \ldots, 1] = \frac{1}{n}\{n[1-(n-1)\Delta]\Delta^{n-1}\} = [1-(n-1)\Delta]\Delta^{n-1}$ a platí:

$$\pi[\xi_1+1, \xi_2+1, \ldots, \xi_n+1] = \frac{1}{n}\{[1-(n-1)\Delta]^{\xi_1+1}\Delta^{n+\xi-\xi_1-1} +$$
$$+ [1-(n-1)\Delta]^{\xi_2+1} . \Delta^{n+\xi-\xi_2-1} + \ldots + [1-(n-1)\Delta]^{\xi_n+1} . \Delta^{n+\xi-\xi_n-1}\} =$$
$$= [1-(n-1)\Delta]\Delta^{n-1} . \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] = \pi[1, 1, \ldots, 1] . \pi[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n],$$

pre všetky $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ celé nezáporné.

V uvedenom príklade je konštruovaný systém pravdepodobností vyhovujúci rovnici (31), v ktorom je $P(\mathfrak{A}_1 = 1) = P(\mathfrak{A}_1 = 2) = \ldots = P(\mathfrak{A}_1 = n)$, a to pri ľubovoľnom $\Delta \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$.

Existujú však aj systémy vyhovujúce rovnici (31) (pritom stále máme na mysli systémy, ktorých pravdepodobnosti splňujú aj podmienku (2)), v ktorých je $P(\mathfrak{A}_1 = 1) \neq P(\mathfrak{A}_1 = 2)$. Uveďme jednoduchý príklad.

Nech $n = 2$; $a_{1,1} = \frac{1}{7}$; $a_{1,2} = \frac{6}{7}$; $a_{2,1} = \frac{4}{7}$; $a_{2,2} = \frac{3}{7}$. Potom je $x_1 : x_2 = 1 : 2$ a príslušné čísla c_1, c_2 sú rovné výrazom: $c_1 = \frac{5}{9}$; $c_2 = \frac{4}{9}$, ktoré majú všetky požadované vlastnosti. Opísanej matici odpovedá systém pravdepodobností takto definovaný:

$$\pi[\xi_1, \xi_2] = \frac{5}{9}\left(\frac{1}{7}\right)^{\xi_1}\left(\frac{6}{7}\right)^{\xi_2} + \frac{4}{9}\left(\frac{4}{7}\right)^{\xi_1}\left(\frac{3}{7}\right)^{\xi_2}.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že platí

$$\pi[\xi_1+1, \xi_2+2] = \pi[\xi_1, \xi_2] . \pi[1, 2]$$

a je $\pi[1, 0] = \frac{1}{3}$; $\pi[0, 1] = \frac{2}{3}$; teda systém takto konštruovaný splňuje všetky požiadavky a je pritom $P(\mathfrak{A}_1 = 1) \neq P(\mathfrak{A}_1 = 2)$.

Ukázali sme, že ak vhodne volíme maticu $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^n$, možno podľa tejto matice skonštruovať systém pravdepodobností, ktorý opisuje zákonitosť v istom pretržitom stochastickom procese a ktorý vyhovuje okrem podmienky (2) ešte aj podmienke (31). Podmienka (31) nemusí byť zrejme ešte splnená, keď je splnená podmienka (2) a podmienka (1) nemusí byť ešte splnená aj keď sú splnené podmienky (2) a (31). Teda systémy pravdepodobností, ktoré vyhovujú aj podmienke (2) aj podmienke (31), sú akýmsi prechodom medzi systémom pravdepodobností v postupnosti opakovaných skoro nezávislých pokusov a systémom pravdepodobností v postupnosti opakovaných nezávislých pokusov. Ľahkosť s akou možno z matice $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^n$ s vlastnosťami (α), (β), (ε), (φ) skonštruovať systém pravdepodobností vyhovujúci obom podmienkam (2) a (31) spolu so skutočnosťou, že sa dá pri štúdiu takýchto systémov s výhodou použiť metóda momentov, podtrhuje význam štúdia takýchto matíc.

LITERATÚRA

[1] Gnedenko B. V., *Kurs teorii verojatnostej*, Moskva 1954.
[2] Guldberg S., *Sui momenti della legge di distribuzione del Pólya*, Roma 1936.
[3] Romanovsky V., *Sui momenti della distribuzione ipergeometrica*, Roma 1935.
[4] Pólya G., *Sur quelques points de la théorie des probabilités*, Paris 1931.
[5] Seitz J., *Poznámka ke zobecněnému Pólyovu urnovému schematu*, Praha 1949.
[6] Kotzig A., *Použitie zobecnenej Pólyovej schémy pre výskum chýb v psychologii*, Statistický obzor XXVIII, seš. 2, 135–144.
[7] Dynkin E. B., *Klassy ekvivalentnych slučajnych veličin*, Uspechi matematičeskij nauk, tom VII, vyp. 2, 1953, 125–130.

Došlo dňa 19. 5. 1958.

Katedra matematiky
Vysokej školy ekonomickej
v Bratislave

ВЕРОЯТНОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ПОЧТИ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

АНТОН КОЦИГ

Выводы

В статье говорится о системе вероятностей в последовательности повторяющихся опытов. Пусть результатом какого-либо из опытов может быть один и только один из случайных явлений $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и пусть последовательность $\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k$ чисел $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ описывает протекание первых k опытов таким способом, что мы положим $a_i = j$ тогда и только тогда, когда результатом i-ого опыта является явление A_j. Символом $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ (где k-натуральное число и $\mathfrak{A}_k$ — любая допустимая k-членная последовательность) обозначим вероятность того, что протекание первых k опытов опишет последовательность $\mathfrak{A}_k$. В статье изучается такая система вероятностей $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$, которая удовлетворяет следующему условию: при любом натуральном числе k и при любой допустимой последовательности $\mathfrak{A}_k$ имеет место равенство

$$P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) = P(\mathfrak{A}_k = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}),$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, k$. Обозначим символом $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ вероятность того, что протекание первых ξ опытов $\left(\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)$ опишем такая последовательность $\mathfrak{A}_\xi$, в которой число i об'явится точно ξ_i раз. О моментах

$$M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \cdot \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{s_1} \cdot \left(\frac{\xi_2}{\xi}\right)^{s_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\xi_n}{\xi}\right)^{s_n}$$

(где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ любые целые неотрицательные числа и где вышеуведенную сумму нужно провесть для всевозможных разложений числа ξ на целые неотрицательные слогаемые $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \xi$) доказывается, что имеет место соотношение:

$$\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \lim_{\xi \to +\infty} M_\xi(s_2, s_2, \ldots, s_n) = \frac{s_1!\, s_2! \ldots s_n!}{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)!} \cdot P[s_1, s_2, \ldots, s_n].$$

Доказанная связь между моментами $\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ и вероятностями $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ (соответствено $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$) позволяет построить все системы вероятностей в последовательностях повторяющихся опытов (которые удовлетворяют вышеуведенному условию) с помощью моментов распределительной функции $\overline{F}(\xi_1 \leqq x_1; \xi_2 \leqq x_2; \ldots : \xi_n \leqq x_n)$ случайных n-размерных векторов, которая удовлетворяет условиям: $0 \leqq x_i \leqq 1; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

В дальнейшем изучаются системы вероятностей, которые кроме упомянутого условия выполняют еще дальнейшее условие: условная вероятность того, что результатом $(m + r + 1)$-го опыта будет явление A_i равняется условной вероятности того, что результатом $(m + 1)$-го опыта будет явление A_i, если протекание первых m опытов было в обоих случаях одинаковым и. если протекание дальнейших r опытов является нормальным. Притом протекание конечного числа за собою следующих опытов считается нормальным тогда, когда относительные частоты всех отдельных возможных явлений равняются их априорным вероятностям.

В статье построены системы вероятностей, которые удовлетворяют обоим уведенным условиям. Оказывается, что и такая система еще не должна быть системой вероятностей последовательности повторяющихся независимых опытов с одинаковым разложением вероятности.

WAHRSCHEINLICHKEITEN INFOLGE VON WIEDERHOLTEN FAST UNABHÄNGIGEN VERSUCHEN

ANTON KOTZIG

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Wahrscheinlichkeitssystem infolge von wiederholten Versuchen behandelt, das wir folgendermaßen erhalten: den Verlauf der ersten k Versuche in einer gewissen Versuchsfolge (wo als Ergebnis eines beliebigen Versuches nur eines den zufälligen Erscheinung $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sein kann) legen wir durch die Zahlenfolge $\mathfrak{A}_n = a_1, a_2, \ldots, a_k$ (wo $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$) so fest, daß $a_i = j$ genau dann ist, wenn das Ergebnis des i-ten Versuches die zufällige Erscheinung A_j zur Folge hat. Mit dem Symbol $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots a_k)$ bezeichenn wir die Wahrscheinlichkeit, daß der Verlauf der ersten k Versuche durch die Folge $\mathfrak{A}_k$ gegeben ist. Gegenstand dieser Untersuchung sind solche Systeme der Wahrscheinlichkeiten $P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k)$ (wo k eine beliebige natürliche Zahl, $\mathfrak{A}_k$ eine beliebige zugelassene Folge mit k Gliedern bedeutet), die folgende Bedingungen erfüllen: Für eine beliebige natürliche Zahl k und für beliebige zugelassene Folge $\mathfrak{A}_k$ gilt:

$$P(\mathfrak{A}_k = a_1, a_2, \ldots, a_k) = P(\mathfrak{A}_k = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$$

wobei $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, k$ bedeutet. Die Folge wiederholter Versuche, in der das Wahrscheinlichkeitssystem die oben angeführten Eingeschaften besitzt, sind als Folge der wiederholten fast unabhängigen Versuchen bezeichnet. Mit $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, daß der Verlauf der ersten ξ Versuche $(\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i)$ durch die Folge $\mathfrak{A}_\xi$ festgelegt ist, in der die Zahl i genau ξ_i mal vorkommt. Folgendes wird bewiesen: Von den Momenten

$$M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{s_1} \cdot \left(\frac{\xi_2}{\xi}\right)^{s_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\xi_n}{\xi}\right)^{s_n}$$

(wo $s_1, s_2, \ldots, s_n$ beliebige ganze nichtnegative Zahlen bedeuten und wo die oben angeführte Summation über alle möglichen Zerlegungen der Zahl ξ in ihre nicht negativen Summanden durchzuführen ist; $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \xi$) gilt:

$$\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \lim_{\xi \to +\infty} M_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) \frac{s_1!\, s_2! \ldots s_n!}{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)!} P(s_1, s_2, \ldots, s_n].$$

Die abgeleitete Beziehung zwischen den Momenten $\overline{M}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ und den Wahrscheinlichkeiten $P[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$ ermöglicht es Wahrscheinlichkeitssysteme in Folgen

von wiederholten fast unabhängingen Versuchen mittels von Momenten solcher beliebiger n-dimensionaler Verteilungsfunktionen $\overline{F}(\xi_1 \leqq x_1; \ \ldots; \ \xi_n \leqq x_n)$ zufälliger Vektoren für die $0 \leqq \xi_i \leqq 1; \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$ gilt, zu konstruieren.

Im weiteren Verlauf werden Wahrscheinlichkeitssysteme betrachtet, die außer der oben eingeführten Bedingung noch eine weitere erfüllen: Eine beliebige der bedingten Wahrscheinlichkeiten, die das Ergebnis des $(m + r + 1)$-ten Versuches die Erscheinung A_i zur Folge hat, soll einer bedingten Wahrscheinlichkeit, die das Ergebnis des $(m + 1)$-ten Versuches in derselben Versuchsfolge die Erscheinung A_i zur Folge hat, gleich sein, wenn der Verlauf der letzten r Versuche von $(m + 1)$ bis $(m + r)$-ten Versuch normal war. Der Verlauf einer endlichen Anzahl aufeinanderfolgender Versuche wird als normal betrachtet, wenn die relative Häufigkeit aller möglichen einzelnen Erscheinungen gleich ihrer Wahrscheinlichkeit apriori ist. Es werden Wahrscheinlichkeitssysteme konstruiert, die auch diese zweite Bedingung erfüllen und es zeigt sich, daß auch ein Wahrscheinlichkeitssystem, das diese beiden Bedingungen erfüllt, noch nicht ein Wahrscheinlichkeitssystem infolgen von wiederholten unabhängigen Versuchen sein muß.