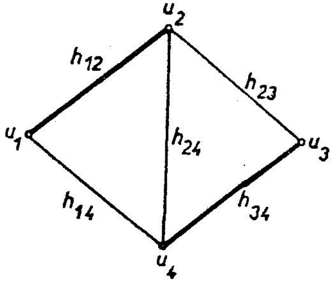
MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, IX, 3-1959

Z TEÓRIE KONEČNÝCH GRAFOV S LINEÁRNYM FAKTOROM II

ANTON KOTZIG, Bratislava

3. Nasýtené grafy

Graf G, v ktorom existuje lineárny faktor, budeme nazývať nasýteným grafom, keď ľubovoľné dva jeho uzly, ktoré sú v relácii Λ, sú v G spojené aspoň jednou hranou. Je známe, že ľubovoľný kompletný graf s párnym



Obr. 4.

počtom uzlov obsahuje lineárny faktor. Priamo z definície nasýteného grafu vyplýva, že kompletný graf s párnym počtom uzlov je nasýtený. Nasýtený graf nemusí však byť kompletný, ako ukazuje napr. graf na obr. 4.

Ako ukážeme v ďalšom, platí toto: nech v istom grafe G_0 obsahujúcom lineárny faktor existujú také dva uzly nespojené hranou, ktoré sú v relácii Λ; t. j. nech G_0 je nenasýtený graf. Ak ku grafu G_0 pridáme hranu spojujúcu takéto dva uzly, vznikne graf G_1, ktorý má to isté jadro ako graf G_0. Pridávať postupne ďalšie a ďalšie hrany spojujúce predtým hranou nespojené uzly, ktoré sú v príslušnom grafe v relácii Λ a tvoriť tak postupne z grafu G_0 grafy $G_1, G_2, \ldots, G_\rho$ — bez toho, že by sa jadro zmenilo — možno len tak dlho, kým v G_i existuje dvojica uzlov nespojených hranou, ktoré sú v relácii Λ. Teda len tak dlho, kým istý graf G_p nie je nasýtený, ináč povedané, kým pridávaním hrán pôvodný graf „nenasýtime" (odtiaľ názov nasýtený graf). Snadno nahliadneme, že počet „krokov", ktoré treba urobiť, aby graf bol nasýtený, je vždy konečný.

Veta 14. *Nech G_0 je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor L_0*

a nech $u \neq v$ sú ľubovoľné dva jeho uzly. Utvorme z grafu G_0 graf G_1 tak, že ku grafu G_0 pridáme novú hranu h spojujúcu uzol u s uzlom v. Platí:

(1) v grafe G_1 existuje lineárny faktor,

(2) je $\widehat{G}_1 = \widehat{G}_0$ práve vtedy, keď uzly u, v sú v grafe G_0 v relácii Λ; ak v grafe G_0 nie sú uzly u, v v relácii Λ, potom h patrí do $\widehat{G}_1$ a $\widehat{G}_0$ je podgrafom grafu $\widehat{G}_1$,

(3) ak už v grafe G_0 existuje istá hrana h' spojujúca uzly u, v, potom je $U^{\Omega}_{G_0} = U^{\Omega}_{G_1}$,

(4) ak graf G_0 je nasýtený, je tiež graf G_1 nasýtený.

Dôkaz. (1) Graf G_0 je podgrafom grafu G_1, množiny uzlov v oboch týchto grafoch sú rovnaké a v G_0 existuje lineárny faktor L_0. Podľa lemmy 3 lineárny faktor L_0 grafu G_0 je tiež lineárnym faktorom grafu G_1. Preto v G_1 existuje lineárny faktor.

(2) Nech uzly u, v sú v relácii Λ v grafe G_0. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že istá hrana $h_1 \in \widehat{G}_1$ nepatrí do $\widehat{G}_0$. Potom však v G_1 existuje α-kružnica vzhľadom na L_0 (označme ju K_1) obsahujúca hranu h_1. Kružnica K_1 nepatrí celá do G_0 (ináč by h_1 patrila do $\widehat{G}_0$ — spor s predpokladom). To je len tak možné, že hrana h (nepatriaca do G_0 a teda ani do L_0) patrí do K_1. Cesta C_1, ktorá vznikne z K_1, ak v nej zrušíme hranu h, patrí celá do G_0 a C_1 je zrejme α-cestou vzhľadom na L_0, ktorá spojuje uzly u, v v grafe G_0. To je spor, lebo sme predpokladali, že uzly u, v sú v relácii Λ v grafe G_0. Preto neexistuje hrana patriaca do $\widehat{G}_1$ a nepatriaca do $\widehat{G}_0$, ak je $u\Lambda v$ v grafe G_0. Pretože $\widehat{G}_0$ je podgrafom grafu $\widehat{G}_1$, je nutne potom $\widehat{G}_0 = \widehat{G}_1$. Ak uzly u, v nie sú v relácii Λ v grafe G_0, t. j. ak v G_0 existuje α-cesta vzhľadom na L_0, ktorá spojuje uzly u, v, potom táto cesta spolu s hranou h tvoria v grafe G_1 istú kružnicu K, ktorá je α-kružnicou vzhľadom na L_0 v grafe G_1. Z toho ihneď vyplýva (lebo K obsahuje h), že hrana h patrí do $\widehat{G}_1$ a pretože h nepatrí do G_0 (teda ani do $\widehat{G}_0$), je nutne $\widehat{G}_0 \neq \widehat{G}_1$. Že jadro $\widehat{G}_0$ je podgrafom jadra $\widehat{G}_1$, je zrejmé.

(3) Nech už v G_0 existuje hrana h' spojujúca uzly u, v a nech w, t sú ľubovoľné dva uzly z G_0 (a teda tiež z G_1). Ak platí $w\Omega t$ v grafe G_0, platí tiež $w\Omega t$ v grafe G_1 (lebo ľubovoľná cesta spojujúca uzly w, t v grafe G_0 je cestou spojujúcou uzly w, t aj v grafe G_1 a ľubovoľný lineárny faktor z G_0 je tiež lineárnym faktorom grafu G_1 — pozri lemmu 3). Nech teraz je $w\Omega t$ v grafe G_1, t. j. nech v G_1 existuje cesta C_1 spojujúca uzly w, t, ktorej ľubovoľná hrana je hranou aspoň jednoho lineárneho faktora grafu G_1. Ak cesta C_1 neobsahuje hranu h, je zrejme C_1 tiež cestou v G_0 a každá jej hrana patrí aspoň do jednoho lineárneho faktora v G_0, čiže je potom $w\Omega t$ aj v grafe G_0. Predpokladajme, že C_1 obsahuje hranu h. Nech L_1 je ten lineárny faktor grafu G_1, ktorý obsahuje hranu h. Ak v L_1 nahradíme hranu h hranou h', dostaneme tak istý lineárny faktor L_1' grafu G_1, ktorý je tiež lineárnym faktorom v G_0 (pritom L_1' obsahuje hranu h'). Hrana h' je teda hranou aspoň jednoho lineárneho faktora grafu G_0, preto ak v ceste C_1 nahradíme hranu h hranou h', dostaneme tak cestu C_1',

ktorá spojuje uzly w, t; celá patrí do G_0 a každá jej hrana je hranou aspoň jednoho lineárneho faktora v G_0; čiže je $u\Omega v$ v grafe G_0. Preto ak uzly u, v sú v grafe G_0 spojené hranou, platí $U_{G_0}^{\lrcorner} = U_{G_1}^{\lrcorner}$.

(4) Nech G_0 je nasýtený graf, t. j. v G_0 neexistujú také dva uzly nespojené hranou, ktoré by boli v relácii Λ. Teda ak dva uzly w, t v G_0 nie sú spojené hranou, potom v grafe G_0 existuje α-cesta vzhľadom na L_0, ktorá spojuje uzly w, t. Táto cesta je však α-cestou vzhľadom na L_0 aj v grafe G_1. Preto nemôžu v grafe G_1 existovať také dva uzly, ktoré by neboli spojené hranou a napriek tomu by boli v relácii Λ; čiže G_1 je nasýtený graf. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Veta 15. *Ľubovoľný nasýtený graf je súvislý.*

Dôkaz. Nech G je nasýtený graf. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že G má aspoň dve komponenty a nech uzly u, v patria do rôznych komponent grafu G. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor v G. V grafe G neexistuje cesta spojujúca uzly u, v a teda neexistuje v G ani α-cesta vzhľadom na L, ktorá by spojovala uzly u, v. Je teda $u\Lambda v$ a pretože u, v nie sú spojené hranou (patria do rôznych komponent), platí nutne: G nie je nasýtený graf. To je spor s predpokladom.

Veta 16. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf, v ktorom existuje aspoň jedna taká hrana h_1, ktorá spojuje uzly u_1, v_1 patriace do rôznych tried rozkladu $\overline{U}_G^{\Omega} = \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}'$; $u_1 \in U_i$; $v_1 \in U_j$; $i \neq j$. Platí:*

(1) hrana h_1 nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G,

(2) buď každý uzol z U_i je v grafe G spojený najmenej jednou hranou s uzlom v_1, alebo každý uzol z U_j je v grafe G spojený najmenej jednou hranou s uzlom u_1.

Dôkaz. Hrana h_1 nemôže patriť do žiadneho lineárneho faktora grafu G, lebo ináč by platilo $u_1\Omega v_1$ a uzly u_1, v_1 by patrili do tej istej triedy rozkladu $\in U_G^{\lrcorner}$ — spor s predpokladom.

Nech L je ľubovoľný lineárny faktor v grafe G. Označme znakom u_2 (resp. v_2) ten uzol z G, ktorý je hranou z L spojený s uzlom u_1 (resp. v_1). Keby v G existovala hrana h_2 spojujúca uzly u_2, v_2, potom by hrana h_2 spolu s hranou h_1 a s hranami z L spojujúcimi uzly u_1, u_2; v_1, v_2 a s uzlami u_1, v_1, u_2, v_2 tvorila α-kružnicu vzhľadom na L; čiže hrana h_1 by patrila do jadra $\widehat{G}$ a existoval by lineárny faktor v grafe G, ktorý obsahuje hranu h_1. To je spor s tým, čo sme o hrane h_1 dokázali vyššie. Tedy v G neexistuje hrana spojujúca uzly u_2, v_2.

Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že ani uzly u_1, v_2 ani uzly u_2, v_1 nie sú spojené hranou v grafe G. Potom však nemôže byť (pozri definíciu nasýteného grafu) ani $u_1\Lambda v_2$ ani $u_2\Lambda v_1$; teda existuje cesta $C_{1,2}$ (resp. $C_{2,1}$), ktorá je α-cestou vzhľadom na L a spojuje uzly u_1, v_2 (resp. uzly u_2, v_1). Podľa vety 12 exituje potom v grafe G aj cesta $C_{1,1}$ spojujúca uzly u_1, v_1 aj cesta $C_{2,2}$ spojujúca uzly u_2, v_2, ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Hrana h_1 spolu s α-cestou $C_{1,1}$ tvorí α-kružnicu vzhľadom na L — spor s prekladom, lebo h_1 napatrí do jadra $\widehat{G}$. Predpoklad, že neexistuje v G ani hrana spojujúca uzly u_1, v_2, ani hrana spojujúca uzly u_2, v_1, viedol ku sporu. Preto buď existuje v G len hrana spojujúca uzly u_1, v_2 (prvý prípad), alebo existuje v G len hrana spojujúca uzly u_2, v_1 (druhý prípad). Tretí prípad, t. j., že existujú v G obe tieto hrany, nie je možný, lebo potom by tieto hrany spolu s hranami z L, ktoré spojujú uzly u_1, u_2; v_1, v_2 tvorili α-kružnicu vzhľadom na L, čo vedie ku sporu s predpokladom, že uzly u_1, v_1 patria do rôznych tried rozkladu $U_G^{\lrcorner}$. Rozoberme prvý prípad: v G existuje hrana h_1 spojujúca uzly u_1, v_1 a existuje tiež hrana spojujúca uzly u_1, v_2. Ak trieda $U_j \in \overline{U}_G^{\lrcorner}$ obsahuje len uzly v_1, v_2 (t. j. ak hrana spojujúca uzly v_1, v_2 patrí do každého lineárneho faktora v G), sme s dôkazom hotoví. Predpokladajme, že trieda U_j obsahuje okrem uzlov v_1, v_2 ešte ďalšie uzly. Potom hrana g spojujúca uzly v_1, v_2 je hranou jadra $\widehat{G}$ a pretože je $v_1\Lambda u_1$, $u_1\Lambda v_2$, platí (podľa vety 10) $v_x\Lambda u_1$ pre ľubovoľný uzol $v_x \in U_j$. Z toho ihneď vyplýva — pretože G je nasýtený graf — že každý uzol z U_j je spojený aspoň jednou hranou s uzlom u_1. Úplne rovnakou úvahou zistíme, že v druhom prípade je každý uzol z U_i spojený aspoň jednou hranou s uzlom v_1.

Teda ak uzol $u_1 \in U_i$ je spojený hranou s uzlom $v_1 \in U_j$ ($i \neq j$; U_i, $U_j \in U_G^{\Omega}$) v nasýtenom grafe G, potom buď každý uzol z U_i je spojený aspoň jednou hranou s uzlom v_1, alebo každý uzol z U_j je spojený aspoň jednou hranou s uzlom u_1. Dôkaz vety je vykonaný.

Veta 17. *Nech G je nasýtený graf a nech U_a je ľubovoľná trieda rozkladu $\overline{U}_G^*$. Ak trieda U_a obsahuje viac než jeden uzol, potom ľubovoľný uzol z U_a je spojený aspoň jednou hranou s ľubovoľným iným uzlom z U_a a ľubovoľná hrana z G spojujúca dva uzly u U_a nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G.*

Dôkaz. Nech u, v sú ľubovoľné dva rôzne uzly z U_a. Je teda $u\Lambda v$ a pretože G je nasýtený graf (pozri definíciu nasýteného grafu), uzol u je v grafe G spojený aspoň jednou hranou (označme ju h) s uzlom v. Keby istý lineárny faktor L obsahoval hranu h, potom cesta u, h, v by bola α-cestou vzhľadom na L a neplatilo by $u\Lambda v$ — spor s predpokladom. Preto h nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G, čo bolo treba dokázať.

Veta 18. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf, U_i, U_j, nech sú také dve rôzne triedy rozkladu U_G^{Ω}, že istý uzol u z U_i je spojený aspoň jednou hranou s každým uzlom z U_j a nech V_0 je tá trieda rozkladu $\overline{U}_G^*$, ktorá obsahuje uzol u. Potom platí: ľubovoľný uzol z V_0 je spojený v G aspoň jednou hranou s ľubovoľným uzlom triedy U_j. Ak v je ľubovoľný uzol z U_i nepatriaci do V_0, potom uzol v nie je v grafe G spojený hranou so žiadnym uzlom z U_j.*

Dôkaz. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G. Podľa definície rozkladu $\overline{U}_G^*$ je $V_0 \subset U_i$. Nech V_0 obsahuje okrem uzla u ešte aspoň jeden uzol u'. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že uzol u' nie je spojený hranou s istým uzlom $t \in U_j$. Pretože G je podľa predpokladu nasýtený graf, existuje v G cesta $C_1 = w_1, h_{1,2}, w_2, \ldots, h_{2i-1,2i}, w_{2n}$ spojujúca uzol $w_1 = u'$ s uzlom $w_{2i} = t$ (w_x z C_1 sú uzly, $h_{x,x+1}$ z C_1 sú hrany, hrana $h_{x,x+1}$ spojuje uzly $w_x \neq w_{x+1}$), ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Hrana $h_{1,2}$ patrí teda do L a uzol $w_2 \in C_1$ patrí zrejme do U_i. Je $w_2 \neq u$ (ináč by neplatilo $u\Lambda u' = w_1$) a hrana $h_{1,2}$ nemôže byť hranou každého lineárneho faktora v G, lebo v opačnom prípade by do triedy U_i patrili len dva uzly $u' = w_1$ a w_2 — spor s predpokladom, že u patrí do U_i. Preto hrana $h_{1,2}$ patrí do jadra G. Podľa vety 10 platí $u\Lambda u_x$ pre všetky uzly $u_x \in U_i$ — to je spor, lebo uzol u nie je v relácii Λ s tým uzlom z U_i, s ktorým ho spojuje hrana z L. Predpoklad, že ľubovoľný uzol $u' \in V_0$ nie je spojený hranou s istým uzlom $t \in U_j$, viedol ku sporu. Preto ľubovoľný uzol z V_0 je spojený aspoň jednou hranou s ľubovoľným uzlom z U_j.

Nech v je ľubovoľný uzol z U_i nepatriaci do V_0. Uzol v nie je v relácii Λ s uzlom u; existuje preto v G cesta $C_1 = v_1, g_{1,2}, v_2, \ldots, g_{2m-1,2m}, v_{2m}$ spojujúca uzol $u = v_1$ s uzlom $v = v_{2m}$, ktorá je α-cestou vzhľadom na L (hrana $g_{x,x+1} \in C$ spojuje uzly $v_x \neq v_{x+1} \in C$). Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že uzol v je spojený hranou s istým uzlom $t \in U_j$. Nech t' je ten uzol z U_j, ktorý je spojený hranou $h' \in L$ s uzlom t. Hrana h' nemôže patriť do cesty C, pretože potom by buď uzol t, alebo uzol t' bol spojený istou α-cestou vzhľadom na L (čiastočnou to cestou cesty C) s uzlom u a to nie je možné, lebo uzly t, t' sú spojené hranou s uzlom u a táto hrana spolu s uvedenou cestou by tvorila α-kružnicu v G — spor s predpokladom, že uzly u, t (resp. uzly u, t') patria do rôznych tried rozkladu U^Ω_G. Teda hrana h' nepatrí do C. Cesta C spolu s hranou spojujúcou uzly v, t a s hranou h' (spojujúcou uzly t, t') tvorí α-cestu vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u, t'; čiže hrana spojujúca uzly u, t' patrí do jadra $\hat{G}$. To je spor, pretože podľa vety 17 uzly u, t' sú spojené hranou, ktorá nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G. Predpoklad existencie hrany spojujúcej uzol z $U_i - V_0$ s uzlom z U_j viedol ku sporu. Preto neexistuje v G hrana spojujúca takéto dva uzly, čo bolo treba dokázať.

Veta 19. *Nech G je ľubovoľný nenasýtený graf, v ktorom existuje lineárny faktor, potom existuje taký nasýtený graf G', o ktorom platí:*

(1) G' obsahuje všetky uzly a len uzly z G_1;

(2) G' obsahuje všetky hrany z G a ľubovoľná hrana z G' nepatriaca do G nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G';

(3) je $\hat{G}' = \hat{G}_1$;

(4) je $\mathring{G}' = \mathring{G}$.

Dôkaz. Pretože G nie je nasýtený graf, existujú v G také uzly $u_1 \neq v_1$, ktoré sú v relácii Λ a nie sú v grafe G spojené hranou. Ak pridáme ku grafu $G_0 = G$ hranu h_1 spojujúcu uzly u_1, v_1, vznikne tak graf G_1, ktorý — okrem toho, že nemusí byť ešte nasýtený — má všetky vlastnosti, ktoré požadujeme od grafu G'. Ak by graf G_1 bol nasýtený, položme $G_1 = G'$ a sme s dôkazom hotoví. V opačnom prípade možno pridaním istej hrany ku grafu G_1 vytvoriť graf G_2, ďalej graf G_3 atď. a vytvoriť tak postupnosť grafov $G_0, G_1, \ldots, G_p$,

o ktorej platí: ľubovoľný člen postupnosti G_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) obsahuje všetky uzly grafu G_0 (graf G_0 je podgrafom grafu G_i) a ľubovoľná hrana z G_i nepatriaca do G_0 nepatrí do žiadneho lineárného faktora grafu G_i; je $\hat{G}_i = \hat{G}_0$ a je $\mathring{G}_i = \mathring{G}_0$ a o počte π_i tých dvojíc uzlov, ktoré sú v grafe G_i v relácii Λ a nie sú v grafe G_i spojené hranou platí: $\pi_0 > \pi_1 > \ldots > \pi_p$. Pretože číslo π_0 je konečné, musí pre istý graf G_p platiť $\pi_p = 0$, čiže graf G_p je nasýtený. Nasýtený graf $G' = G_p$ existuje a má všetky požadované vlastnosti.

Veta 20. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf, L ľubovoľný jeho lineárny faktor a nech $u \neq v$ sú ľubovoľné také dva jeho uzly, ktoré nie sú v relácii Λ. V grafe G existuje cesta C_r, ktorá (1) spojuje uzly u, v_1; (2) je α-cestou vzhľadom na L; (3) obsahuje najviac dve také hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu U^Ω_G.*

Dôkaz. Pretože podľa predpokladu uzly u, v nie sú v relácii Λ, existuje v grafe G aspoň jedna cesta $C = w_1, h_{1,2}, w_2, \ldots, h_{2s-1,2s}, w_{2s} = v$ $(w_1 = u)$, ktorá má vlastnosti (1) a (2). Je zrejmé, že uzly w_{2x-1}, w_{2x} cesty C, s ktorými je incidentná hrana $h_{2x-1,2x}$ (patriaca do L) sú v relácii Ω a teda patria do tej istej triedy rozkladu U^Ω_G. Keby cesta C obsahovala najviac dve také hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}^\Omega_G$, netreba nič už dokazovať (je $C = C_r$). Nech $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+1}, h_{2\alpha_2,2\alpha_2+1}, \ldots, h_{2\alpha_p,2\alpha_p+1}$ (kde $\alpha_1 < \alpha_2 <, \ldots, < \alpha_p$) sú všetky tie hrany cesty C, ktoré spojujú dva uzly patriace do rôznych tried rozkladu $\overline{U}^\Omega_G$ a nech $p > 2$.

Označme znakom U_i tú triedu uzlov z $\overline{U}^\Omega_G$, do ktorej patria uzly $w_{2\alpha_{i-1}+1}$, $w_{2\alpha_i+2}, \ldots, w_{2\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, p+1$; kladieme $\alpha_0 = 0$; $\alpha_{p+1} = n$). Poznamenajme, že tej istej triede z $\overline{U}^\Omega_G$ môže prípadne pri tomto označení patriť aj viac označení. Uzly $w_{2\alpha_i}$, $w_{2\alpha_i+1}$ patria však do rôznych tried rozkladu U^Ω_G a je teda $U_1 \neq U_2 \neq, \ldots, \neq U_{p+1}$. Pretože uzly $w_{2\alpha_i}$, $w_{2\alpha_i+1}$ sú spojené hranou a G je nasýtený graf, platí (pozri vetu 16): buď ľubovoľný uzol z U_i je spojený aspoň jednou hranou s uzlom $w_{2\alpha_i+1}$, alebo ľubovoľný uzol z U_{i+1} je spojený aspoň jednou hranou s uzlom $w_{2\alpha_i}$.

Rozoberme najprv tieto prípady:

Prípad (A): uzol $w_{2\alpha_1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2 a uzol $w_{2\alpha_2+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2. Tvrdím: v G existuje hrana $h_{2\alpha_1, 2\alpha_2+1}$, ktorá spojuje uzol $w_{2\alpha_1}$ s uzlom $w_{2\alpha_2+1}$. Dôkaz: keby takáto hrana neexistovala, znamenalo by to (pretože G je nasýtený graf), že existuje v G cesta C' spojujúca uzly $w_{2\alpha_1}$, $w_{2\alpha_2+1}$, ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Predpokladajme, že C' obsahuje hranu $h_{2\alpha_1+1,2\alpha_1+2}$. Potom však podgraf G' grafu G pozostávajúci z prvkov cesty C', hrany $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+2}$ a z hrany $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+2}$ (spojujúcej uzol $w_{2\alpha_1}$ s uzlom $w_{2\alpha_1+2} \in U_2$; takáto hrana v G zrejme existuje) obsahuje α-kružnicu vzhľadom na L, ktorá buď obsahuje hranu $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+1}$, alebo obsahuje hranu $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+2}$. To nie je možné, lebo uzly $w_{2\alpha_1+1}$, $w_{2\alpha_1+2}$ patria do U_2 a uzol $w_{2\alpha_1}$ do U_1 a nemôžu byť preto uzlami tej istej α-kružnice. Preto cesta C' neobsahuje hranu $h_{2\alpha_1+1,2\alpha_1+2}$. Potom však cesta C' spolu s hranami $h_{2\alpha_1,2\alpha_1+1}$, $h_{2\alpha_1+1,2\alpha_2+2}$

a s hranou spojujúcou uzol $w_{2\alpha_1+2}$ s uzlom $w_{2\alpha_2+1}$ tvorí α-kružnicu vzhľadom na L. Opäť spor, lebo uzly $w_{2\alpha_1}$, $w_{2\alpha_1+1}$ nie sú v relácii Ω. Predpoklad, že neexistuje v G hrana $h_{2\alpha_1, 2\varkappa_2+1}$, vedie vždy ku sporu. Hrana spojujúca uzly $w_{2\alpha_1}$, $w_{2\varkappa_2+1}$ v grafe G existuje.

Z dokázaného tvrdenia vyplýva ihneď tento dôsledok: ak $p > 2$, potom v prípade (A) existuje v G taká α-cesta vzhľadom na L (označme ju C), ktorá spojuje uzol $u = w_1$ s uzlom $v = w_{2\iota}$, v ktorej počet hrán spojujúcich uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ rovná sa $p - 1$. Cestu C s požadovanými vlastnosťami možno tiež nájsť takto: tú časť cesty C, ktorá obsahuje prvky ležiace medzi uhlom $w_{2\alpha_1}$ a uzlom $w_{2\alpha_2+1}$, nahradíme jedinou hranou $h_{2\alpha_1, 2\alpha_2+1}$.

Prípad (B): uzol $w_{2\alpha_1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2 a uzol $w_{2\alpha_2}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_3. Tvrdím: v grafe G existuje hrana $h_{2\alpha_1, 2\alpha_2+1}$ spojujúca uzly $w_{2\alpha_1}$, $w_{2\alpha_2+1}$. Dôkaz: keby neexistovala v G hrana $h_{2\varkappa_1, 2\alpha_2+1}$, znamenalo by to, že existuje v G taká α-cesta (označme ju C'), ktorá spojuje uzly $w_{2\varkappa_1}$, $w_{2\alpha_1+1}$. Cesta C' nemôže obsahovať žiadnu z hrán $h_{2\varkappa_1, 2\varkappa_1+1}$, $h_{2\alpha_1+1, 2\alpha_1+2}$, $h_{2\varkappa_2, 2\alpha_2+1}$ (pozri dôkaz tvrdenia v prípade (A)) a preto cesta C' spolu s uvedenými hranami tvorí α-kružnicu vzhľadom na L obsahujúcu uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ — spor. Preto hrana $h_{2\alpha_1, 2\alpha_2+1}$ existuje a v prípade (B) možno cestu C obdobným spôsobom ako v prípade (A) skrátiť na α-cestu vzhľadom na L spojujúcu uzly u, v, ktorá obsahuje iba $p-1$ hrán spojujúcich uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$.

Záver: v prípade, že je $p > 2$ a uzol $w_{2\alpha_1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2, dá sa cesta C skrátiť tak, že vznikne α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u, v, ktorá obsahuje už len $p - 1$ hrán spojujúcich uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$. Z predošlého vyplýva tiež toto: ak uzol $w_{2\alpha_2}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_3 a je $p > 2$, potom existuje v G hrana $h_{\alpha_2, 2\alpha_3+1}$ spojujúca uzol $w_{2\alpha_2}$ s uzlom $w_{2\alpha_3+1}$; čiže: α-cestu C možno skrátiť tým, že úsek tejto cesty od uzla $w_{2\varkappa_2}$ do uzla $w_{2\alpha_3+1}$ nahradíme jedinou hranou $h_{2\alpha_2, 2\varkappa_3+1}$. Takto skrátená cesta má o jednu hranu spojujúcu uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ menej než cesta C. Ďalšie dôsledky: ak je $p > 2$, potom α-cestu C možno skrátiť na α-cestu vzhľadom na L spojujúcu uzly u, v a obsahujúcu len $p-1$ hrán spojujúcich uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ aj vtedy, keď uzol $w_{2\alpha_3+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_3, resp. aj vtedy, keď uzol $w_{2\alpha_2+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2 (k tomuto záveru snadno dôjdeme, keď uzly cesty C označíme znakom $w_1, w_2, \ldots, w_{2\iota}$ v obrátenom poradí: $w_{2\iota} = u$; $w_1 = v$). Teda ak $p > 2$, skrátená α-cesta spojujúca uzly u, v existuje aj vtedy, keď uzol $w_{2\varkappa_2}$ je spojený hranou s každým uzlom u U_3 aj vtedy, keď uzol $w_{2\alpha_2+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2. Pretože však podľa vety 16 buď uzol $w_{2\alpha_2}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_3, alebo uzol $w_{2\varkappa_2+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_2, znamená to, že ak $p > 2$, potom cesta C dá sa vždy skrátiť. Postupným skracovaním cesty C možno docieliť to, že istá α-cesta vzhľadom na L (označme ju C_r) spojujúca uzly u, v bude obsahovať

najviac dve také hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$. Cesta C_r s požadovanými vlastnosťami existuje, čo dokazuje vetu.

Veta 21. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf, L ľubovoľný jeho lineárny faktor a nech $u \neq v$ sú ľubovoľné také dva jeho uzly, ktoré sú v relácii Ω a nie sú v relácii Λ. Potom v G existuje taká α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u, v, ktorej všetky uzly patria do tej istej triedy rozkladu U^{Ω}_{G}.*

Dôkaz. Pretože uzly u, v nie sú v relácii Λ, existuje v G α-cesta vzhľadom na L spojujúca tieto dva uzly. Podľa vety 20 existuje v G aj taká α-cesta C (vzhľadom na L), v ktorej najviac dve hrany spojujú uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$. Potom však buď všetky uzly cesty C patria do tej istej triedy U_i rozkladu U^{Ω}_{G} a netreba nič dokazovať, alebo cesta C okrem uzlov triedy U_i (do ktorej patria uzly u, v) obsahuje už len uzly z istej triedy $U_j \in U^{\Omega}_{G}$ $(U_i \neq U_j)$, lebo ináč by cesta C obsahovala viac než dve hrany spojujúce dva uzly z rôznych tried (po ceste C vyjdeme z uzla $u \in U_i$ a do uzla $v \in U_i$ sa napokon po ceste C musíme vrátiť). Nech $C = w_1, h_{1,2}, w_2, \ldots, h_{2\iota-1,2\iota}, w_{2\iota}$ je takáto α-cesta, kde $u = w_1$; $w_{2\iota} = v$ a nech do triedy U_j patria uzly $w_{2\alpha_1+1}$, $w_{2\alpha_1+2}$, $\ldots$, $w_{2\varkappa_2-1}$, $w_{2\varkappa_2}$ $(\varkappa_1 < \alpha_2)$. Ostatné uzly z C patria do triedy U_i. Hrany $h_{2\alpha_1, 2\alpha_1+1}$, $w_{\alpha_2, 2\alpha_2+1}$ z C spojujú dva uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$. Podľa vety 16 buď uzol $u_{2\alpha_1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_j, alebo uzol $w_{2\alpha_1+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_i, ďalej: buď uzol $w_{2\alpha_2}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_i, ďalej: buď uzol $w_{2\varkappa_2}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_i, alebo uzol $w_{2\alpha_2+1}$ je spojený hranou s každým uzlom z U_j.

Ak by uzol $w_{2\alpha_1}$ bol spojený hranou s každým uzlom z U_j (resp. ak by uzol $w_{2\varkappa_2+1}$ bol spojený hranou s každým uzlom z U_j), potom (pozri dôkaz vety 20) by existovala v G hrana $h_{2\alpha_1, 2\varkappa_2+1}$ nepatriaca do L spojujúca uzol $w_{2\varkappa_1}$ s uzlom $q_{2\varkappa_2+1}$. Po nahradení prvkov cesty C od uzla $w_{2\alpha_1}$ po uzol $w_{2\varkappa_2+1}$ touto hranou vznikla by z cesty C cesta $\overline{C}$, ktorá by spojovala uzly u, v, bola by α-cestou vzhľadom na L a obsahovala by len uzly z U_i, čiže cesta C by bola hľadanou cestou.

Predpokladajme, že ani uzol $w_{2\alpha_1}$ ani uzol $w_{2\alpha_2+1}$ nie je spojený hranou s každým uzlom z U_j. Potom však podľa vety 16 uzol $w_{2\alpha_1+1}$ a tiež uzol $w_{2\alpha_2}$ je spojený s každým uzlom z U_i. Označme znakom C_1 tú časť cesty C, ktorá spojuje uzol $w_{2\alpha_1+1}$ s uzlom $w_{2\alpha_2}$. Cesta C_1 je α-cestou vzhľadom na L. Hrana $h_{1,2}$, ďalej hrana spojujúca uzol $w_1 = u$ s uzlom $w_{2\alpha_2}$ spolu s cestou C_1 a hranou spojujúcou uzly $w_{2\alpha_1+1}$, w_2 spolu s príslušnými uzlami tvoria α-kružnicu vzhľadom na L, ktorá obsahuje uzly aj z triedy U_i aj z triedy U_j. To nie je možné. Predpoklad, že ani uzol $w_{2\alpha_1}$ ani uzol $w_{2\alpha_2+1}$ nie je spojený hranou s každým uzlom z U_j, vedie ku sporu. Preto podľa predošlého existuje cesta $\overline{C}$ spojujúca uzly u, v, ktorá je α-cestou vzhľadom na L a všetky jej uzly patria do tej istej triedy rozkladu U^{Ω}_{G}, čo bolo treba dokázať.

Veta 22. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf a nech $\overline{U}{}^{\Omega}_{G} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Označme znakom G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podgraf grafu G, ktorý pozostáva zo* *všetkých uzlov triedy U_i, neobsahuje už žiadne iné uzly a obsahuje tie hrany a len tie hrany z G, ktoré spojujú dva uzly z U_i. Pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: Graf G_i je nasýtený graf a ľubovoľné dva jeho uzly sú v relácii Ω, t. j. $U^{\Omega}_{G_i} = \{U_i\}$.*

Dôkaz. Predpokladajme naopak, že G_i nie je nasýtený; t. j., že existujú v G_i také dva uzly $u \neq v$, ktoré nie sú spojené žiadnou hranou v G_i a v G_i platí $u\Lambda v$. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G a nech L_i je podgraf lineárneho faktora L patriaci do G_i. Podgraf L_i je zrejme lineárnym faktorom grafu G_i, lebo každý uzol z G_i je incidentný práve s jednou hranou z L a takáto hrana spojuje dva uzly z U_i. Pretože podľa predpokladu je $u\Lambda v$ v grafe G_i, neexistuje v G_i taká α-cesta vzhľadom na L_i, ktorá by spojovala uzly u, v. Potom však neexistuje ani v grafe G cesta spojujúca uzly u, v, ktorá by bola α-cestou vzhľadom na L a obsahovala by len uzly z U_i. To je spor s vetou 21. Je teda graf G_i nasýtený. Druhé tvrdenie vyplýva hneď odtiaľ, že každé dva uzly z U_i sú v relácii Ω aj v grafe G_i.

Z práve dokázanej vety ihneď vyplýva táto veta.

Veta 23. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf a nech $\overline{G}$ je graf, ktorý vznikne z grafu G, ak v ňom zrušíme všetky hrany a len tie hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu U^{Ω}_G. Potom o grafe $\overline{G}$ platí: (1) ľubovoľná komponenta grafu $\overline{G}$ je nasýtený graf; (2) je $U^{\Omega}_{\overline{G}} = U^{\Omega}_G$; (3) ľubovoľný lineárny faktor grafu G je tiež lineárnym faktorom grafu $\overline{G}$ a naopak.*

Dôkaz je zrejmý z vety 22.

Vety 22 a 23 majú tento zaujímavý dôsledok: ľubovoľný graf G s lineárnym faktorom, ktorý nie je nasýtený, možno pridaním hrán spojujúcich uzly z rôznych tried rozkladu $U^{\Omega}_G = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ doplniť na nasýtený graf (tak, že sa nezmení množina hrán grafu, ktoré sa vyskytujú v aspoň jednom lineárnom faktore grafu) len vtedy, keď ľubovoľný z jeho podgrafov G_i (graf G_i pozostáva z uzlov množiny U_i a z tých hrán grafu G, ktoré spojujú dva uzly z U_i) je nasýteným grafom. Teda nasýtené grafy G_i, v ktorých ľubovoľné dva uzly sú v relácii Ω, sú teda v horeuvedenom smysle akýmisi základnými podgrafmi takých nasýtených grafov, v ktorých rozklad U^{Ω}_G obsahuje viac ako jednu triedu. Ak teda chceme daný graf G, v ktorom existuje lineárny faktor, nasýtiť tým, že pridáme k nemu hrany, ktoré sa však nebudú vyskytovať v žiadnom lineárnom faktore nasýteného grafu (a množina tých hrán nasýteného grafu, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednom lineárnom faktore nasýteného grafu, ak má byť tá istá ako v grafe G), nevystačíme vždy len s pridávaním hrán, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu U^{Ω}_G. Takéto doplňanie podľa viet 22 a 23 treba rozdeliť na dve úlohy: doplniť grafy G_i na nasýtené grafy a potom spájať novými hranami uzly patriace do rôznych tried rozkladu U^{Ω}_G.

O tom, aké sú možnosti pospájať hranami (nepatriacimi do žiadneho lineárneho faktora) jednotlivé nasýtené grafy G_i (v ktorých $U^{\Omega}_{G_i} = \{U_i\}$), aby tak

vznikol nasýtený graf G, v ktorom je $U^{\Omega}_G = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, hovoria nasledujúce vety. Až po zvládnutí tejto problematiky získame oprávnenie zúžiť svoju pozornosť na vlastnosti a konštrukciu nasýtených grafov, v ktorých ľubovoľné dva uzly sú v relácii Ω.

Veta 24. *Nech G je ľubovoľný graf s komponentami G', G'' a nech komponenty G', G'' sú nasýtené grafy. Nech M' je ľubovoľná taká neprázdna podmnožina množiny uzlov komponenty G', ktorá má tieto vlastnosti: (1) buď M' obsahuje jediný uzol, alebo ľubovoľné dva uzly z M' sú v grafe G' v relácii Λ; (2) ľubovoľný uzol z G' nepatriaci do M' nie je v relácii Λ aspoň s jedným uzlom z M'. Utvorme z grafu G graf G_0 takto: v grafe G spojíme aspoň jednou hranou každý uzol z M' s každým uzlom z G''.*

Platí:

(a) *G_0 je nasýtený graf;*

(b) *graf G_0 má to isté jadro ako graf G;*

(c) *$U^{\Omega}_{G_0} = U^{\Omega}_G$;*

(d) *ľubovoľná hrana z G_0 nepatriaca do G nepatrí do žiadneho lineárneho faktora v G_0, t. j. ľubovoľná hrana h z G_0 patrí aspoň do jedného lineárneho faktora grafu G_0 práve vtedy, ak h patrí do G a ak h je hranou aspoň jedného lineárneho faktora grafu G.*

Dôkaz. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G, potom L je zrejme tiež lineárnym faktorom grafu G_0.

Ak uzly $u \neq v$ nespojené v G_0 hranou sú oba z G', alebo sú oba z G'', potom — pretože aj G' aj G'' je nasýtený graf a oba tieto grafy sú podgrafmi grafu G_0 — existuje v G_0 cesta spojujúca uzly u, v, ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Preto ak neplatí $u\Lambda v$ v grafe G, neplatí $u\Lambda v$ ani v G_0. Nech $u \in G'$ $v \in G''$ sú ľubovoľné dva uzly, ktoré nie sú spojené v grafe G_0 žiadnou hranou. Uzol u nepatrí do M' (ináč by uzly u, v boli spojené hranou v G_0 — spor). Podľa definície množiny M' existuje v grafe G' taká α-cesta vzhľadom na L (označme ju C'), ktorá spojuje uzol u s istým uzlom $u' \in M'$. Nech v' je ten uzol z G'', ktorý je v grafe G'' spojený hranou h'' z L s uzlom v. Uzol u' je v grafe G_0 spojený istou hranou g s uzlom $v' \in G''$ a hrana g nepatrí do L (lebo g nepatrí ani do G). Cesta C_0 v grafe G_0 pozostávajúca z cesty C' a okrem toho už len z hrán g, h'' a uzlov v', v je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u, v. Ľubovoľné dva uzly nespojené v G_0 hranou sú spojené α-cestou vzhľadom na L. Preto G_0 je nasýtený graf.

Ľubovoľná hrana jadra $\widehat{G}$ je tiež hranou jadra $\widehat{G}_0$. Dokážme, že aj ľubovoľná hrana z $\widehat{G}_0$ patrí do $\widehat{G}$. Predpokladajme naopak, že v grafe G_0 existuje α-kružnica vzhľadom na L (označme ju K), ktorá obsahuje aspoň jednu hranu nepatriacu do $\widehat{G}$. Kružnica K musí obsahovať také hrany (a to párny počet takých hrán) ktoré spojujú uzol z G' s uzlom z G'' — v opačnom prípade by K bola α-kružnicou vzhľadom na L aj v grafe G a patrila by celá do $\widehat{G}$ — spor. V kružnici K

musia preto existovať také dve hrany nepatriace do G (a teda nepatriace do L), že všetky medzi nimi ležiace uzly v kružnici K (pri istom smysle postupu po prvkoch kružnice) patria do G' a celý úsek kružnice K ležiaci medzi týmito hranami je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje dva uzly z G'. Tieto dva uzly — pretože sú incidentné v G_0 s hranami nepatriacimi do G — patria do M'. Čiže: dva uzly z M' sú spojené α-cestou vzhľadom na L, ktorá celá patrí do G. To je spor s predpokladom, že ľubovoľné dva uzly z M' sú v relácii Λ v grafe G. Preto neexistuje v G_0 taká α-kružnica vzhľadom na L, ktorá by obsahovala hranu nepatriacu do G a platí $\widehat{G}_0 = \widehat{G}$.

Hrany z G_0 nepatriace do G (t. j. hrany spojujúce uzol z M' s uzlom z G'') nepatria do žiadneho lineárneho faktora v G_0. Tieto hrany nepatria totiž do L a pretože podľa predošlého nepatria do $\widehat{G}_0$, nemôže žiadna z nich patriť do žiadneho lineárneho faktora v G_0. Z toho ihneď vyplýva, že o ľubovoľných dvoch uzloch u, v v grafe G_0 platí $u\Omega v$ práve vtedy, keď platí $u\Omega v$ v grafe G a ľubovoľná hrana z G_0 je hranou aspoň jednoho lineárneho faktora v G_0 práve vtedy, keď je hranou aspoň jednoho lineárneho faktora v G. Dôkaz vety je vykonaný.

Poznámka 4. Pri konštrukcii nasýteného grafu G_0 z grafu G, ktorého komponenty G', G'' boli nasýtenými grafmi, ukázala sa dôležitá taká podmnožina M' množiny uzlov grafu G', ktorá má tieto dve vlastnosti: (1) buď M' obsahuje jediný uzol, alebo ak M' obsahuje viac uzlov, potom ľubovoľné dva uzly z M' sú v grafe G' v relácii Λ; (2) ľubovoľný uzol z G' nepatriaci do M' nie je v relácii Λ aspoň s jedným uzlom z M'. Natíska sa prirodzene otázka, či v ľubovoľnom nasýtenom grafe G' existuje aspoň jedna množina M' s uvedenými vlastnosťami. Na túto otázku možno odpovedať kladne. Ba možno dokonca požadovať, aby M' obsahovala istý pevne zvolený uzol u_1 grafu G'. Množinu M' s uvedenými vlastnosťami, ktorá obsahuje uzol $u_1 \in G'$, možno totiž nájsť takto: ak uzol u_1 nie je v relácii Λ so žiadnym iným uzlom z G', stačí položiť $M' = \{u_1\}$. Ak u_1 je v relácii Λ aspoň s jedným uzlom z G', označme znakom u_2 ľubovoľný takýto uzol. Ak už v G' neexistuje taký uzol, ktorý by bol v relácii Λ s oboma uzlami z $\{u_1, u_2\}$, stačí položiť $M' = \{u_1, u_2\}$. V opačnom prípade označme znakom u_3 ľubovoľný taký uzol z G', ktorý je v relácii Λ s uzlami z $\{u_1, u_2\}$. Po konečnom počte takýchto krokov dostaneme istú množinu $M' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uzlov grafu G', o ktorej platí: ľubovoľné dva uzly z M' sú v grafe G' v relácii Λ a v G' neexistuje už žiadny taký uzol nepatriaci do M', ktorý by bol v grafe G' v relácii Λ s každým uzlom z M'. Množina M', ktorá má požadované vlastnosti, existuje preto v ľubovoľnom nasýtenom grafe.

Veta 25. *Nech G_0 je ľubovoľný nasýtený graf, v ktorom rozklad $\overline{U}^{\Omega}_{G_0} = \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ má najmenej dve triedy (t. j. $m > 1$). V grafe G_0 existuje aspoň jedna taká množina hrán H_0, že po zrušení všetkých jej hrán vznikne z grafu G_0 graf G, o ktorom platí:*

(1) G má práve dve komponenty G', G'' a každá z týchto komponent je nasýteným grafom,

(2) ľubovoľná hrana z H_0 spojuje v grafe G_0 uzol z G' s uzlom z G'',

(3) $\overline{U}^{\Omega}_{G} = \overline{U}^{\Omega}_{G_0}$; $\widehat{G} = \widehat{G}_0$; $\mathring{G} = \mathring{G}_0$,

(4) ľubovoľný uzol z G'' je v grafe G_0 incidentný aspoň s jednou hranou z H_0,

(5) množina M' tých uzlov z G', ktoré sú v grafe G_0 incidentné aspoň s jednou hranou z H_0, má tieto vlastnosti: (a) buď M' obsahuje jediný uzol, alebo ak obsahuje viac než jeden uzol, potom ľubovoľné dva uzly z M' sú v grafe G' v relácii Λ; (b) ak w je ľubovoľný taký uzol z G', ktorý nepatrí do M', potom v M' existuje aspoň jeden uzol, ktorý nie je v grafe G' v relácii Λ s uzlom w.

Dôkaz. Označme znakom L ľubovoľný lineárny faktor grafu G_0. Utvorme podľa grafu G_0 orientovaný graf $\vec{X}$ takto: (1) graf $\vec{X}$ obsahuje uzly $x_1, x_2, \ldots, x_m$; (2) uzly $x_i \neq x_j$ sú spojené hranou, a to jedinou hranou práve vtedy, keď v G_0 existuje aspoň jedna hrana spojujúca uzol z U_i s uzlom z U_j; (3) ľubovoľná hrana $h_{i,j}$ spojujúca uzly x_i, x_j (ak taká hrana v $\vec{X}$ existuje) je orientovaná takto: $h_{i,j}$ smeruje z uzla x_i do uzla x_j práve vtedy (resp. smeruje z uzla x_j do uzla x_i práve vtedy), keď každý uzol z U_i (resp. z U_j) je v grafe G_0 spojený hranou s každým uzlom istej triedy $V_j \in \overline{U}^{*}_{G_0}$ (resp. s každým uzlom z $V_i \in \overline{U}^{*}_{G_0}$), kde V_j je podmnožinou množiny U_j (resp. kde $V_i \subset U_i$). Z vety 16 vieme, že ak v nasýtenom grafe G_0 existuje hrana spojujúca uzol z U_i s uzlom z U_j, potom nastane práve jedna z uvedených možností; preto hrana $h_{i,j}$ v grafe $\vec{X}$ buď smeruje z uzla x_i do uzla x_j, alebo smeruje z uzla x_j do uzla x_i. Uvedeným predpisom je preto každému nasýtenému grafu G_0 (ak $m > 1$) priradený práve jeden orientovaný graf $\vec{X}$ o m uzloch.

I. Tvrdím: graf $\vec{X}$ neobsahuje žiadny cyklus. Dokážme to. Predpokladajme naopak, že v grafe $\vec{X}$ existuje istý cyklus $\vec{K}$. Označme znakmi $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}} = x_{i_1}$ uzly cyklu $\vec{K}$ v poradí, v akom cez ne prechádzame obiehajúc po tomto cykle v smysle orientácie jeho hrán vychádzajúc z pevne zvoleného jeho uzla x_{i_1}. Z prijatého predpokladu (pozri konštrukciu grafu $\vec{X}$) vyplýva, že v triede $U_{i_y} \in \overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ existuje aspoň jeden taký uzol, ktorý je v grafe G_0 spojený aspoň jednou hranou s každým uzlom z $U_{i_{y-1}}$ ($y = 1, 2, \ldots, n$; kladieme $i_0 = i_n$). Nech v_y je ľubovoľný taký uzol z U_{i_y}, ktorý je spojený v grafe G_0 s každým uzlom z $U_{i_{y-1}}$ a nech w_y je ten uzol z U_{i_y}, ktorý je v grafe G_0 hranou patriacou do L spojený s uzlom v_y. Utvorme postupnosť P prvkov grafu G_0 takto:

$$P = v_1, g_{1,1}, w_1, g_{1,2}, v_2, g_{2,2}, w_2, g_{2,3}, \ldots, v_n, g_{n,n}, w_n, g_{n,n+1}, v_{n+1} = v_1,$$

kde $g_{z,z}$ je hrana z L spojujúca uzly v_z, w_z a $g_{z,z+1}$ je hrana z G_0 nepatriaca do L, ktorá spojuje uzly w_z, v_{z+1} z rôznych tried rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ — pozri vetu 16. Prvky postupnosti P tvoria α-kružnicu vzhľadom na L v grafe G_0, ktorá obsahuje uzly z viac než jednej triedy rozkladu $U^{\Omega}_{G_0}$ a to nie je možné. Predpoklad existencie cyklu $\vec{K}$ v grafe $\vec{X}$ viedol ku sporu. Graf $\vec{X}$ nemôže obsahovať cyklus.

II. Tvrdím: v grafe $\vec{X}$ existuje aspoň jeden koncový uzol $x_k (k \in \{1, 2, \ldots, m\})$, t. j. uzol, ktorý je konečným uzlom všetkých hrán z $\vec{X}$ s ním incidentných. Platnosť tohto tvrdenia vyplýva priamo zo skutočnosti, že $\vec{X}$ neobsahuje cyklus.

III. Tvrdím: nech x_k je ľubovoľný koncový uzol z $\vec{X}$, ktorý je konečným uzlom každej hrany z $\vec{X}$ s ním incidentnej, potom každý uzol z ľubovoľnej triedy $U_z \in \overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ je v grafe G_0 spojený hranou aspoň s jedným uzlom z U_k. Dokážeme platnosť tohto tvrdenia. Pre $z = k$ je platnosť tvrdenia zrejmá. Predpokladajme, že pre isté $z \neq k$ existuje uzol $v \in U_z$, ktorý nie je spojený hranou so žiadnym uzlom z U_k. Nech u je niektorý uzol z U_k. Pretože G_0 je nasýtený graf, existuje v G_0 taká α-cesta vzhľadom na L (označme ju C_0), ktorá spojuje uzly u, v a ktorá obsahuje najviac dve hrany spojujúce uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ (pozri vetu 20). Cesta C_0 musí obsahovať aspoň jednu takúto hranu (lebo uzly u, v patria do rôznych tried rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$). Keby cesta C_0 obsahovala jedinú takúto hranu, potom podľa vety 16 (pretože neexistuje hrana spojujúca uzol v s niektorým uzlom $w \in U_z$) každý uzol z U_k by bol spojený hranou s istým uzlom z U_z (iným než uzol v) a hrana $h_{k,z}$ z $\vec{X}$ by mala túto orientáciu: uzol x_z by bol konečným a uzol x_k počiatočným uzlom hrany $h_{k,z}$. To je spor s predpokladom, že x_k je konečným uzlom každej hrany, ktorá je s ním incidentná. Preto cesta C_0 obsahuje práve dve také hrany, ktoré spojujú uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$. Jedna z nich (označme ju $g_{z,t}$) spojuje uzol z U_z s uzlom z istej triedy $U_t (z \neq t, t \neq k)$, druhá (označme ju $g_{t,k}$) spojuje uzol z U_t s uzlom z U_k. Pretože podľa predošlého nemožno α-cestu C_0 už skrátiť na takú α-cestu spojujúcu uzly u, v, ktorá by obsahovala len jednu hranu spojujúcu uzly z rôznych tried, vyplýva z toho (pozri dôkaz vety 20), že istý uzol z U_t je spojený v G_0 hranou s každým uzlom z U_k, t. j., že hrana $h_{t,k} \in \vec{X}$ smeruje z uzla x_k do uzla x_t. Opäť spor s predpokladom. Preto neexistuje taká trieda, v ktorej by každý uzol nebol spojený aspoň jednou hranou s uzlom triedy U_k, čo bolo treba dokázať. Z tvrdenia III vyplýva ihneď tento dôsledok:

IV. V grafe $\vec{X}$ existuje práve jeden koncový uzol a takýto uzol je v grafe $\vec{X}$ spojený hranou s každým iným uzlom grafu $\vec{X}$.

Nech x_k je ten uzol z $\vec{X}$, do ktorého smerujú všetky hrany s ním incidentné a ktorý podľa IV je spojený hranou s každým uzlom z $\vec{X}$ (iným než x_k). O triede $U_k \in U^{\Omega}_{G_0}$ podľa III platí: ľubovoľný uzol z ľubovoľnej triedy rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ je spojený hranou aspoň s jedným uzlom z U_k a vzhľadom na

vlastnosť uzla x_k z grafu $\vec{X}$ (pretože G_0 je nasýtený graf) platí nutne o ľubovoľnej triede U_i rozkladu $U^{\Omega}_{G_0}$ (kde $U_i \neq U_k$) toto: ľubovoľný uzol z U_i je spojený v grafe G_0 hranou s každým uzlom istej triedy $V_i \in \overline{U}^{*}_{G_0}$ (kde $V_i \subset U_k$) a žiadny uzol z U_i nie je spojený v grafe G_0 hranou s uzlom množiny $U_k - V_i$ (pozri vetu 18).

Nech $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ je systém tých tried rozkladu $\overline{U}^{*}_{G_0}$, ktoré (1) sú podmnožinami triedy U_k a (2) ktorých uzly sú spojené v grafe G_0 aspoň s jedným uzlom nepatriacim do U_k. Označme pre $y \in \{1, 2, \ldots, p\}$ znakom $\mathfrak{S}_y = \{U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_q}\}$ systém všetkých tých tried rozkladu $U^{\Omega}_{G_0}$, ktoré majú túto vlastnosť: každý uzol z U_{y_i} $(i = 1, 2, \ldots, q)$ je v grafe G_0 spojený hranou s každým uzlom z V_y.

V. Tvrdím: ak pre isté $y \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí $\mathfrak{S}_y \neq U^{\Omega}_{G_0}$, t. j. ak existuje trieda U_r rozkladu $U^{\Omega}_{G_0}$ nepatriaca do $\mathfrak{S}_y$, potom platí: žiadny uzol z U_r nie je spojený hranou v grafe G_0 so žiadnym uzlom ľubovoľnej triedy systému $\mathfrak{S}_y$. Dokážme to. Nech trieda $U_r \in \overline{U}^{\Omega}_{G_0}$ nepatrí do $\mathfrak{S}_y$. V triede U_k existuje istá podmnožina $V_s (s \in \{1, 2, \ldots, p\})$, o ktorej platí: každý uzol z V_s je spojený v grafe G_0 hranou s každým uzlom z U_r a uzol nepatriaci do V_s nie je v grafe G_0 spojený hranou so žiadnym uzlom z U_r. Pretože U_r nepatrí do $\mathfrak{S}_y$, je nutne $V_s \neq V_y$. Predpokladajme oproti nášmu tvrdeniu, že istý uzol $u \in U_r$ je v grafe G_0 spojený hranou h s uzlom $v \in U_{yi} \in \mathfrak{S}_y$. Označme znakom u' (resp. v') ten uzol z U_r (resp. z U_{yi}), ktorý je spojený hranou lineárneho faktora L s uzlom u (resp. s uzlom v). Označme ďalej znakom w ľubovoľný uzol z V_s a znakom t ľubovoľný uzol z V_y. Pretože uzly w, t nie sú v relácii Λ (patria do rôznych tried rozkladu $U^{*}_{G_0}$: je $w \in V_s$, $t \in V_y$, $V_s \neq V_y$) a patria do tej istej triedy rozkladu $U^{\Lambda}_{G_0}$ (lebo oba patria do U_k), existuje v G_0 podľa vety 21 taká α-cesta vzhľadom na L (označme ju $C_{w,t}$), ktorá spojuje uzly w, t a všetky jej uzly patria do U_k.

Ak ku ceste $C_{w,t}$ pridáme uzly u, u' a hranu z L tieto dva uzly spojujúcu, ďalej uzly v, v' a hranu z L tieto uzly spojujúcu a okrem toho hranu spojujúcu uzly u', w a hranu spojujúcu uzly v', t (obe tieto hrany v G_0 existujú a zrejme nepatria do L), dostaneme tak cestu $C_{u,v}$, ktorá spojuje uzly u, v a je α-cestou vzhľadom na L; cesta $C_{u,v}$ spolu s hranou h (ktorá spojuje uzly u, v — jej existenciu sme predpokladali) tvorí α-kružnicu vzhľadom na L, ktorá obsahuje uzly z rôznych tried rozkladu $U^{\Lambda}_{G_0}$, čo nie je možné. Predpoklad existencie hrany spojujúcej istý uzol z U_{y_i} s istým uzlom z U_r viedol ku sporu, čo dokazuje platnosť nášho tvrdenia.

Nech y je ľubovoľné číslo z $\{1, 2, \ldots, p\}$ a $\mathfrak{S}_y = \{U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_q}\}$ systém všetkých tých tried rozkladu $U^{\Lambda}_{G_0}$, ktorých každý uzol je v G_0 spojený hranou s každým uzlom z $V_y (V_y \in \overline{U}^{*}_{G_0}; V_y \subset U_k)$. Označme znakom G_y podgraf grafu G_0, ktorý pozostáva zo všetkých uzlov patriacich do tried systému $\mathfrak{S}_y$ (označme množinu týchto uzlov znakom W_y) a z tých hrán grafu G_0, ktoré spojujú dva uzly z W_y. Označme znakom $\overline{G}_y$ podgraf grafu G_0, ktorý obsahuje všetky uzly z G_0 nepatriace do W_y a všetky tie hrany z G_0, ktoré takéto dva uzly spojujú.

VI. Tvrdím: grafy G_y, $\overline{G}_y$ sú nasýtené grafy. Dôkaz tvrdenia. Tá časť lineárneho faktora L, ktorá patrí do G_y (označme ju L_y), je lineárnym faktorom grafu G_y. Nech u, v sú ľubovoľné dva uzly z G_y, ktoré nie sú v G_y (a teda ani v G_0) spojené hranou. Pretože G_0 je nasýtený graf, existuje v G_0 cesta C spojujúca uzly u, v, ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Predpokladajme, že cesta C obsahuje okrem uzlov z G_y ešte aj taký uzol, ktorý nepatrí do G_y. Nech

$$C = w_1, h_{1,2}, w_2, \ldots, h_{2a-1,2a}, w_{2a} \quad (w_1 = u, w_{2a} = v).$$

Nech w_α je poradím prvý uzol z C a w_β poradím posledný uzol z C, ktorý nepatrí do G_y. Je zrejme $w_\alpha \in V_y$, $w_\beta \in V_y (V_y \subset U_k)$ a hrana $h_{\alpha-1,\alpha}$, resp. hrana $h_{\beta,\beta+1}$ nepatrí do L (lebo spojuje uzly z rôznych tried rozkladu $U^{\Omega}_{G_0}$). Potom však je $w_\alpha \neq w_\beta$ (v opačnom prípade by uzol $w_\alpha = w_\beta$ cesty C nebol incidentný s hranou z C patriacou do L — spor, lebo C je α-cesta vzhľadom na L) a tá časť cesty C, ktorá spojuje uzly w_α, w_β je α-cestou vzhľadom na L. To je spor, lebo uzly w_α, w_β patria oba do V_y a sú teda v grafe G_0 v relácii Λ. Preto cesta C obsahuje len uzly z G_y a je tiež α-cestou vzhľadom na L_y. V G_y neexistujú také dva uzly nespojené hranou, ktoré by boli v relácii Λ. Teda G_y je nasýtený graf.

Obdobne sa dokazuje, že graf $\overline{G}_y$ je nasýtený: časť lineárneho faktora L, ktorá patrí do $\overline{G}_y$ (označme ju $\overline{L}_y$), je lineárnym faktorom grafu $\overline{G}_y$. Nech $\bar{u}$, $\bar{v}$ sú ľubovoľné dva uzly z $\overline{G}_y$, ktoré nie sú v G_0 (a teda ani v $\overline{G}_y$) spojené hranou. V G_0 existuje α-cesta vzhľadom na L (označme ju $\overline{C}$), ktorá spojuje uzly $\bar{u}$, $\bar{v}$ a pritom taká, ktorá obsahuje najviac dve hrany spojujúce dva uzly z rôznych tried rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G_0}$. Keby cesta $\overline{C}$ nepatrila celá do $\overline{G}_y$, znamenalo by to, že spomenuté dve hrany by spojovali uzol $\in V_y$ s uzlom $\in G_y$ a tieto hrany nepatrili by do L. Cestu $\overline{C}$ potom možno rozložiť na tri čiastočné cesty $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$, pričom cesta $\overline{C}_1$ spojuje uzol $\bar{u}$ s istým uzlom $\bar{w} \in V_y$, cesta $\overline{C}_3$ spojuje istý uzol $\bar{t} \in V_y$ s uzlom $\bar{v}$ a cesta $\overline{C}_2$ spojuje uzol $\bar{w}$ s uzlom $\bar{t}$ a všetky ostatné jej uzly patria do G_y. Z uvedeného však vyplýva, že cesty $\overline{C}_1$, $\overline{C}_3$ sú α-cesty vzhľadom na $\overline{L}_y$ (obsahujú len uzly a hrany z $\overline{G}_y$) a pretože $\bar{w}$, $\bar{t}$ sú dva rôzne uzly z triedy V_y (sú teda v relácii Λ), musí v G_0 existovať hrana $\bar{h}$ spojujúca tieto dva uzly a zrejme nepatriaca do L (resp. do $\overline{L}_y$). Potom však cesty $\overline{C}_1$, $\overline{C}_3$ a hrana $\bar{h}$ tvoria v G_0 takú α-cestu vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly $\bar{u}$, $\bar{v}$ a neobsahuje žiadny uzol z G_y. Táto cesta je preto α-cestou vzhľadom na $\overline{L}_y$. V $\overline{G}_y$ neexistujú preto také dva uzly, ktoré nie sú spojené hranou a ktoré v $\overline{G}_y$ sú v relácii Λ. Preto tiež $\overline{G}_y$ je nasýtený graf, čo bolo treba dokázať.

Teraz už snadno dokončíme dôkaz vety. Položme $G' = G_y$; $G'' = \overline{G}_y$ a označme H_0 množinu tých hrán z G_0, ktoré nepatria ani do G_y ani do $\overline{G}_y$. Po zrušení všetkých hrán $\in H_0$ vznikne zrejme graf G, ktorého komponentami sú nasýtené grafy G', G''. Pretože ľubovoľná hrana $\in H_0$ spojuje v G_0 uzol $\in V_y$ (kde $V_y \subset U_k$) patriaci do G_y s uzlom niektorej z tried $U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_k} \in U^{\Omega}_{G_0}$, ktorý patrí do $\overline{G}_y$, platí tiež, že ľubovoľná hrana z H_0 spojuje uzol z G' s uzlom z G''. Pretože žiadna z hrán z H_0 nepatrí do žiadneho lineárneho faktora v G_0 (pozri vetu 16), je nutne $\mathring{G} = \mathring{G}_0$; $\widehat{G} = \widehat{G}_0$ a tiež $U^{\Omega}_{G} = U^{\Omega}_{G_0}$. Podľa definície grafu $G'' = \overline{G}_y$ je v grafe G_0 ľubovoľný uzol z G'' incidentný s hranou z H_0. Hrany $\in H_0$ spojujú totiž každý uzol z G'' s každým uzlom $\in V_y$. Nech M' je množina tých uzlov z G', ktoré sú v grafe G_0 incidentné aspoň s jednou hranou z H_0. Platí zrejme $V_y \subset M'$ a pretože okrem uzlov z V_y žiadny iný uzol z G' nie je incidentný s hranou z H_0, platí dokonca $V_y = M'$. Pretože žiadny uzol z G' nepatriaci do $V_y = M'$ nie je v relácii Λ s uzlom z V_y, má množina $M' = V_y$ obe požadované vlastnosti. Teda množina hrán H_0, grafy G', G'' a množina M' majú všetky požadované vlastnosti. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Poznámka 5. V dôkaze vety 25 dokázali sme viac, než hovorí samotná veta. Opísali sme totiž aj spôsob, ako nájsť množinu hrán H_0. V ľubovoľnom nasýtenom grafe G_0, v ktorom rozklad $U^{\Omega}_{G_0}$ má viac ako jednu triedu, existuje práve jedna množina U_k s požadovanými vlastnosťami; počet q tých tried, rozkladu $U^{*}_{G_0}$, ktoré sú podmnožinami množiny U_k a ktorých uzly sú spojené hranou s uzlom aspoň jednej triedy $U_i \neq U_k$ rozkladu U^{Ω}_{G}, je menší, alebo sa rovná počtu rôznych množín H_0 v grafe G_0, ktoré majú všetky požadované vlastnosti. Význam vety 25 však spočíva hlavne v tom, že ukazuje, že spôsobom použitým vo vete 24 možno — ak vychádzame z istého systému nasýtených grafov, v ktorých ľubovoľné dva uzly sú v relácii Ω — skonštruovať ľubovoľný nasýtený graf G, podgrafom $\mathring{G}$ ktorého je daný systém nasýtených grafov.

Poznámka 6. Bez dôkazu uvádzam túto vetu: Nech G je ľubovoľný nasýtený graf, $\tau_\Omega(G)$ počet tried rozkladu U^{Ω}_{G} a $\tau_*(G)$ počet tried rozkladu U^{*}_{G}. Nech μ_G je počet rôznych množín uzlov M grafu G, ktoré majú tieto dve vlastnosti: (1) buď M obsahuje jediný uzol, alebo ak obsahuje viac uzlov, potom ľubovoľné dva uzly z M sú v relácii Λ; (2) ľubovoľný uzol z G nepatriaci do M nie je v relácii Λ aspoň s jedným uzlom z M. O počte μ_G potom platí: $\mu_G = \tau_*(G) - \tau_\Omega(G) + 1$.

Výsledky z viet 24, 25 ako aj táto nedokazovaná veta poukazujú na to, aký má význam pri konštrukcii nasýtených grafov rozklad U^{*}_{Ω}. Domnievam sa, že tým význam tohto rozkladu z ďaleka nie je vyčerpaný a táto otázka zaslúži si ešte ďalšie a hlbšie štúdium.

4. Grafy a nasýtené grafy s nulovým jadrom

Špeciálnu triedu grafov s lineárnym faktorom tvoria grafy s najjednoduchším t. j. s nulovým jadrom. Týmto grafom venujme teraz pozornosť a odvoďme z poznatkov o nich získaných niektoré dôsledky pre pravidelné grafy s lineárnym faktorom.

Veta 26. *Nech G je ľubovoľný graf s lineárnym faktorom, ktorý má nulové jadro, potom v G existuje práve jeden lineárny faktor. Obrátene: Graf s jediným lineárnym faktorom má nulové jadro.*

Dôkaz. Predpokladajme, že v G existujú aspoň dva rôzne lineárne faktory $L_1 \neq L_2$. Kompozícia $L_1 \times L_2$ je teda nenulový graf a podľa vety 1 je táto kompozícia podgrafom jadra $\widehat{G}$. Teda $\widehat{G}$ je nenulový graf. Ak má obrátene G jediný lineárny faktor, je $\widehat{G}$ zrejme nulový graf.

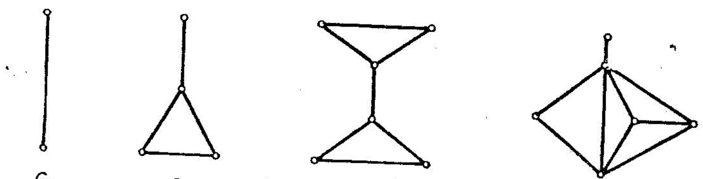
Veta 27. *Nech G je ľubovoľný graf s jediným lineárnym faktorom L; t. j. nech G je nulový graf. Potom rozklad $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ je rozkladom množiny uzlov grafu G na dvojice uzlov, ktoré sú spojené hranou lineárneho faktora L.*

Dôkaz. Označme ako obvykle znakom $\mathring{G}$ podgraf grafu G, ktorý obsahuje všetky uzly a len uzly grafu G a ktorý obsahuje tie hrany z G, ktoré patria aspoň do jedného lineárneho faktora v G. Platí zrejme $\mathring{G} = L$ a ľubovoľný uzol z G je v relácii Ω s jediným iným uzlom z G, a to s tým uzlom, s ktorým ho spojuje hrana z L. Z toho ihneď vyplýva tvrdenie vety.

Veta 28. *Nech G je ľubovoľný nasýtený graf s nulovým jadrom, potom v G existuje aspoň jeden most a tento most patrí do (jediného) lineárneho faktora grafu G.*

Dôkaz. Podľa lemmy 1 ľubovoľný graf s lineárnym faktorom (a teda aj graf G) má párny počet uzlov. Nech $2m$ je počet uzlov grafu G. Ak je $m = 1$, veta zrejme platí, lebo potom G pozostáva iba z dvoch uzlov a z jednej hrany tieto uzly spojujúcej, ktorá patrí do lineárneho faktora $L = G$ a je mostom v grafe G. Predpokladajme, že $m > 1$. Potom podľa vety 27 rozklad $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ obsahuje práve m tried, teda viac než jednu triedu, pričom každá z týchto tried obsahuje práve dva uzly, a to také, ktoré sú v grafe G spojené hranou jediného lineárneho faktora L grafu G. Žiadne dva uzly patriace do tej istej triedy z $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$ nie sú v relácii Λ, pretože dva uzly takejto triedy spolu s hranou z L, ktorá ich spojuje, tvoria α-cestu vzhľadom na L. Z toho vyplýva, že ľubovoľná trieda rozkladu U^{*}_{G} obsahuje práve jeden uzol grafu.

Podľa vety 25 (pretože G je nasýtený a rozklad U^{Ω}_{G} obsahuje viac než jednu triedu) existuje v G taká množina hrán H, že ak zrušíme v grafe G všetky hrany z H, vznikne z grafu G graf, ktorý pozostáva z dvoch komponent G', G'' a každá z týchto komponent je nasýteným grafom. Trieda uzlov z U^{Ω}_{G} (pre ktorú sme pri dôkaze vety 25 prijali označenie U_k), ktorá má tú vlastnosť, že ľubovoľný uzol z inej triedy než z U_k je v grafe G spojený hranou aspoň s jedným uzlom z U_k, pozostáva v našom prípade práve z dvoch uzlov a každý z nich je jediným prvkom triedy rozkladu U^{*}_{G}. Teda množina, pre ktorú sme prijali pri dôkaze vety 25 označenie V_v', obsahuje jediný uzol. Označme tento uzol znakom v_k a druhý uzol z U_k označme znakom u_k. Z dôkazu vety 25 vieme tiež, že každý uzol z G'' je spojený hranou s uzlom v_k a žiadny uzol z G'' nie je spojený hranou s uzlom u_k; ďalej: graf G' buď okrem uzlov triedy $U_k = \{u_k, v_k\}$ neobsahuje už uzly žiadnej inej triedy z U^{Ω}_{G} a potom hrana spojujúca uzly u_k, v_k je mostom v G, ktorý patrí do L; alebo G' obsahuje okrem uzlov z U_k ešte uzly z ďalších tried rozkladu $\overline{U}{}^{\Omega}_{G}$, ale žiadny takýto uzol nie je spojený hranou ani s uzlom z G'' (pozri tvrdenie V z dôkazu vety 25) ani s uzlom u_k. Preto po zrušení hrany spojujúcej uzly u_k, v_k (označme túto hranu



G_1 G_2 G_3 G_4

Obr. 5.

znakom h_k) by stratil graf G súvislosť. Čiže h_k je mostom v grafe G. Uzly u_k, v_k sú spojené hranou z L a touto hranou je hrana h_k, lebo keby okrem h_k existovala ešte ďalšia hrana h_k' spojujúca uzly u_k, v_k, tvorili by hrany h_k, h_k' a uzly u_k, v_k istú α-kružnicu grafu G. To je spor, lebo G má nulové jadro. Je preto $h_k \in L$. Teda graf G obsahuje most h_k, ktorý patrí do L, čo bolo treba dokázať.

Na obr. 5 sú znázornené štyri (najjednoduchšie) nasýtené grafy s nulovým jadrom.

Veta 29. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje jediný lineárny faktor L. Potom G obsahuje aspoň jeden most patriaci do L.*

Dôkaz. Ak G je nasýtený graf, veta zrejme platí (pozri vetu 28). Predpokladajme, že G nie je nasýtený graf. Podľa vety 19 existuje taký nasýtený graf G', ktorý má nulové jadro (teda existuje v ňom taktiež jediný lineárny faktor L') a platí pritom: G' obsahuje všetky uzly a len uzly z G; G' obsahuje všetky hrany z G a okrem týchto hrán obsahuje už len hrany nepatriace do L'. Pretože G je podgrafom grafu G' a tieto grafy majú rovnaké množiny uzlov, je nutne $L' = L$. Podľa vety 28 graf G' obsahuje istý most h, ktorý patrí do L' a patrí teda aj do L. Je však zrejmé, že taká hrana, ktorá je mostom istého grafu, je mostom každého jeho podgrafu, ktorý ju obsahuje. Preto hrana h, ktorá je mostom v G a patrí do L, existuje. Dôkaz vety je vykonaný.

Zaujímavý je tento dôsledok vety 29: ľubovoľný taký eulerovský graf, v ktorom existuje lineárny faktor, má nenulové jadro (pretože v eulerovskom grafe nemôže existovať most — pozri König [4], str. 194 — a graf s nulovým jadrom podľa našej vety 28 obsahuje vždy most). Z toho ihneď vyplýva, že pravidelný graf párneho stupňa s lineárnym faktorom má nenulové jadro. Ba dokážeme v ďalšom, že tento záver možno rozšíriť na všetky tie grafy s lineárnym faktorom, ktoré sú pravidelnými grafmi stupňa vyššieho než prvého. Prv však odvodíme si dve lemmy o pravidelných grafoch tretieho stupňa.

Lemma 5. *Nech G je ľubovoľný graf tretieho stupňa obsahujúci aspoň jeden most. Potom v G existuje taký člen, ktorý obsahuje práve jednu artikuláciu z G. Takýto člen obsahuje nepárny počet uzlov, najmenej však tri uzly.*

Dôkaz. Je zrejmé, že oba uzly, ktoré spojuje ľubovoľný most v G, sú artikuláciami grafu G (most spolu s uzlami, ktoré spojuje je vždy členom grafu a oba tieto uzly — pretože sú tretieho stupňa — patria ešte do ďalšieho člena grafu). Obrátene: ak uzol $u \in G$ je artikuláciou grafu G, potom aspoň jedna z troch hrán s ním incidentných je mostom grafu G. Nech h_0 je ľubovoľný most v G a nech h_0 spojuje uzly u_0, v_0. Označme znakom G_0 breh mosta h_0 obsahujúci uzol u_0. Ak G_0 neobsahuje most, neobsahuje ani taký uzol, ktorý by bol artikuláciou v G_0 a G je potom hľadaným členom obsahujúcim jediný uzol (uzol u_0), ktorý je artikuláciou grafu G. Nech G_0 obsahuje most (označme ho h_1). Jeden z brehov mosta h_1 (označme ho G_1) neobsahuje uzol u_0. Nech u_1 je ten uzol brehu G_1, s ktorým je incidentná hrana h_1 v grafe G. Ak G_1 neobsahuje most, je G_1 hľadaný člen. V opačnom prípade označme znakom h_2 ľubovoľný most grafu G_1, znakom G_2 breh mosta h_1 neobsahujúci uzol u_1 a znakom u_2 ten uzol z G_2, s ktorým je incidentná hrana h_2. Pretože počet mostov v grafe G je konečný, musí náš postup po konečnom počte p krokov skončiť tým, že v istom brehu G_p nevyskytuje sa už most a G_p obsahuje jediný taký uzol u_p, ktorý je artikuláciou v grafe G. Preto člen G_p s jediným takým uzlom, ktorý je artikuláciou grafu G, existuje.

Je zrejmé, že v člene G_p je uzol u_p uzlom druhého stupňa a pretože ľubovoľný člen grafu má najmenej dva uzly, existuje v G_p okrem uzla u_p ešte aspoň jeden ďalší uzol. Tento ďalší uzol je však nevyhnutne uzlom tretieho stupňa v G_p a pretože v ľubovoľnom grafe počet uzlov nepárneho stupňa je párny, musí člen G_p okrem uzla u_p obsahovať ešte najmenej dva uzly, a to uzly tretieho stupňa, z čoho ihneď vyplýva tvrdenie vety. Dôkaz je vykonaný.

Lemma 6. *Nech G je ľubovoľný pravidelný graf tretieho stupňa, v ktorom existuje aspoň jeden lineárny faktor L. Potom platí: G má nenulové jadro.*

Dôkaz. Už Petersen v [1] dokázal, že ak G neobsahuje most, potom ľubovoľná hrana z G je hranou aspoň jednej α-kružnice vzhľadom na L. Preto ak G neobsahuje most, je $\widehat{G} = G$ a lemma platí. Predpokladajme, že G má aspoň jeden most. Podľa lemmy 5 existuje v G člen G_p, ktorý obsahuje práve jeden taký uzol u_p, ktorý je artikuláciou v G. Označme znakom L_p podgraf člena G_p, ktorý pozostáva z prvkov z L patriacich do G_p s výnimkou uzla u_p. Hrany z G_p incidentné s uzlom u_p (označme ich g_1, g_2) nepatria do L_p, lebo do L patrí most z G, ktorý je incidentný s uzlom u_p (ľubovoľný lináreny faktor pravidelného grafu nepárneho stupňa obsahuje všetky mosty grafu; pozri König [4], str. 195). Nech hrana g_1 (resp. g_2) spojuje uzol u_p s uzlom v_1

(resp. v_2). Je zrejme $v_1 \neq v_2$, lebo v opačnom prípade by uzol $v_1 = v_2$ z G_p bol artikuláciou grafu G — spor s predpokladom, že G_k obsahuje jedinú artikuláciu grafu G, t. j. uzol u_p.

Ak z grafu G_p utvoríme graf G_p^* tak, že hrany g_1, g_2 a uzol u_p nahradíme jedinou hranou h^* spojujúcou uzly v_1, v_2, potom G_p^* je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, ktorý neobsahuje most. Graf L_p je podgrafom grafu G_p^* a je jeho lineárnym faktorom.

Podľa lemmy 5 člen G_p obsahuje najmenej tri uzly, teda L_p obsahuje najmenej jednu hranu. Označme znakom g^* ľubovoľnú hranu z L_p. Je zrejme $g_1 \neq g^* \neq g_2$ a teda je $g^* \neq h^*$. V práci [9] pri dôkaze Petersenovej vety dokázal Schönberger toto: ak h_1', h_2' sú ľubovoľné dve hrany pravidelného grafu tretieho stupňa G', ktorý neobsahuje most, potom v G' existuje taký lineárny faktor, ktorý neobsahuje ani hranu h_1', ani hranu h_2'. Z toho vyplýva, že v našom grafe G_p^* existuje taký lineárny faktor L_p^*, ktorý neobsahuje ani hranu h^*, ani hranu g^*. Označme znakom H' túto množinu hrán grafu G: do H' patria všetky hrany z L_p^* a okrem toho všetky hrany z L, ktoré nepatria do G_p. Je zrejmé, že ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou množiny H', teda H' je množinou hrán istého lineárneho faktora L' grafu G. Pritom L' neobsahuje hranu g^*, ktorá však (ako sme predpokladali) patrí do lineárneho faktora L. Preto kompozícia $L \times L'$ je nenulový graf a graf G má nenulové jadro. Dôkaz lemmy je vykonaný.

Prikročme teraz k dôkazu vety, ktorej platnosť sme už ohlásili:

Veta 30. *Nech G je ľubovoľný pravidelný graf vyššieho stupňa ako prvého, v ktorom existuje lineárny faktor. Potom G má nenulové jadro; t. j. v G existujú najmenej dva rôzne lineárne faktory.*

Dôkaz. Pre párny stupeň je platnosť vety zrejmá. Veta platí podľa predošlého aj pre pravidelné grafy tretieho stupňa. Dôkaz treba urobiť pre pravidelné grafy nepárneho stupňa, a to stupňa vyššieho než tretieho. Nech G je ľubovoľný pravidelný graf $(2n + 1)$-ého stupňa $(n > 1)$, v ktorom existuje lineárny faktor L. Hrany grafu G nepatriace do L spolu so všetkými uzlami z G tvoria podgraf G', ktorý je pravidelným grafom $2n$-tého stupňa. Je známe, že pravidelný graf $2n$-tého stupňa dá sa rozložiť na n faktorov druhého stupňa (pozri [4], str. 161). Nech F je ľubovoľný faktor druhého stupňa grafu G'. Kompozícia $L \times F = G''$ je faktorom tretieho stupňa grafu G, teda je podgrafom grafu G a má tieto vlastnosti: (1) obsahuje všetky uzly z G; (2) je pravidelným grafom tretieho stupňa; (3) existuje v ňom lineárny faktor L. Podľa lemmy 6 má G'' nenulové jadro. Z toho ihneď vyplýva (lebo z grafu G'' dostaneme graf G pridaním istých hrán; pozri vetu 14), že jadro $\widehat{G''}$ je podgrafom jadra $\widehat{G}$ a $\widehat{G}$ je nenulový graf. Teda graf G má nenulové jadro a z vety 2 vyplýva, že v G existujú najmenej dva rôzne lineárne faktory. Veta platí aj pre pravidelné grafy nepárneho (vyššieho než prvého) stupňa. Dôkaz vety je vykonaný.

LITERATÚRA

[1] Petersen J., Die Theorie der regulären Graphen, Acta Math. 1891, 193—220.
[2] Kotzig A., Poznámky k Listingovej vete o rozkladoch grafu na ťahy, Časopis pro pěst. mat. 81 (1956),396—404.
[3] Kotzig A., O rozklade pravidelného grafu nepárneho stupňa na dva faktory, Časopis pro pěst. mat. 83 (1958), 27—32.
[4] König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.
[5] Kotzig A., Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956.
[6] Kotzig A., Z teórie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa, Časopis pro pěst. mat. 82 (1957), 76—92.
[7] Kaluza B., Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen, Mat. Ann. 1953, 464—465.
[8] Frink O., A proof of Petersen's theorem, Annals of Mat. 1926, 491—492.
[9] Schönberger T., Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes, Acta Litt. ac Sc., Sectio Sc. Math., Szeged 1934, 51—57.

Došlo 16. 4. 1958.

Katedra matematiky Vysokej školy ekonomickej v Bratislave

ИЗ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ С ЛИНЕЙНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ

АНТОН КОЦИГ

Выводы

Дальнейшим понятием, вводимым при исследовании графов с линейным множителем — понятие насыщенного графа. Граф G, в котором существует линейный множитель называется насыщенным графом, когда две любых таких разных вершин, которые в отношении Λ находятся в графе G соединены не меньше, чем одним ребром. Прямо из дефиниции насыщенного графа вытекает, что комплетный граф с четным количеством вершин является насыщенным графом. Оказывается, что существуют насыщенные графы, которые не являются комплетными. О насыщенных графах доказывается следующее: любой насыщенный граф является всегда связным графом. Пусть G насыщенный граф и пусть U_0 является любым классом разложения $\overline{U}_G^*$. Любые две вершины из U_0 соединены в G не меньше, чем одним ребром и это ребро не принадлежит ни в какой линейный множитель графа G. Если в графе G существует линейный множитель и G не является насыщенным, то существует насыщенный граф G', который: 1. содержит все вершины и только вершины графа G; 2. содержит все ребра из G и кроме того только ребра не принадлежающее ни в какой линейный множитель графа G'; 3. и имеет место следующее: $\widehat{G'} = \widehat{G}$. По-другому сказано: любой ненасыщенный граф G с линейным множителем является подграфом не меньше чем одного графа, у которого эти же вершины и это же ядро как у графа G. Выше приведенное показывает важность роли, которую играют насыщенные графы в исследовании основных свойств графа с линейным множителем. Поэтому особое внимание уделяется исследованию насыщенных графов. Доказывается следующее: если G — любой насыщенный граф и $\overline{G}$ — граф, возникнувший из графа G таким образом, что из него будут устранены все ребра, соединяющие вершины, принадлежающие в разные классы разложения $\overline{U}_G^\Omega$, то: 1. любой компонент графа $\overline{G}$ — насыщенный граф; 2. любые две вершины компонента являются в отношении Ω; 3. $\overline{U}_{\overline{G}}^\Omega = \overline{U}_G^\Omega$; 4. любой линейный множитель графа G является тоже линейным множителем графа $\overline{G}$ и наоборот.

О том, каким образом в насыщенном графе G вершины, принадлежающие в разные классы разложения $\overline{U}_G^\Omega$ соединены ребрами (это те ребра, которые нужно устранить для возникновения графа $\overline{G}$, приведенного выше) доказывается следубщее: если разложение $\overline{U}_G^\Omega$ содержит не меньше, чем два класса, то существует не меньше, чем одно множество ребр H_0 и не меньше, чем одно непустое множество вершин M_0 таким образом, что имеет место: а) после устранения ребр из H_0 возникнет из графа G граф, который содержит точно два компонента G', G''; б) любое ребро из H_0 соединяет в графе G вершину из G' с вершиной из G''; в) все вершины из M_0 принадлежат в G', причем каждая вершина из M_0 в графе G соединена ребром из H_0 с каждой вершиной из G'' и никакая вершина из G' вне M_0 не является инцидентной ребру из H_0; г) множество M_0 или содержит одну и только одну вершину, или содержит больше чем одну вершину и в этом случае любые две вершины из M_0 находятся в графе G' (и тоже в графе G) в отношении Λ; д) любая вершина из G' вне M_0 не находится в отношении Λ не меньше, чем с одной вершиной из M_0; е) в графе с компонентами G', G'' это же ядро и это же разложение множества вершин на классы вершин находящиеся и в отношении Ω и в отношении Λ, как в графе G.

Доказывается то, что наоборот имеет место: пусть G', G'' — любые два насыщенных графа без общих элементов; и пусть M_0 — любое такое множество вершин из G', что все его вершины находятся в отношении Λ и любая вершина из G' не принадлежающая в M_0 не находится в отношении Λ, не меньше, чем с одной вершиной из M_0 (такое множество очевидно в насыщенном графе существует) и пусть граф G возникнет таким образом, что каждую вершину из M_0 соединим не меньше чем одним ребром с каждой вершиной из G'', то имеет место: G является насыщенным графом; ядро $\widehat{G}$ содержит все элементы и только элементы из ядр $\widehat{G}'$, $\widehat{G}''$; $\overline{U}_G^\Omega = \overline{U}_{G'}^\Omega + \overline{U}_{G''}^\Omega$. На основе приведенных результатов открыт метод конструирования насыщенного графа с этим же ядром и с этими же линейными множителями, как любой несвязный граф, каждый компонент которого является насыщенным графом.

Отдельная часть работы посвящена структуре графов с линейным множителем, ядро которых нулевое. Доказывается следующее: если в графе G с линейным множителем нулевое ядро, то в G существует только один линейный множитель и граф G содержит не меньше одного моста, принадлежающего в этот линейный множитель. Дальше: любой регулярный граф высшей, чем первой степени, содержающий линейный множитель имеет ядро не являющееся нулевым, т. е. в таком графе существует не меньше, чем два разных линейных множителя.

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN GRAPHEN MIT DEM LINEAREN FAKTOR II

ANTON KOTZIG

Zusammenfassung

Der weitere Begriff, der bei der Untersuchung der Graphen mit dem linearen Faktor nützlich ist, ist der Begriff des satten Graphen. Ein Graph G, in welchem mindestens ein linearer Faktor existiert, wird satter Graph genannt, wenn jede seine zwei verschiedene Knotenpunkte, die in der Relation Λ stehen, mindestens eine Kante aus G verbindet. Direkt aus der Definition des satten Graphen ist klar, daß ein vollständiger Graph mit gerader Anzahl von Knotenpunkte immer satt ist. Es wird gezeigt, daß auch satte Graphen, die nicht vollständige sind, existieren. Es wird folgendes bewiesen: Ein beliebiger satter Graph ist immer ein zusammenhängender Graph. Es sei G ein satter Graph und U_0 eine beliebige Klasse der Zerlegung $\overline{U}_G^{\cdot}$. Beliebige zwei Knotenpunkte aus U_0 verbindet in G mindestens eine Kante und diese Kante gehört zu keinem linearen Faktor des Graphen G. Wenn im Graphen G ein linearer Faktor existiert und G nicht satt ist, dann existiert ein satter Graph G', welcher (1) dieselben Knotenpunkte wie G besitzt; (2) alle Kanten aus G und außerdem nur solche Kanten, die zu keinem linearen Faktor des Graphen G' gehören, enthält und (3) von welchem gilt: $\widehat{G'} = \widehat{G}$.

Es sei G ein satter Graph und es sei $\overline{G}$ ein Graph, der aus dem Graphen G durch Entfernung aller solchen Kanten, welche die Knotenpunkte aus den verschiedenen Klassen der Zerlegung $\overline{U}_G^\Omega$ verbinden, entsteht. Dann gilt: Ein beliebiger zusammenhängender Bestandteil $\overline{G}_i$ des Graphen $\overline{G}$ ist ein satter Graph; zwei beliebige Knotenpunkte aus $\overline{G}_i$ stehen in der Relation Ω; $\overline{U}_{\overline{G}}^\Omega = \overline{U}_G^\Omega$; ein beliebiger linearer Faktor des Graphen G ist auch linearer Faktor des Graphen $\overline{G}$ und umgekehrt.

Es wird weiter die Struktur der satten Graphen studiert. Folgendes wird bewiesen: Wenn die Zerlegung $\overline{U}_G^\Omega$ mindestens zwei Klassen enthält, dann existiert mindestens eine

Kantenmenge H_0 und eine nichtleere Knotenpunktmenge M_0 so, daß es gilt: a) durch Entfernung aller Kanten aus H_0 entsteht aus dem Graphen G ein Graph, welcher genau zwei zusammenhängende Bestandteile G', G'' besitzt; b) eine beliebige Kante aus H_0 verbindet im Graphen G einen Knotenpunkt aus G' mit einem Knotenpunkte aus G''; c) alle Knotenpunkte aus M_0 gehören zu G'; jeder Knotenpunkt aus M_0 wird durch eine Kante aus H_0 mit beliebigem Knotenpunkte aus G'' verbunden und jede Kante aus H_0 mit einem Knotenpunkte aus M_0 incident ist; d) beliebige Knotenpunkte aus M_0 in dem Graphen G' (und auch im Graphen G) in der Relation Λ stehen; e) beliebiger Knotenpunkt aus G', welcher zu M_0 nicht gehört, steht nicht in der Relation Λ mindestens mit einem Knotenpunkte aus M_0; f) der Graph mit den zusammenhängenden Bestandteilen G', G'' hat derselben Kern und hat dieselbe Zerlegung auf die Klassen der Knotenpunkte, welche in der Relation Ω und auch in der Relation Λ stehen, wie der Graph G.

Es gilt auch umgekehrt: Es seien G', G'' beliebige satte Graphen, welche keine gemeinsame Elemente besitzen. Es sei M_0 eine beliebige solche Knotenpunktmenge aus G', daß alle ihre Knotenpunkte in der Relation Λ stehen und ein beliebiger Knotenpunkt aus G', der zu M_0 nicht gehört, steht nicht in der Relation Λ mindestens mit einem Knotenpunkte aus M_0 (es ist klar, daß eine solche Menge M_0 in einem satten Graphen G, immer existiert). Wenn wir jeden Knotenpunkt aus M_0 mit jedem Knotenpunkte aus G'' durch mindestens eine Kante verbinden, entsteht ein Graph G, welcher satt ist, und welcher folgende Eigenschaften besitzt: Sein Kern $\widehat{G}$ besitzt alle Elemente und nur Elemente aus G' und noch aus $\widehat{G}''$; $\overline{U}_G^\Omega = \overline{U}_{G'}^\Omega + \overline{U}_{G''}^\Omega$.

Die gewonnenen Resultate ermöglichen aus den beliebigen Graphen, in welchem jeder zusammenhängende Bestandteil satt ist, einen satten Graphen, welcher denselben Kern und dieselben linearen Faktoren besitzt, konstruieren.

In besonderem Teile der Arbeit wird die Struktur und die Eigenschaften der Graphen mit dem einzigen linearen Faktor (d. h. wo der Kern ein Nullgraph ist) studiert. Es wird folgendes bewiesen: Ein Graph, der einen einzigen linearen Faktor besitzt, enthält mindestens eine Brücke, welche zu diesen linearen Faktor gehört. Der Kern des regulären Graphen n-ten Grades (wo $n > 1$), in welchem ein linearer Faktor existiert, ist kein Nullgraph, d. h. in diesem Graphen existieren mindestens zwei verschiedene lineare Faktoren.