O EKVIVALENCII ISTÝCH PRAVIDIEL KRÁTENIA V POLOGRUPÁCH

RENÁTA HRMOVÁ, Bratislava

Táto práca do istej miery nadväzuje na prácu [1], v ktorej sa vyšetrovali pologrupy splňujúce niektorú z týchto podmienok:

Podmienka A_l: $zx = zy \to x = y$ pre každé $x, y, z \in S$.
Podmienka A_r: $xz = yz \to x = y$ pre každé $x, y, z \in S$.
Podmienka A: S splňuje súčasne A_l i A_r.
Podmienka C: $x^2 = xy = y^2 \to x = y$ pre každú dvojicu $x, y \in S$.

V práci [1] sa vyšetroval predovšetkým význam podmienky C. Je celkom prirodzené sa pýtať na vlastnosti pologrúp, ktoré splňujú niektoré z týchto podmienok:

Podmienka B_l: $x^2 = xy \to x = y$ pre každé $x, y \in S$.
Podmienka B_r: $x^2 = yx \to x = y$ pre každé $x, y \in S$.
Podmienka B: S splňuje súčasne podmienku B_l i B_r.
Logický súvis všetkých uvedených podmienok je daný touto schémou:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
A_l \arrow[dd] & & A_r \arrow[dd] \\
& B \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
B_l \arrow[dr] & & B_r \arrow[dl] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Je zrejmé, že podmienka A_l (resp. A_r) je vo všeobecnosti slabšia než podmienka A.

Príklad multiplikatívnej pologrupy reálnych čísiel uzavretého intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ dáva ďalej príklad pologrupy, ktorá splňuje podmienku C, ale nesplňuje podmienku B.

Nasledujúci príklad, ktorý je modifikáciou istého príkladu pochádzajúceho od G. Thierrina [4], je príkladom pologrupy, ktorá splňuje podmienku B_r, ale nesplňuje podmienku A_r.

Príklad. Uvažujme o množine S rôznych prvkov $\{a_{i,i}\} \cup \{b_{ik}\}$, kde

$i = 1, 2, \ldots$ prebieha všetky prirodzené čísla, zatiaľčo k nadobúda iba dve hodnoty, $k = 1, 2$. Zaveďme do S násobenie týmito definíciami:

$$a_{ik} \cdot a_{lm} = a_{i+l,k}, \qquad a_{ik} \cdot b_{lm} = a_{ik},$$
$$b_{ik} \cdot b_{lm} = b_{i+l,k}, \qquad b_{ik} \cdot a_{lm} = a_{lk}.$$

Ľahko sa presvedčíme, že S je nekomutatívna pologrupa.

V S nie je splnená podmienka A_l, lebo aj pre $m \neq n$, t. j. pre $b_{lm} \neq b_{ln}$, platí $a_{ik} \cdot b_{lm} = a_{ik} \cdot b_{ln}$. Podobne nie je splnená ani podmienka A_r, lebo aj pre $i \neq j$, t. j. pre $b_{ik} \neq b_{jk}$, platí $b_{ik} \cdot a_{lm} = b_{jk} \cdot a_{lm}$. V pologrupe S nie je splnená ani podmienka B_l, lebo aj pre $k \neq m$, t. j. pre $a_{ik} \neq a_{im}$, platí $(a_{ik})^2 = a_{ik} \cdot a_{im}$.

Avšak uvedená pologrupa splňuje podmienku B_r.

Na dôkaz tohto tvrdenia ukážeme, že pre prvky $x, y, z \in S$ rovnica $x^2 = yx$ implikuje $x = y$.

Ak x je tvaru $x = a_{ik}$ a y je tvaru $y = b_{lm}$, vzťah tvaru $(a_{ik})^2 = b_{lm} \cdot a_{ik}$ nie je vôbec možný, lebo je totožný so vzťahom $a_{2i,k} = a_{im}$, čo nie je možné, lebo $2i > i$.

Ak x je tvaru $x = a_{ik}$ a y je tvaru $y = a_{lm}$, potom vzťah $(a_{ik})^2 = a_{lm} \cdot a_{ik}$ je totožný so vzťahom $a_{2i,k} = a_{l+i,m}$. To je možné vtedy a len vtedy, ak $2i = l + i$, $k = m$; t. j. $l = i$, $k = m$, teda $a_{ik} = a_{lm}$.

Ak x je tvaru $x = b_{ik}$ a y je tvaru $y = a_{lm}$, vzťah $x^2 = yx$ je totožný so vzťahom $b_{2i,k} = a_{lm}$; taký vzťah je však nemožný, lebo každý prvok a_{ik} je rôzny od ktoréhokoľvek prvku b_{lm}.

Ak konečne x je tvaru $x = b_{ik}$ a y je tvaru $y = b_{lm}$, potom vzťah $x^2 = yx$ t. j. $(b_{ik})^2 = b_{lm} \cdot b_{ik}$ je totožný so vzťahom $b_{2i,k} = b_{l+i,m}$, a tento vzťah je možný vtedy a len vtedy, ak $2i = l + i$, $k = m$, t. j. ak $i = l$, $k = m$, teda $b_{ik} = b_{lm}$. Tým je naše tvrdenie dokázané.

Úlohou tejto práce je ukázať, že pre dve široké triedy pologrúp, totiž pre periodické pologrupy a pre tzv. po elementoch bikompaktné pologrupy (ktorých špeciálnym príkladom sú bikompaktné pologrupy) sú podmienky A_l a B_l (a analogicky A_r a B_r ako i A a B) ekvivalentné.

1

Najprv dokážeme jednu lemmu, ktorú budeme v ďalšom potrebovať.

Lemma 1. *Nech v pologrupe S je splnená podmienka B_l. Potom pre každé dva idempotenty $e_1, e_2 \in S$ platí $e_1e_2 = e_2$.*

Dôkaz. a) Nech a je ľubovoľný element $\in S$ a e ľubovoľný idempotent $\in S$. Potom

$$(eae)^2 = (eae)(eae) = (eae)\,ae$$

a vzhľadom na podmienku B_l: $eae = ae$, t. j. $e(ae) = ae$.

b) Pre dva ľubovoľné idempotenty $\in S$ máme teraz

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2 \cdot e_1e_2 = e_1(e_2e_1e_2).$$

Vzhľadom na vzťah dokázaný sub a) je však $e_2e_1e_2 = e_1e_2$, teda

$$(e_1e_2)^2 = e_1(e_1e_2) = e_1e_2 = (e_1e_2)\,e_2.$$

Odtiaľ, vzhľadom na podmienku B_l, dostávame $e_1e_2 = e_2$; tým je naše tvrdenie dokázané.

Veta 1. *Nech S je periodická pologrupa. Potom podmienka B_l je ekvivalentná s podmienkou A_l.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že z podmienky B_l vyplýva, že v pologrupe plat pravidlo krátenia zľava (t. j. podmienka A_l).

a) Nech $a \in S$. Potom existuje také prirodzené číslo $\varrho = \varrho(a)$, že $a^\varrho = e_1$, kde e_1 je idempotent. Zrejme platí

$$ae_1 = e_1a.$$

Z rovnice $(e_1a)^2 = (e_1a)(e_1a) = e_1(ae_1)\,a = e_1(e_1a)\,a = (e_1a)\,a$, t. j. $(e_1a)^2 = (e_1a)\,a$, vyplýva (vzhľadom na podmienku B_l) $e_1a = a$, teda $e_1a = ae_1 = a$.

b) Nech je teraz e_2 ľubovoľný idempotent $\in S$ a a ľubovoľný element $\in S$. Potom (používajúc lemmu 1) máme

$$e_2a = e_2(e_1a) = (e_2e_1)\,a = e_1a = a.$$

Vzťah $e_2a = a$ hovorí, že ktorýkoľvek idempotent $\in S$ je ľavou jednotkou pologrupy S.

c) Nech sú teraz x, y, a tri ľubovoľné prvky $\in S$. Ukážeme, že zo vzťahu $ax = ay$ vyplýva $x = y$.

Tým bude naša veta dokázaná. Násobme daný vzťah $ax = ay$ prvkom $a^{\varrho-1}$ zľava. Máme $a^\varrho x = a^\varrho y$ t. j. $e_1x = e_1y$. Vzhľadom na vzťah dokázaný sub b) máme $e_1x = x$, $e_1y = y$, teda $x = y$, č. b. t. d.

Poznámka 1. Podobne sa dokáže, že v periodickej pologrupe sú podmienky A_r a B_r, resp. A a B ekvivalentné.

Poznámka 2. Periodická pologrupa, v ktorej platí B_l (a teda aj A_l), má známu štruktúru: je súčtom disjunktných izomorfných grúp. Periodická pologrupa, v ktorej platí B (a teda aj A) je dokonca grupou. Dôkazy týchto tvrdení sú známe a urobia sa analogicky ako v práci [3].

2

V tomto odseku ukážeme, že veta analogická k vete 1 platí aj v istých typoch topologických pologrúp.

Nech S je topologická Hausdorffova pologrupa. Nech je $a \in S$. Označme $A = \{a^n | n \geq 1\}$. Budeme hovoriť, že S je po elementoch bikompaktná pologrupa, ak pre každé $a \in S$ je množina A obsažená v nejakej bikompaktnej podmnožine z S.

Pripomeňme si ešte toto (pozri [2]): Ak označíme $A_n = \{a^i | i \geqq n\}$, je prenik $G(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ neprázdna množina a je to grupa. Označme znakom e jej jednotkový element. Element e je jediným idempotentom ležiacim v $\bar{A}$ (t. j. v uzávere množiny A). Pritom platí $e\bar{A} = \bar{A}e = G(a)$.

Veta 2. *Nech S je po elementoch bikompaktná pologrupa. Potom v pologrupe S sú podmienky A_l a B_l ekvivalentné.*

Dôkaz. Stačí opäť dokázať, že podmienka B_l implikuje platnosť podmienky A_l.

a) Nech je $a \in S$. Položme $A = \{a^n | n \geqq 1\}$. Označme znakom e_1 jediný idempotent ležiaci v $\bar{A}$. Pretože $\bar{A}$ je komutatívna pologrupa a elementy a ako i e_1 ležia v $\bar{A}$, je $ae_1 = e_1a$.

Z toho dostávame (použitím lemmy 1) — práve tak ako v dôkaze vety 1 — $ae_1 = e_1a = a$.

b) Nech e_2 je ľubovoľný idempotent $\in S$ a a ľubovolný element $\in S$. Práve tak ako v dôkaze vety 1, odsek b) dostávame $e_2a = a$; t. j. každý idempotent pologrupy S je jej ľavou jednotkou.

c) Nech sú x, y, a tri ľubovoľné prvky $\in S$ a nech platí $ax = ay$. Pretože platí $e_1a = a$, zo vzťahu $e_1\bar{A} = G(a)$ vyplýva vzťah $a = e_1a \in e_1\bar{A} = G(a)$, t. j. $a \in G(a)$.

Keďže elementy a, e_1 patria do grupy $G(a)$, existuje taký element $b \in G(a)$, že $b \cdot a = e_1$. Násobme vzťah $ax = ay$ elementom b zľava. Máme $bax = bay$, t. j. $e_1x = e_1y$. Pretože každý idempotent $\in S$ (a teda aj e_1) je ľavou jednotkou pologrupy S, z posledného vzťahu vyplýva $x = y$, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Keďže v pologrupách po elementoch bikompaktných sú podmienky A_l a B_l ekvivalentné, z výsledkov práce [3] vyplýva, že po elementoch bikompaktná pologrupa, v ktorej platí podmienka B_l, resp. B_r je súčtom disjunktných topologicky izomorfných grúp.

3

V tomto odseku poukážeme na jeden ďalší typ pravidla krátenia, ktorý, ako sa ukáže, je vo všeobecnosti „silnejší" než všetky doteraz uvedené pravidlá krátenia.

Podmienka $A_0 : xy = yz \rightarrow x = z$ pre každé $x, y, z \in S$.

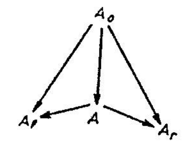
Podmienku A_0 napísanú v tejto forme by sme mohli nazvať pravidlom krátenia „vnútornými" elementami.

Keďže vzťah $xy = yz$ možno písať tiež v tvare $yz = xy$, možno súčasne hovoriť aj o krátení „vonkajšími" elementami.

Veta 3. *Ak pologrupa splňuje podmienku A_0, potom splňuje tiež podmienku A.*

Dôkaz. Nech S splňuje podmienku A_0 a nech platí $ab = ac$. Násobením sprava elementom a dostávame $aba = aca$. Vzhľadom na platnosť A_0 po krátení „znútra" dostávame $ab = ca$ a po krátení „zvonku" dostávame $b = c$. Analogicky: vzťah $ba = ca$ implikuje vzťah $aba = aca$, z ktorého po krátení „znútra" dostaneme $ab = ca$ a po krátení „zvonka" dostávame $b = c$.

Logický súvis podmienok A_0, A, A_l, A_r je tento



Že podmienka A_0 vo všeobecnosti nie je totožná s podmienkou A ukazuje táto veta:

Veta 4. *Žiadna nekomutatívna pologrupa nesplňuje podmienku A_0.*

Dôkaz. Nech S je pologrupa, majúca aspoň dva elementy a nech splňuje podmienku A_0. Nech $x, y \in S$. Potom zo vzťahu $(xy)x = x(yx)$ vyplýva $xy = yx$, t. j. S je komutatívna. Teda žiadna nekomutatívna pologrupa (a taká má aspoň dva elementy) nemôže splňovať podmienku A_0.

Teraz ľahko nájdeme vetu o ekvivalencii podmienok A a A_0.

Veta 5. *Nech S je pologrupa splňujúca podmienku A. Potom S splňuje podmienku A_0 vtedy a len vtedy, ak S je komutatívna.*

Dôkaz. a) Ak S splňuje podmienku A_0, potom musí byť podľa vety 4 komutatívna.

b) Nech S je komutatívna. Potom vzťah $ac = cb$ je totožný so vzťahom $ac = bc$. Keďže S splňuje podmienku A, vyplýva z posledného vzťahu $a = b$. Teda S splňuje podmienku A_0.

LITERATÚRA

[1] Schwarz Št., O pologrupách splňujúcich zoslabené pravidlá krátenia, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 6 (1956), 149—158.
[2] Schwarz Št., K teorii Hausdorffovych bikompaktnych polugrupp (rusky), Čechoslovackij matematičeskij žurnal 5 (80), 1955, 1—23.
[3] Schwarz Št., Poznámka k teórii bikompaktných pologrúp, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 5 (1955), 86—89.
[4] Thierrin G., Caractérisation des groupes par certaines propriétés des équivalences, Séminaire A. Châtelet et P. Dubreil (Algèbre et Théorie des Nombres), Année 1953/54, Exposé N° 19, 1—10, Faculté des Sciences de Paris 1956.

Došlo dňa 15. marca 1959.

Katedra matematiky SVŠT v Bratislave

О ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРАВИЛ СОКРАЩЕНИЯ В ПОЛУГРУППАХ

РЕНАТА ГРМОВА

Выводы

Пусть S — полугруппа. Скажем, что S удовлетворяет условию B_r, если $x^2 = yx \to x = y$ для всякой пары $x, y \in S$. S удовлетворяет условию A_r, если в S имеет место правило сокращения справа.

В статье показывается (на одном примере), что условия A_r и B_r в общности не эквивалентны.

Ядром работы являются теоремы 1 и 2, в которых доказано, что для двух широких классов полугрупп, имено для периодических полугрупп и для полугрупп по элементах бикомпактных условия A_r и B_r эквивалентны.

В последней части рассматриваются полугруппы удовлетворяющие условию: $xy = yz \to x = z$ для всех $x, y, z \in S$.

ON THE EQUIVALENCE OF SOME FORMS OF THE CANCELLATION LAW IN A SEMIGROUP

RENÁTA HRMOVÁ

Summary

We shall say that a semigroup S satisfies Condition B_r if $x^2 = yx$ implies $x = y$ for every couple of elements $x, y \in S$. A semigroup S is said to satisfy Condition A_r if the right cancellation law in S holds.

An example constructed above shows that in general Conditions A_r and B_r are not equivalent. The main purpose of the paper is to show, that there are two wide classes of semigroups, namely the torsion semigroups and elementwise bicompact semigroups in which Conditions A_r and B_r are equivalent.

The last section contains a remark on semigroups satisfying the following condition: $xy = yz$ implies $x = z$ for all $x, y, z \in S$.