UMIESTNENIE 17, 25 A 33 BODOV NA GULI

ERNEST JUCOVIČ, Prešov

1. Majme sústavu $n \geqq 2$ bodov na jednotkovej guli (n je prirodzené), nech a_n je najmenšia sférická vzdialenosť dvoch z nich. Hľadané je také umiestnenie týchto n bodov, pri ktorom a_n má najväčšiu hodnotu.

Ľahko sa zistí, že s riešením tohto problému je ekvivalentné riešenie problémov:

1. Nech R_n je polomer gule, na ktorej možno umiestniť n bodov tak, aby (euklidovská) vzdialenosť žiadnych dvoch z nich nebola menšia ako 1. Hľadaná je najmenšia hodnota R_n.

2. Majme na guli n zhodných neprekrývajúcich sa kružníc. Nazvime hustotou umiestnenia týchto n kružníc (označme D_n) pomer súčtu ich sférických obsahov (teda povrchov príslušných vrchlíkov) k povrchu gule. Hľadaná je najväčšia hodnota D_n.

Tieto problémy sú rozriešené pre $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12$. (Pozri [1], [2], [3].)[1] Domnienky o maximálnych umiestneniach pre niektoré ďalšie n sú vyslovené v [3] a [4]. V [5] sú ukázané umiestnenia pre všetky $n \leqq 220$, ktoré všetky spĺňajú vzťah $D_n \geqq \overline{D_5}$ ($\overline{D_5}$ označme maximálnu hodnotu D_5). — V ďalších riadkoch ukážeme umiestnenia 17, 25 a 33 bodov, pre ktoré a_{17}, a_{25} a a_{33} budú väčšie ako doteraz v literatúre spomínané. Príslušné numerické výpočty sú jednoduché, vykonajú sa prostriedkami elementárnej sférickej geometrie a neuvádzame ich. Pripojujeme aj obrazy grafov našich umiestnení, zostrojené podľa [1].

Predom ešte pripomeňme, že hodnoty a_n, R_n a D_n sú vo vzťahoch:

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos a_n}}, \tag{1}$$

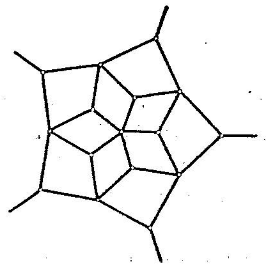
$$D_n = \frac{n}{2}\left(1 - \cos\frac{a_n}{2}\right). \tag{2}$$

(Pozri [1] str. 168, kde však vo vzorci (1) je chyba.)

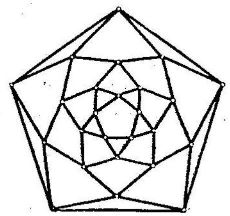
2. $n = 17$. (Obr. 1). Nech sú $A_1, A_2, \ldots, A_5$ vrcholy pravidelného päťuholníka vpísaného hlavnej kružnici h, ktorej pólmi sú body P_1, P_2. Nech

[1]) Podľa súkromného oznámenia prof. Fejes-Tótha dokázal L. Danzer domnienku z [3] o maximálnom umiestnení 11 bodov.

sú $B_1, B_2, \ldots, B_5$ hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov (sférických) nad základňami $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_5A_1$, ležiace na pologuli hP_1. Nech sú ďalej $C_1, C_2, \ldots, C_5$ hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov nad základňami $A_1A_2, \ldots, A_5A_1$, ležiace na pologuli hP_2. Pri vhodnej voľbe ramien uvedených rovnoramenných trojuholníkov, ktoré sú všetky navzájom zhodné,



Obr. 1.



Obr. 2.

sú vzdialenosti bodov $B_1, \ldots, B_5$ od bodu P_1 a vzdialenosti bodov $C_1, \ldots, C_5$ od bodu P_2 zhodné s ramenami a sú najmenšou vzdialenosťou dvoch z bodov $A_1, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_5, C_1, \ldots, C_5, P_1, P_2$. Pri tomto umiestnení je

$$a_{17} \doteq 51°2'.$$

Z vzorcov (1), (2) vychádza

$$R_{17} \doteq 1{,}161,$$
$$D_{17} \doteq 0{,}836.$$

3. $n = 25$. (Obr. 2.) Nech sú $A_1, A_2, \ldots, A_5$ vrcholy pravidelného päťuholníka vpísaného hlavnej kružnici h a uvažujme najprv o jednej pologuli, oddelenej kruhom h. Nech na nej sú $B_1, \ldots, B_5$ hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov nad základňami $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_5A_1$, nech sú ďalej $C_1, \ldots, C_5$ hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov nad základňami $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_5B_1$, $C_i \neq B_i$ $(i = 1, 2, \ldots 5)$, nech ramená všetkých týchto trojuholníkov sú navzájom zhodné. Pri vhodnej voľbe ich veľkosti sú zhodné aj s oblúkmi $C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_5C_1$. Obdobným postupom zostrojme body $D_1, \ldots, D_5$, $E_1, \ldots, E_5$ na druhej pologuli. Pri tomto umiestnení bodov A_i, B_i, C_i, D_i, E_i $(i = 1, \ldots, 5)$ je

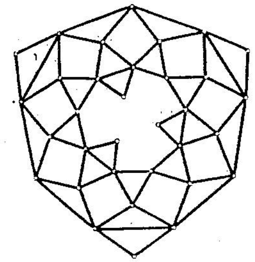
$$a_{25} \doteq 41°24'.$$

Z vzorcov (1) a (2) potom vychádza

$$R_{25} \doteq 1{,}478,$$
$$D_{25} \doteq 0{,}807.$$

4. $n = 33$. (Obr.3.) Nech sú $A_1, \ldots, A_9$ vrcholy pravidelného deväťuholníka, vpísaného hlavnej kružnici h a uvažujme najprv jednu pologuľu, oddelenú kru-

hom h. Nech sú $B_1, B_2, \ldots, B_9$ hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov nad základňami $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_9A_1$. Nech sú ďalej C_1, C_2, C_3 hlavné vrcholy rovnoramenných trojuholníkov $B_1C_1B_2$, $B_4C_2B_5$, $B_7C_3B_8$, $C_j \neq A_i$ $(i = 1, \ldots, 9,\ j = 1, 2, 3)$, nech ramená všetkých týchto trojuholníkov sú



Obr. 3.

navzájom zhodné. Pri vhodnej voľbe sú zhodné aj so stranami B_1B_2, B_2B_3, $\ldots, B_9B_1$. Obdobným postupom zostrojme body $D_1, \ldots, D_9, E_1, E_2, E_3$ na druhej pologuli, oddelenej kruhom h.

Pri tomto umiestnení bodov A_i, B_i, D_i, C_j, E_j $(i = 1, \ldots, 9;\ j = 1, 2, 3)$ je

$$a_{33} \doteq 34°47'.$$

Z vzorcov (1) a (2) vychádza

$$R_{33} \doteq 1{,}673,$$
$$D_{33} \doteq 0{,}755.$$

LITERATÚRA

[1] Fejes—Tóth L., Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.

[2] Habicht W.—van der Waerden B. L., Lagerungen von Punkten auf der Kugel. Math. Annalen 123 (1951), 223—234.

[3] Schütte K.—van der Waerden B. L., Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? Math. Annalen 123 (1951), 96—124.

[4] van der Waerden B. L., Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze. Math. Annalen 125 (1952), 213—222.

[5] Molnár J., Körök elhelyezése gömbön. Matematikai lapok IV (1953), 113—123.

Došlo 27. 1. 1958.

Katedra matematiky a fyziky VŠP v Prešove

РАЗМЕЩЕНИЕ 17, 25 И 33 ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

ЭРНЕСТ ЮЦОВИЧ

Выводы

Пусть a_n обозначает самое кратчайшое сферическое расстояние двух из $n \geqq 2$ точек, лежащих на шаре с радиусом 1. Проблема заключается в нахождении такого размещения этих n точек, чтобы a_n имело максимальное значение.

В статье показаны такие размещения 17, 25 и 33 точек, что $a_{17} \doteq 51°2'$, $a_{25} \doteq 41°24'$, $a_{33} \doteq 34°47'$ (т. е. по больше, чем до сих пор публикованные).

17 точек размещенных в 3 зонах по 5 точках, лежащих на окружностях. Следующие 2 точки — полюсы этих окружностей.

25 точек размещенные на 5 окружностях по 5 точек.

33 точек размещенные на 5 окружностях. На 3 из них размещено по 9 точек, на оставшихся двух окружностях лежит по 3 точки.

LAGERUNG VON 17, 25 UND 33 PUNKTEN AUF DER KUGEL

ERNEST JUCOVIČ

Zusammenfassung

Sei a_n der minimale sphärische Abstand zweier aus $n \geqq 2$ Punkte, die auf einer Einheitskugel liegen. Gesucht wird eine solche Lagerung dieser n Punkte, daß a_n maximal sei.

Gezeigt werden solche Lagerungen von 17, 25 und 33 Punkten, daß $a_{17} \doteq 51°2'$, $a_{25} \doteq 41°24'$, $a_{33} \doteq 34°47'$ (also größer als die bisher publizierten Werte).

Die 17 Punkte liegen zonal: je 5 Punkte auf 3 Kreisen, — und die Pole dieser Kreise.

Die 25 Punkte liegen auf 5 Kreisen per 5 Punkte.

Die 33 Punkte liegen auf 5 Kreisen, per 9 Punkte auf 3 Kreisen, per 3 Punkte auf weiteren 2 Kreisen.