# O ČIASTOČNE KOMUTATÍVNYCH PERIODICKÝCH POLOGRUPÁCH

BLANKA KOLIBIAROVÁ, Bratislava

Práca sa zaoberá vyšetrovaním periodických pologrúp, v ktorých idempotenty sú komutatívne so všetkými prvkami. Ukazuje sa, že takáto pologrupa má isté vlastnosti spoločné alebo podobné s komutatívnymi periodickými pologrupami (vyšetrovanými napr. v práci [1], [5]). Takto sa do istej miery osvetľuje úloha idempotentov v periodických pologrupách. Uvažuje sa hlavne o vzťahoch medzi ideálmi a idempotentami, o štruktúre ideálov a o konštrukcii vyšetrovaných pologrúp.

*

**Definícia.** *Budeme hovoriť, že periodická pologrupa $S$ je čiastočne komutatívna, keď pre každý idempotent $e \in S$ a každý prvok $x \in S$ platí $xe = ex$.*

Taká pologrupa sa dá zostrojiť napr. konštrukciou uvedenou v odseku 5.

*Polozväzom* rozumieme komutatívnu pologrupu, ktorej každý prvok je idempotent. Polozväz je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej $x \leqq y$ značí $xy = x$ [6].

Označme znakom $I(S)$ množinu idempotentov v čiastočne komutatívnej periodickej pologrupe $S$. Znakmi $e$ s indexmi označme všade v ďalšom prvky z $I(S)$. Zrejme $I(S)$ je čiastočná pologrupa pologrupy $S$. Pretože pologrupa $I(S)$ je komutatívna a každý jej prvok je idempotentom, je to polozväz.

Analogicky ako v práci [1] zavádzame: Nech $S$ je periodická pologrupa, nech $e$ je idempotent v $S$. Budeme hovoriť, že prvok $x \in S$ *patrí* k idempotentu $e$, ak existuje také prirodzené číslo $n$, že platí $x^n = e$. Množinu všetkých prvkov patriacich k idempotentu $e$ budeme označovať znakom $K(e)$ a budeme ju volať *K-triedou patriacou k idempotentu e*. Grupa $G$ s vlastnosťami: a) $G$ je čiastočná pologrupa v $S$, b) $e \in G$, c) v $S$ neexistuje čiastočná pologrupa $G'$, ktorá je grupou a pre ktorú platí $G \subset G' \subseteqq S$, budeme nazývať maximálnou grupou patriacou k idempotentu $e$ a označovať $G(e)$.

Zrejme každý prvok $x \in S$ patrí len k jednému idempotentu, pričom pre každé $K(e)$ je $e \in K(e)$. Ďalej je zrejmé, že prvky $x, y$ patria do tej istej $K$-triedy vtedy a len vtedy, keď pre isté prirodzené čísla $m, n$ platí $x^n = y^m$. Je známe, že grupa $G(e)$ sa skladá zo všetkých prvkov tvaru $xe$, kde $x \in K(e)$.

**Lemma 1.** *Nech $S$ je čiastočne komutatívna periodická pologrupa. Nech $x \in G(e)$, $y \in K(e)$. Potom $xy \in G(e)$, $yx \in G(e)$.*



Dôkaz je zrejmý vzhľadom na to, že $G(e)$ sa skladá z prvkov tvaru $xe$ ($x \in K(e)$) a len z nich.

## 1. Rozklad na K-triedy

**Lemma 2.** *Nech $x \in K(e_1)$, $y \in K(e_2)$, potom $xye_1e_2$ leží v $G(e_1e_2)$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú také prirodzené čísla $m, n$, že $x^m = e_1$, $y^n = e_2$. Teda $(xe_2)^m = e_1e_2$, $(ye_1)^n = e_1e_2$, t. j. $xe_2 \in K(e_1e_2)$, $ye_1 \in K(e_1e_2)$. Vieme, že tie a len tie prvky z $K(e_1e_2)$ patria do $G(e_1e_2)$, ktoré sú tvaru $ue_1e_2$, $u \in K(e_1e_2)$. Teda prvky $xe_2e_1e_2 = xe_1e_2$ a $ye_1e_1e_2 = ye_1e_2$ sú prvkami grupy $G(e_1e_2)$. Teda aj ich súčin $xe_1e_2ye_1e_2 = xye_1e_2$ patrí do grupy $G(e_1e_2)$, č. b. t. d.

**Veta 1.** *Ak $x \in K(e_1)$, $y \in K(e_2)$, potom $xy \in K(e_1e_2)$.*

Dôkaz. 1. Nech $xy \in K(e)$, t. j. existuje $t > 0$ také, že $(xy)^t = e$. Je $e_1e_2e = e_1e_2(xy)^t = [xye_1e_2]^t \in G(e_1e_2)$, teda $e_1e_2e = e_1e_2$.

2. Nech pre $n > 0$ je $x^n = e_1$. Platí $e = (xy)^t = xA$, kde $A = (yx)^{t-1}y$. Z toho $e = e^2 = xeA = x(xA)A = x^2A^2$. Indukciou $e = x^nA^n$, $e = e_1A^n$. Z toho $ee_1 = e_1e_1A^n = e_1A^n = e$, t. j. $ee_1 = e$.

3. Podobne nech pre $m > 0$ je $y^n = e_2$. Potom $e = (xy)^t = By$, kde $B = x(yx)^{-1}$, teda $e = e^2 = Bey = B(By)y = B^2y^2$. Indukciou $e = B^my^n = B^me_2$. Teda $ee_2 = B^me_2e_2 = B^me_2 = e$, t. j. $ee_2 = e$.

Zo vzťahu dokázaného sub 1 vyplýva teda: $e_1e_2 = e_1e_2e = (e_1e)(e_2e) = e$.

Dôsledok. Nech $x \in G(e_1)$, $y \in K(e_2)$, pričom $e_1 \leqq e_2$. Potom $xy \in G(e_1)$.

Poznámka 1. Vetu 1 možno sformulovať tiež takto:

Zobrazenie $h$ pologrupy $S$ na $I(S)$, ktoré každému prvku $x \in S$ priraďuje idempotent, ku ktorému $x$ patrí, je homomorfizmus.

Inými slovami:

Rozklad čiastočne komutatívnej periodickej pologrupy $S$ daný jej $K$-triedami je vytvárajúcim rozkladom[1]) na $S$. Príslušná faktorová pologrupa $\mathscr{K}$ je izomorfná s polozväzom $I(S)$.

**Lemma 3.** *Nech $S$ je periodická pologrupa. Nech K-triedy sú čiastočné pologrupy v $S$. Potom rozklad na pologrupe $S$ daný jej K-triedami je najjemnejší rozklad pologrupy $S$ na disjunktné, čiastočné pologrupy.*

Dôkaz vyplýva z toho, že žiadna K-trieda sa nedá písať v tvare súčtu dvoch disjunktných pologrúp, pretože obidve by museli obsahovať po jednom idempotente, čo nie je možné (lebo K-trieda má jediný idempotent).

**Veta 2.** *V čiastočne komutatívnej periodickej pologrupe je rozklad na K-triedy najjemnejším rozkladom na čiastočné pologrupy.*

Dôkaz. Vzhľadom na vetu 1 sú K-triedy čiastočné pologrupy. Potom je veta 2 dôsledkom lemmy 3.

---

[1]) Vytvárajúcim rozkladom nazývame rozklad určený kongruenciou.

**Definícia 1.** *Nech $S$ je pologrupa. Potom nazývame*

*a) ideál $I = \{x\} \cup Sx$ ľavým hlavným ideálom vytvoreným prvkom $x$ [znak $(x)_L$],*

*b) ideál $I = \{x\} \cup xS$ pravým hlavným ideálom vytvoreným prvkom $x$ [znak $(x)_R$],*

*c) ideál $I = \{x\} \cup Sx \cup xS \cup SxS$ obojstranným hlavným ideálom vytvoreným prvkom $x$ [znak $(x)$].*

*Ďalej nazývame (podľa [2]) množinu všetkých prvkov vytvárajúcich tenže ľavý hlavný ideál ľavou triedou (znak $F_L$). Ľavú triedu prvkov vytvárajúcich ideál $(x)_L$ označíme $F_L(x)$.*

*Analogicky definujeme pravú triedu $F_R$ [$F_R(x)$] a obojstrannú triedu $F$ [$F(x)$].*

Zrejme ľavé triedy sú navzájom disjunktné (takisto pravé a obojstranné triedy).

V nasledujúcich úvahách lemmy označené * platia aj v prípade, že výraz „ľavý hlavný ideál" nahradíme výrazom „pravý hlavný ideál", resp. „obojstranný hlavný ideál", výraz „ľavá trieda" nahradíme výrazom „pravá trieda", resp. „obojstranná trieda". V dôkazoch sa postupuje rovnako ako v prípade ľavých hlavných ideálov a ľavých hlavných tried.

V lemmách 4—7 budeme uvažovať čiastočne komutatívnu periodickú pologrupu $S$.

* **Lemma 4.** *Nech $x \in K(e)$. Potom $(x)_L \cap K(e') \neq \emptyset$ vtedy a len vtedy, keď $e' \leqq e$.*

Dôkaz. Nech $e' \leqq e$. Potom podľa dôsledku vety 1 je $e'x \in G(e')$, teda $(x)_L \cap K(e') \neq \emptyset$.

Nech $(x)_L \cap K(e') \neq 0$. Potom pre $y \in K(e^*)$ je $yx \in K(e')$. Potom vzhľadom na vetu 1 je $e^*e = e'$, teda $e^*e = e'e$ a teda $e'e = e'$, čo znací $e' \leqq e$.

* **Lemma 5.** *Nech $x \in K(e)$. Potom $F_L(x) \subset K(e)$.*

Dôkaz. Nech $y \in F_L(x)$, t. j. $(x)_L = (y)_L$ a nech $y \in K(e')$. Platí $y \in (x)_L \cap K(e')$, teda $(x)_L \cap K(e') \neq \emptyset$ a teda podľa lemmy 3 je $e' \leqq e$. Takisto však $(y)_L \cap K(e) \neq \emptyset$, teda $e \leqq e'$. Dostávame $e \leqq e' \leqq e$, odkiaľ $e = e'$.

**Lemma 6.** *Pre každý prvok $e \in I(S)$ platí $G(e) = F(e) = F_L(e)$.*

Dôkaz. Nech $x \in G(e)$. Potom $x = xe$, z čoho $(x)_L \subset (e)_L = (e)$. Zrejme $e \in (x)_L$, teda $(e) \subset (x)_L$. Z toho vyplýva ďalej, že $(x)_L = (e)$. Platí teda $G(e) \subset F_L(e)$ a $G(e) \subset F(e)$.

Nech $x \in F(e)$ ($x \in F_L(e)$). Potom pre isté $y \in S$ platí $x = ye = (ye)\, e = xe$. Podľa lemmy 5 je $x \in K(e)$ a podľa lemmy 1 je $x \in G(e)$.

Úhrnom $F(e) = G(e) = F_L(e)$.

* **Veta 3.** *Nech $S$ je čiastočne komutatívna periodická pologrupa. Potom:*

*a) Rozklad daný na pologrupe $S$ jej $F$-triedami je zjemnením rozkladu daného na $S$ jej $K$-triedami. Pritom je každá maximálna grupa $G(e)$ jednou $F$-triedou.*



*b) Rozklad daný na $S$ jej $F_L$-triedami je zjemnením rozkladu daného na $S$ jej $F$-triedami. Pritom je každá maximálna grupa $G(e)$ jednou $F_L$-triedou.*

Dôkaz. a) vyplýva z lemmy 5—6.

b) Nech $x, y \in F_L$. Potom $(x)_L = (y)_L$, z čoho vyplýva $x \in (y)_L \subset (y)$, teda $(x) \subset (y)$. Podobne $(y) \subset (x)$. Teda $(x) = (y)$, čiže $F(x) = F(y)$. Ďalšie tvrdenie vety vyplýva z lemmy 6.

Nech $S$ je čiastočne komutatívna periodická pologrupa. V množine $F_L$-tried zaveďme teraz čiastočné usporiadanie a podobne v množine $F_R$-tried a F-tried.

**Definícia 2.** *Budeme písať, že $F_L(x) \prec F_L(y)$ vtedy a len vtedy, keď $(x)_L \subsetneq (y)_L$.*

Rovnako zavedieme reláciu $\prec$ v množine $F_R$-tried a v množine F-tried.

Poznámka 2. Množina $F_L$-tried (označme ju $\mathscr{F}_L$) je vzhľadom na reláciu danú definíciou 2 čiastočne usporiadanou množinou, ktorá je izomorfná s čiastočne usporiadanou množinou ľavých hlavných ideálov (usporiadaných pomocou množinovej inklúzie).

To isté platí o množine $F_R$-tried ($\mathscr{F}_R$) a množine F-tried ($\mathscr{F}$).

**Veta 4.** *Čiastočne usporiadaná množina $\mathscr{F}$ je homomorfným obrazom čiastočne usporiadanej množiny $\mathscr{F}_L$ ($\mathscr{F}_R$); príslušný homomorfizmus je daný množinovou inklúziou.*

*Čiastočne usporiadaná množina $\mathscr{K}$ je homomorfným obrazom čiastočne usporiadanej množiny $\mathscr{F}$; príslušný homomorfizmus je daný množinovou inklúziou.*

Dôkaz. Nech $F_L(x) \prec F_L(y)$. Vtedy $x \in (x)_L \subset (y)_L \subset (y)$, teda $(x) \subset (y)$, čiže $F(x) \prec F(y)$. Z toho a z vety 3 vyplýva prvé tvrdenie.

Nech $F(x) \prec F(y)$, $x \in K(e)$, $y \in K(e')$. Vtedy $e \in (x) \subset (y)$, teda $e \in (y)$, odkiaľ podľa vety 1 platí $e \leqq e'$. Z toho a z vety 3 vyplýva tvrdenie.

* **Veta 5.** *Ideál $(x)_L$ je súčtom všetkých $F_L$-tried, ktoré sú v relácii $F_L \prec F_L(x)$.*

Dôkaz. Nech $y \in (x)_L$ a nech $y' \in F_L(y)$. Potom $y' \in (y')_L = (y)_L \subset (x)_L$, teda $y' \in (x)_L$. Platí teda $F_L(y) \subset (x)_L$, $F_L(y) \prec F_L(x)$.

Zrejme pre každé $F_L$, ktoré je v relácii $F_L \prec F_L(x)$, platí $F_L \subset (x)_L$.

* **Lemma 7.** *Nech $x \in K(e)$. Potom $G(e) = F_L(e) \prec F_L(x)$.*

Dôkaz. Pre isté prirodzené číslo $n$ platí $x^n = e$. Potom $e = x^{n-1}x \in (x)_L$, teda $(e) \subset (x)_L$, čiže $G(e) = F_L(e) \prec F_L(x)$ (lemma 6).

**Definícia 3.** *Budeme hovoriť, že čiastočne usporiadaná množina $M$ (usporiadanie označme znakom $\leqq$) je usmernená nadol [6], ak ku každej dvojici prvkov $x, y \in M$ existuje prvok $z \in M$ taký, že $z \leqq x$, $z \leqq y$.*

* **Veta 6.** *Čiastočne usporiadaná množina $\mathscr{F}_L$ je usmernená nadol.*

Dôkaz. Nech $x \in K(e)$, $y \in K(e')$. Podľa lemmy 7 je $G(e) \prec F_L(x)$, $G(e') \prec F_L(y)$. Avšak $(ee') \subset (e)$, $(ee') \subset (e')$, teda $G(ee') \prec G(e) \prec F_L(x)$, $G(ee') \prec G(e') \prec F_L(y)$.

Poznámka 3. Podobne ako v práci [5] zaveďme analogicky k pojmu multizväzu [3] pojem multipolozväzu:

Nech $P$ je čiastočne usporiadaná množina (usporiadanie označme $\leqq$). Budeme hovoriť, že $P$ je multipolozväz, ak je splnená axióma: nech $x, y \in P$; ak existuje také $a \in P$, že $a \leqq x$, $a \leqq y$, potom existuje aj také $z \in P$, že $a \leqq z$, $z \leqq x$, $z \leqq y$ a že z podmienky $b \leqq x$, $b \leqq y$, $z \leqq b$ vyplýva $b = z$.

Z predošlých úvah je zrejmé: V prípade, že každý rastúci reťazec $F_L$-tried je konečný, je množina $F_L$-tried multipolozväzom, v ktorom pre každé $x, y$ je množina prvkov $z$ neprázdna. (Niekedy je množina $F_L$-tried dokonca polozväzom.)

Rovnaké tvrdenie platí pre množinu $F_R$-tried a F-tried.

**Veta 7.** *Nech $x, y \in K(e)$. Potom každý zo vzťahov a) $F_L(xy) = F_L(y)$, b) $F_L(yx) = F_L(y)$ je ekvivalentný so vzťahom $F_L(y) = G(e)$.*

Dôkaz. Poznamenajme najprv, že vzťah $F_L(y) = G(e)$ je ekvivalentný so vzťahom $y \in G(e)$.

a) Nech $y \in G(e)$, potom podľa lemmy 1 a 6 je $F_L(xy) = G(e) = F_L(y)$.

Nech $F_L(xy) = F_L(y)$, t. j. $(xy)_L = (y)_L$. Teda pre isté $z \in S$, $z \in K(e')$ je $y = zxy$, alebo $y = xy$ (druhý prípad je však zahrnutý v prvom pre $z = x$). Pretože $y \in K(e)$, podľa vety 1 musí $K(e) \leqq K(e')$, teda $ee' = e$. Avšak aj $x \in K(e)$, teda podľa vety 1 je $zx \in K(ee') = K(e)$, t. j. pre isté prirodzené číslo $n$ platí $(zx)^\nu = e$. Platí však $y = zxy = (zx)(zxy) = (zx)^2 y = \ldots = (zx)^\nu y = ey$, teda podľa lemmy 1 je $y \in G(e)$.

b) Ak $y \in G(e)$, podobne ako v a) platí $F_L(yx) = F_L(y)$.

Nech $(y)_L = (yx)_L$, teda pre isté $z \in S$, $z \in K(e')$, je $y = zyx$, alebo $y = yx$. Pre isté prirodzené čísla $m, n$ musí platiť $z^m = e'$, $x^\nu = e$. Pretože $y = zyx = z(zyx)x = z^2yx^2 = \ldots = z^{mn}yx^{mn} = e'ye$. Podľa vety 1 vyplýva z toho $ee' = e$ a ďalej $y = ey$, čo značí podľa lemmy 1, že $y \in G(e)$.

Dôsledok. a) $F_L(x^\nu) = F_L(x^{\nu+1})$ platí vtedy a len vtedy, keď $F_L(x^\nu)$ je grupa. b) Ak $F_L(x) \subset K(e)$, potom existuje prirodzené číslo $n$ také, že $F_L(x^\nu) = G(e)$.

**Definícia 4.** *Prvok $x$ pologrupy $S$ nazývame regulárnym* [1] *vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $z \in S$ taký, že $xzx = x$.*

**Veta 8.** *Nech $S$ je čiastočne komutatívna periodická pologrupa. Potom prvok $x \in S$ je regulárny vtedy a len vtedy, ak patrí do niektorej maximálnej grupy $G(e)$.*

Dôkaz. Nech $x \in G(e)$. Potom existuje prvok $x^{-1} \in G(e)$ taký, že $x^{-1}x = e$. To značí, že pre $x$ platí $xx^{-1}x = x$;

Nech $x$ je regulárny prvok. Teda existuje prvok $y \in S$ taký, že $xyx = x$. Potom však $xy = (xyx)\,y = (xy)(xy)$, čiže $xy$ je idempotent. Podľa lemmy 6 je $F(xy) = G(xy)$. Avšak $(x) = (xyx) \subset (xy) \subset (x)$ odkiaľ $(x) = (xy)$, teda $x \in G(xy)$.

## 3. Rozklad na Q-triedy

Zaveďme teraz ďalší rozklad na pologrupe $S$. Za tým účelom zavedieme pojem hlavných kváziideálov v zhode s pojmom kváziideálov v práci [4].



**Definícia 5.** *Nech $S$ je pologrupa. Množinu $M = \{x\} \cup [Sx \cap xS]$ nazveme hlavným kváziideálom vytvoreným prvkom $x$ (znak $(x)_Q$).*

Množinu prvkov vytvárajúcich tenže hlavný kváziideál budeme nazývať kvázitriedou (Q-trieda). Kvázitriedu, do ktorej patrí prvok $x$, budeme označovať $Q(x)$.

Vzhľadom na definíciu sú kvázitriedy disjunktné.

Poznámka 4. Ľahko sa overí tvrdenie: Ak $y \in (x)_Q$, potom $(y)_Q \subset (x)_Q$.

**Veta 9.** *Platí: a) $(x)_Q = (x)_L \cap (x)_R$; b) $Q(x) = F_L(x) \cap F_R(x)$.*

Dôkaz. Tvrdenie a) je zrejmé.

b) Ukážeme najprv, že $Q(x) \subset F_L(x) \cap F_R(x)$. Zrejme $x \in F_L(x) \cap F_R(x)$. Nech $y \in Q(x)$, $y \neq x$. Potom pre isté $s, s' \in S$ platí $y = sx$, $y = xs'$ a teda $(y)_L \subset (x)_L$, $(y)_R \subset (x)_R$. Odtiaľ vyplýva $F_L(y) \prec F_L(x)$, $F_R(y) \prec F_R(x)$, teda $y \in F_L(x)$, $y \in F_R(x)$, čiže $y \in F_L(x) \cap F_R(x)$, čím sme dokázali $Q(x) \subset F_L(x) \cap F_R(x)$.

Treba ešte ukázať, že platí $F_L(x) \cap F_R(x) \subset Q(x)$. Zrejme $x \in Q(x)$. Nech $y \in F_L(x) \cap F_R(x)$, $y \neq x$. Potom pre isté $s, s' \in S$ platí $y = sx$, $y = xs'$, teda $y \in Sx \cap xS$, čiže $y \in (x)_Q$, odkiaľ $(y)_Q \subset (x)_Q$. Pretože však $y \in F_L(x) \cap F_R(x)$, pre isté $z, z' \in S$ platí tiež $x = zy$, $x = yz'$, odkiaľ, tak ako v predošlom, vyplýva $(x)_Q \subset (y)_Q$, čo spolu dáva $(x)_Q = (y)_Q$ a teda $y \in Q(x)$. Dostávame $F_L(x) \cap F_R(x) \subset Q(x)$.

Poznámka 5. Ľahko sa dá ukázať, že prenik hlavných kváziideálov je kváziideál, ktorý nemusí byť hlavným kváziideálom. Naproti tomu súčet hlavných kváziideálov nemusí byť ani kváziideálom. Ďalej platí: súčin (v zmysle násobenia komplexov) hlavných kváziideálov nemusí byť hlavným kváziideálom.

Príklad. Nech $S$ je voľná pologrupa s množinou vytvárajúcich prvkov (generátorov) $\{a_1, a_2\}$. Potom $(a_i)_Q$ $(i = 1, 2)$ je množina prvkov, ktoré majú jeden z tvarov $a_i$, $a_iaa_i$, kde $a$ je ľubovoľný prvok z $S$.

Súčet hlavných kváziideálov $(a_1)_Q$ a $(a_2)_Q$ je množina prvkov, ktoré majú jeden z tvarov $a_1, a_2, a_1aa_1, a_2aa_2$, kde $a$ je ľubovoľný prvok z $S$. Ak by súčet bol kváziideál, musel by doň patriť aj prvok $a_1a_2$, ktorý však, ako hneď vidieť, doň nepatrí.

Súčin $(a_1)_Q \cdot (a_2)_Q$ (v zmysle násobenia komplexov) hlavných kváziideálov $(a_1)_Q$ a $(a_2)_Q$ je množina prvkov, ktoré majú jeden z tvarov $a_1a_2, a_1a_2aa_2, a_1a'a_1a_2, a_1a'a_1a_2aa_2$, kde $a, a'$ sú ľubovoľné prvky z $S$. Teda patrí doň napr. prvok $a_1a_2a_2a_2$. To však značí, že súčin $(a_1)_Q \cdot (a_2)_R$ nie je hlavný kváziideál.

V ďalšom uvažujeme čiastočne komutatívnu periodickú pologrupu $S$.

Z vety 9 vyplýva:

**Lemma 8.** *Rozklad daný na $S$ jej Q-triedami je zjemnením rozkladu na $S$ daného $F_L$-triedami.*

Zaveďme reláciu čiastočného usporiadania v množine $Q$-tried takto:

**Definícia 6.** *Budeme písať, že $Q(x) \prec Q(y)$ vtedy a len vtedy, keď $(x)_Q \subset (y)_Q$.*

Poznámka 6. Množina $Q$-tried je vzhľadom na reláciu danú definíciou 6 čiastočne usporiadanou množinou.

**Veta 10.** *Platí: $(x)_Q$ je súčtom všetkých $Q$-tried, ktoré sú v relácii $Q \prec Q(x)$.*

Dôkaz. Platí $Q(x) \subset (x)_Q$, pretože ak $y \in Q(x)$, platí $(y)_Q = (x)_Q$, teda $y \in (x)_Q$. Nech teraz $y \in (x)_Q$ a nech $y' \in Q(y)$. Potom $(y')_Q = (y)_Q \subset (x)_Q$ (pozri pozn. 4), teda $y' \in (x)_Q$. Z toho vyplýva $Q(y) \subset (x)_Q$ a $Q(y) \prec Q(x)$. Nech teraz $Q(y) \prec Q(x)$. Potom $Q(y) \subset (y)_Q \subset (x)_Q$.

**Lemma 9.** *Platí: $Q(e) = G(e)$ a pre všetky $x \in K(e)$ je $Q(e) \prec Q(x)$.*

Dôkaz. Tvrdenie $Q(e) = G(e)$ vyplýva z vety 9 a vety 4. Ďalej zrejme $(ex)_Q \subset (x)_Q$, z čoho vyplýva $Q(e) \prec Q(x)$.

**Veta 11.** *Čiastočne usporiadaná množina $Q$-tried je vzhľadom na reláciu danú definíciou 6 množina nadol usmernená.*

Dôkaz. Nech $Q_1 \subset K(e)$, $Q_2 \subset K(e')$. Podľa lemmy 9 je $G(e) = Q(e) \prec Q_1$. Zrejme $(ee')_Q \subset (e)_Q$, t. j. $Q(ee') \prec Q(e)$. Úhrnom $Q(ee') \prec Q_1$. Rovnako sa dokáže $Q(ee') \prec Q(e')$.

**Veta 12.** *Čiastočne usporiadaná množina $F_L$-trieda je homomorfným obrazom čiastočne usporiadanej množiny $Q$-tried, príslušný homomorfizmus je daný množinovou inklúziou.*

Dôkaz. Nech $Q(x) \prec Q(y)$. Podľa lemmy 8 $Q(x) \subset F_L(x)$ a $Q(y) \subset F_L(y)$. Podľa predpokladu $(x)_Q \subset (y)_Q$. Ak $x = y$, zrejme $F_L(x) \prec F_L(y)$. V druhom prípade sa $x$ dá vyjadriť v tvare $x = zy$ $(z \in S)$. Teda $(x)_L \subset (y)_L$, čiže $F_L(x) \prec F_L(y)$.

## 4. Hlavné ideály a idempotenty

V tomto odseku ukážeme, že pomocou predchádzajúcich úvah možno dokázať niektoré tvrdenia, ktoré sa týkajú ideálov, resp. vzťahu ideálov a idempotentov v čiastočne komutatívnej periodickej pologrupe.

V ďalšom je $S$ čiastočne komutatívna periodická pologrupa.

**Veta 13.** *Ak v pologrupe $S$ existuje minimálny ľavý ideál $\mathfrak{n}$, tak je jediný a je rovný minimálnemu pravému a minimálnemu obojstrannému ideálu. Pritom je $\mathfrak{n}$ grupa.*

Dôkaz. Zrejme minimálny ľavý ideál je hlavný (takisto pravý, obojstranný). — Nech $S$ má minimálny ľavý ideál $(x)_L$, nech $x \in K(e)$. Podľa lemmy 7 platí $G(e) = F(e) \prec F_L(x)$, teda vzhľadom na minimálnosť $(x)_L$ musí $G(e) = F_L(x)$. Podľa vety 5 je teda $(x)_L = G(e) = (e)_L$ a teda $(x)_L$ je grupa.

Nech $(x)$ nie je minimálny obojstranný ideál; teda existuje $(x') \subset (x)$, čo značí $F(x') \prec F(x)$. Potom však podľa vety 4 a lemmy 7 musí $x' \in K(e')$, kde $e' \leqq e$, $e' \neq e$, teda podľa vety 3 je $G(e') = F(e') = F_L(e') \prec F_L(x') \prec F_L(x)$, čiže $(x')_L \subset (x)_L$, čo je v spore s minimálnosťou $(x)_L$. Teda $(x)$ je minimálny obojstranný ideál, pričom podľa vety 3 je $(x) = G(e) = (x)_L$. — Podobne by sa dokázalo tvrdenie pre pravý minimálny ideál.

Nech $(e_1)_L$, $(e_2)_L$ sú dva rôzne minimálne ľavé ideály. Potom ak $e_2e_1 \neq e_1$, je $(e_1)_L$ nie minimálny (pretože $(e_2e_1)_L \subset (e_1)_L$), ak však $e_2e_1 = e_1e_2 = e_1$ je zas $(e_2)_L$ nie minimálny (pretože $(e_1e_2)_L \subset (e_2)_L$, $e_2 \neq e_1$). Teda nemôžu existovať dva rôzne minimálne ľavé ideály.

**Veta 14.** *Nutná a postačujúca podmienka, aby v pologrupe $S$ existoval minimálny ľavý ideál, je, aby existovalo $e \in I(S)$ také, že platí $ee_i = e$ pre každé $e_i \in I(S)$. (T. j. pologrupa idempotentov má nulu.)*

Dôkaz. Ak v $I(S)$ existuje $e$ s predpokladanou vlastnosťou, potom podľa dôsledku vety 1 je $Se \subset G(e)$ a teda vzhľadom na vetu 5 je $(e)_L = G(e)$ minimálny ľavý ideál.

Nech existuje v $S$ minimálny ľavý ideál $\mathfrak{n}$. Potom podľa vety 13 je $\mathfrak{n} = (e)_L = G(e)$, $e \in I(S)$. Nech $e_i \in I(S)$. Potom je $e_ie \in G(e)$ a teda $e_ie = ee_i = e$.

Poznámka 7. Ak má každý klesajúci reťazec ľavých tried minimálny prvok, má aj každý klesajúci reťazec pravých (obojstranných) tried minimálny prvok.

**Veta 15.** *Ak pre isté $x \in S$ platí $S = (x)_L$, tak existuje taký idempotent $e \in S$, že platí $ee_i = e_i$ pre všetky idempotenty $e_i \in I(S)$. (T. j. pologrupa idempotentov má jednotku.)*

Dôkaz. Z podmienky vety vyplýva, že čiastočne usporiadaná množina $F_L$-tried má najväčší prvok a teda to isté platí aj pre polozväz $I(S)$, ktorý je podľa vety 4 a 1 jej homomorfným obrazom.

Poznámka 8. Podmienka vo vete 15 je nutná, ale nie postačujúca na to, aby pre isté $x \in S$ platilo $S = (x)_L$, ako ukazuje príklad:

Nech pologrupa $S = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, kde násobenie je dané takto: $a_3a_2 = a_1$, pre $a_ia_k \neq a_3a_2$ je $a_ia_k = a_0$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$. Idempotent je jediný $a_0$; avšak pre žiadne $a \in S$ neplatí ani $S = (a)_L$, ale ani $S = (a)_R$, ani $S = (a)_Q$, ani $S = (a)$.

**Veta 16.** *Nech v $S$ je každý klesajúci (rastúci) reťazec do sebe zapadajúcich ľavých hlavných ideálov konečný. Potom je v $S$ konečný aj každý klesajúci (rastúci) reťazec idempotentov.*

Dôkaz. Z predpokladov vyplýva, že každý klesajúci reťazec v čiastočne usporiadanej množine $\mathscr{F}_L$ je konečný. Tvrdenie vety vyplýva z toho, že polozväz $I(S)$ je homomorfným obrazom čiastočne usporiadanej množiny $\mathscr{F}_L$ (veta 4, poznámka 1).

Tvrdenie o rastúcich reťazcoch sa dokáže podobne.

Poznámka 9. Rovnaké tvrdenie platí pre kváziideály.

Poznámka 10. Obrátená veta k vete 16 neplatí, ako ukazuje príklad: Nech $S$ je pologrupa, ktorej prvkami sú dvojice celých čísel $(m, n)$. Násobenie je definované takto: a) $(m, n)(m', n') = (mm', n')$ ak $m, m'$ sú nesúdeliteľné, b) $(m, n)(m', n') = (0, 0)$ ak $m, m'$ sú súdeliteľné. — Idempotent je jediný $(0,0)$. Existuje však klesajúci reťazec do seba zapadajúcich ľavých hlavných ideálov

$$((p_1, n))_L \supset ((p_1p_2, n))_L \supset ((p_1p_2p_3, n))_L \supset \dots$$

$(p_1, p_2, p_3, \dots$ sú navzájom rôzne prvočísla), ktorý nie je konečný.

## 5. Homomorfizmy $F$-tried a $K$-tried

V celom tomto odseku $S$ značí čiastočne komutatívnu periodickú pologrupu.

**Veta 17.** *Nech $e_3 = e_1e_2$. Potom zobrazenie $x = xe_1$ ($x \in K(e_2)$) je homomorfné zobrazenie množiny $K(e_2)$ do $K(e_3)$; (označme ho $\varphi_3^2$).*

Dôkaz. Podľa vety 1 pre $x \in K(e_2)$ platí $xe_1 \in K(e_3)$. Pre $x_1, x_2 \in K(e_2)$ platí $(x_1e_1)(x_2e_1) = (x_1x_2)\, e_1$.

Poznámka 11. Nech $e_1 \leqq e_2 \leqq e_3$. Potom pre zobrazenie $\varphi_2^3$ a $\varphi_1^2$ zrejme platí $\varphi_1^2\varphi_2^3 = \varphi_1^3$.

**Veta 18.** *Nech $e$ je idempotent v $S$. Pre homomorfné zobrazenie $x \to xe$ pologrupy $S$ do seba (označme ho $\varphi$) platí:*

*a) $\varphi$ je homomorfným zobrazením pologrupy $\mathscr{K}$ do seba,*

*b) $\varphi$ je homomorfným zobrazením čiastočne usporiadanej množiny $\mathscr{F}_L$ (prípadne $\mathscr{F}_R$, $\mathscr{F}$) do seba.*

Dôkaz. a) Treba ukázať: $\varphi K(e)\, \varphi K(e') = \varphi K(ee')$. Nech homomorfizmus $\varphi$ je určený idempotentom $e^* \in S$. Potom podľa vety 1 je $\varphi K(e) \subset K(ee^*)$, $\varphi K(e') \subset K(ee^*)$ a znova podľa vety 1 je $K(ee^*)\, K(e'e^*) \subset K(ee'e^*)$ a teda $\varphi K(e)\, \varphi K(e') \subset K(ee^*)\, K(e'e^*) \subset K(ee'e^*)$ avšak v $\mathscr{K}$ je $K(ee'e^*) = \varphi K(ee')$.

b) Najprv ukážeme, že ku každej $F_L$-triede $F_L(x)$ existuje taká trieda $F_L(y)$, že $\varphi F_L(x) \subset F_L(y)$. Nech $x' \in F_L(x)$. To značí, alebo $x' = x$, alebo $x' = sx$ pre isté $s \in S$. Ak $x' = sx$, platí $x'e = sxe = sex$, čo značí $x'e \in (ex)_L$. Teda $(x'e)_L \subset (xe)_L$. Podobne sa ukáže $(xe)_L \subset (x'e)_L$, čo spolu dáva $(xe)_L = (x'e)_L$, t. j. $F_L(x'e) = F_L(xe)$. To platí aj pre $x' = x$. Trieda $F_L(x)$ sa teda zobrazí do triedy $F_L(y)$, $y = xe$.

Ďalej zrejme platí: ak $F_L(x') \prec F_L(x)$, $\varphi F_L(x') \subset F_L(y')$, $\varphi F_L(x) \subset F_L(y)$, potom $F_L(y') \prec F_L(y)$.

Poznámka 12. Ľahko sa vidí, že platí $\varphi F_L(x) \subset F_L(y) \prec F_L(x)$, ale pritom nemusí $\varphi F_L(x) = F_L(y)$.

Poznámka 13. *Nech $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_3 = e_4$. Nech $\varphi_4^1(\overline{\varphi}_4^1)$ je homomorfné zobrazenie z vety 17 dané prvkom $e_2$ ($e_3$). Potom zobrazenia $\varphi_4^1$ a $\overline{\varphi}_4^1$ sú na grupe $G(e_1)$ totožné.*

Dôkaz. Pre $x \in G(e_1)$ platí $xe_2 = (xe_1)\, e_2 = xe_4 = (xe_1)\, e_3 = xe_3$.

Poznámka 14. Nech všetky $K$-triedy v $S$ sú grupy. Nech zobrazenie $\Gamma$ pologrupy $S$ na $S$ je automorfizmom na každej z nich. Nech pre ľubovoľný idempotent $e \in S$ homomorfné zobrazenie $x \to xe$ z vety 17 (označme ho $\varphi$) má vlastnosť $\varphi\Gamma x = \Gamma\varphi x$ pre každé $x \in S$. Potom zobrazenie $\Gamma$ je automorfizmom na $S$.

Dôkaz tvrdenia je obdobný ako dôkaz analogického tvrdenia v práci [5].

*

Vzniká prirodzená otázka: Nech je daný polozväz $I$ a ku každému prvku $e \in I$ je daná čiastočne komutatívna periodická pologrupa $K_e$ s jediným idem-



potentom $e$. Či existuje taká čiastočne komutatívna periodická pologrupa $S$, ktorej polozväz idempotentov je (okrem izomorfizmu) $I$ a pre každé $e \in I$ $K$-trieda patriaca k idempotentu $e$ je čiastočnou pologrupou pologrupy $S$ zhodnou (okrem izomorfizmu) s pologrupou $K(e)$. — Odpoveď na túto otázku je kladná. Uvedieme dve konštrukcie pologrupy $S$ z daného polozväzu $I$ a z daného systému pologrúp $K_e$.

1. Ku každej dvojici prvkov $e, e' \in I$, pre ktorú platí $e' \leqq e$, nech je dané homomorfné zobrazenie $\varphi_{e'}^e$, pologrupy $K_e$ do pologrupy $K_{e'}$, a to tak, že platí: a) $\varphi_e^e$ je identické zobrazenie, b) ak $\varphi_{e'}^e$, prislúcha dvojici $e' \leqq e$, $\varphi_e^{e''}$ dvojici $e \leqq e''$, dvojici $e' \leqq e''$ prislúcha zobrazenie $\varphi_{e'}^{e''} = \varphi_{e'}^e\varphi_e^{e''}$. Takéto homomorfizmy vždy existujú, ak $e' \leqq e$, stačí napr. položiť $\varphi_{e'}^e x = e'$ pre každé $x \in K_e$.

Označme $S$ množinový súčet všetkých množín $K_e$. Definujme na $S$ násobenie $\circ$ takto: Nech $x \in K_e$, $y \in K_{e'}$. Potom $x \circ y = \varphi_{ee'}^e\varphi_{e'}^{ee'}y$.

2. Označme $S$ množinový súčet všetkých množín $K_e$. Definujme na $S$ násobenie $\circ$ takto: a) nech $x, y \in K_e$, potom $x \circ y = xy$ (súčin v $K_e$), b) nech $x \in K_e$, $y \in K_{e'}$, $e \neq e'$. Ak $e < e'$, potom $x \circ y = y \circ x = x$. Ak $e, e'$ sú neporovnateľné, potom $x \circ y = y \circ x = ee'$.

V obidvoch prípadoch 1, 2 dostávame čiastočne komutatívnu periodickú pologrupu $S$, v ktorej $I(S) = I$ a $K$-trieda patriaca k idempotentu $e$ je práve $K_e$. Dôkaz je ľahký a neuvádzame ho.

Ďalšie takéto pologrupy sa dajú skonštruovať na množine $S$ vhodným skombinovaním konštrukcii 1 a 2.

Avšak nie všetky takéto pologrupy možno skonštruovať uvedenými spôsobmi, ako o tom svedčí rad príkladov, napr. komutatívna periodická pologrupa $S$ vytvorená takto:

Majme polozväz prvkov $e, e'$. Nech $e' < e$. Prvku $e$ priraďme pologrupu $K_e = \{e\}$, prvku $e'$ pologrupu $K_{e'} = \{e', a, b\}$, kde násobenie je dané takto: pre $x_1, x_2 \in K_{e'}$ je $x_1x_2 = e'$. Na množine $S = K_e \cup K_{e'}$ definujme násobenie $\circ$ takto: $e \circ e = e$; pre $x_1, x_2 \in K_{e'}$ je $x_1 \circ x_2 = x_1x_2$; ďalej $e \circ b = b \circ e = e \circ a = a \circ e = b$, $e \circ e' = e' \circ e = e'$.

Je zrejmé, že uvedená pologrupa sa nedá skonštruovať konštrukciou 1 ani 2.

Ľahko sa vidí (pomocou vety 17 a poznámky 11), že v prípade, že $K$-triedy sú pologrupy s jednotkou, dá sa každá čiastočne komutatívna periodická pologrupa vytvoriť konštrukciou 1, pričom $K_e$ sú periodické pologrupy s jednotkou.

### LITERATÚRA


[1] Schwarz Š., К теории периодических полугрупп, Чехослов. мат. журнал 3 (78), (1953), 7—21.

[2] Green J. A., On the structure of semigroups, Annals of Math. 54 (1951), 163—172.

[3] Benado M., Les ensembles partiellement ordonés et le théorème de raffinement de Schreier II, Czechoslov. mat. journ. 80, (1953), 308—344.
[4] Steinfeld O., Über die Quasiideale von Halbgruppen, Publicationes Math. 4 (1956), 262—275.
[5] Kolibiarová B., O komutatívnych periodických pologrupách, Mat. fyz. čas. SAV 3, (1958), 127—135.
[6] Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie, Berlin 1955.

Došlo 15. 10. 1958.

*Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave*



# О ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ

Б. КОЛИБИАРОВА

## Резюме

Периодическую полугруппу $S$, в которой для всякого $e$, $x \in S$ ($e$ — идемпотент) $xe = ex$, будем называть частично коммутативной. Эта полугруппа обладает многими свойствами подобными свойствам периодических полугрупп (исследованных в работах [1] и [5]).

Множество идемпотентов полугруппы $S$ образует частичную полугруппу $I(S)$ полугруппы $S$, являющуюся полуструктурой. Говорим, что элемент $x \in S$ принадлежит к данному идемпотенту $e$, если существует такое натуральное число $n$, что $x^n = e$. Множество всех элементов принадлежащих к идемпотенту $e$ будем называть $K$-классом. $K$-классы образуют факторполугруппу $\mathscr{K}$, которая является полуструктурой. Разбиение полугруппы $S$ на $K$-классы является наиболее мелким разбиением $S$ на частичные полугруппы. В первой части изучаются некоторые свойства полугруппы $\mathscr{K}$.

Множество элементов $x \in S$ порождающих один и тот же главный левый идеал, называется $F_L$-классом (точно так же введем $F_R$-классы и $F$-классы). Множество $\mathscr{F}_L$, элементы которого $F_L$-классы, является множеством направленным внизу (соответствующее отношение частичного упорядочения дано в определении 2). Аналогичное утверждение справедливо и для $\mathscr{F}_R$ и $\mathscr{F}$. Существуют гомоморфные отображения частично упорядоченных множеств: $\mathscr{F}_L(\mathscr{F}_R)$ па $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ на $\mathscr{K}$, полуструктуры $\mathscr{K}$ и $I(S)$ изоморфны. Во второй части изучаются некоторые свойства множеств $\mathscr{F}_L$, $\mathscr{F}_R$ и $\mathscr{F}$.

Далее изучаются квазиидеалы и соответствующие квазиклассы, которые являются пересечением главных левых и правых идеалов (соотв. $\mathscr{F}_L$ и $\mathscr{F}_R$-классов).

В части 4 изучаются некоторые свойства взаимной связи главных идеалов с множествами $\mathscr{F}_L$, $\mathscr{F}_R$, $\mathscr{F}$ и $I(S)$.

В части 5 изучаются гомоморфные отображения $x \to xe$ полугруппы $S$ в $S$ (обозначенные через $\varphi$). Показывается, что например ф гомоморфно отображает $\mathscr{K}$ в $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}_L$ в $\mathscr{F}_L$, и т. д. Конечно приведены две конструкции, показывающие, как из данной системы $I$ частично коммутативных периодических полугрупп (при этом система $I$ частично упорядоченна так, что она является полуструктурой) построить такую полугруппу $S$, которая имеет $K$-классами данные полугруппы.

# ON THE PARTIALLY COMMUTATIVE TORSION SEMIGROUPS

BLANKA KOLIBIAROVÁ

## Summary

We shall call a torsion semigroup $S$ a partially commutative if for every $x$, $e \in S$ ($e$ is an idempotent) $xe = ex$ holds. It has some properties similar to the commutative torsion semigroup (dealt with in [1] and [5]).

The set of idempotents of $S$ forms a subsemigroup $I(S)$ of $S$. $I(S)$ is a semilattice.

The set of all elements $x \in S$, for which $x^n = e$ ($n$ is a natural number, $e \in I(S)$ holds, is denoted as $K(e)$ and called $K$-class $K(e)$. The $K$-classes form a factor semigroup $\mathscr{K}$, which is a semilattice. The decomposition of the semigroup $S$ into $K$-classes is the finest decomposition of $S$ in its subsemigroups.

In the first part, some properties of $\mathscr{K}$ are being dealt with.

The set of elements $x \in S$, which generate the same principal left (right, two-sided) ideal, is called $F_L(F_R, F)$ class. The set of $F_L$ classes is denoted as $\mathscr{F}_L$ and is down oriented (the respective ralation is given in definition 2). The same holds for $\mathscr{F}_R$ and $\mathscr{F}$.

There exist the homomorphisms of the partially ordered sets: one of $\mathscr{F}_L(\mathscr{F}_R)$ onto $\mathscr{F}$, one of $\mathscr{F}$ onto $\mathscr{K}$; the semigroup $\mathscr{K}$ is isomorph to $I(S)$. -- The part 2 deals with some properties of $\mathscr{F}_L$, $\mathscr{F}_R$ and $\mathscr{F}$.

Further are studied the quasiideals and the quasiclasses belon ing to them, which are shown as intersections of principal left and right ideals (resp. of $F_L$ and $F_R$ classes).

The part 4 deals with some properties of ideals with respect to the sets $\mathscr{F}_L$, $\mathscr{F}_R$, $\mathscr{F}$ and $I(S)$.

In part 5 are studied the homomorphisms $x \to xe$ of $S$ into $S$ denoted as $\varphi$. It is shown, that $\varphi$ is a homomorphism of $\mathscr{K}$ into $\mathscr{K}$ and of $\mathscr{F}_L$ into $\mathscr{F}_L$.

At last it is shown in two ways, how to construct from a given system $I$ of partially commutative torsion semigroups ($I$ is a semilattice) a new semigroup $S$, the $K$-classes of which are the given semigroups.