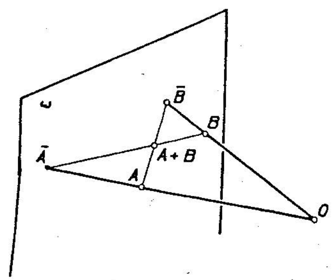
MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK IX
ČÍSLO 3

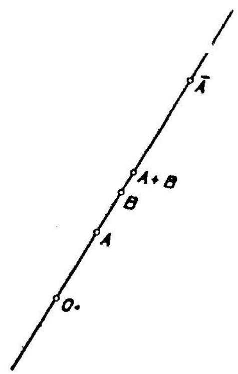
O SÚČTOCH BODOV DVOCH NADROVÍN

TATIANA MEDEKOVÁ, Bratislava

1. V n-rozmernom projektívnom priestore definujme sčítanie bodov (obr. 1, pre $n = 3$). Zvolíme si pevný bod O — počiatok sčítania a pevnú nadrovinu ω — sčítaciu, neobsahujúcu bod O. Za súčet dvoch bodov A, B, ktoré neležia súčasne v nadrovine ω (tento prípad v celej práci vylúčime) a ktoré neležia s bodom O na jednej priamke, budeme považovať bod $(A + B)$, ktorý zostrojíme nasledujúcim spôsobom: spojnica bodov A a O pretne nadrovinu ω v bode $\bar{A}$, spojnica bodov B a O v bode $\bar{B}$. Priesečník priamok $A\bar{B}$ a $\bar{A}B$ určí súčet $(A + B)$. Vo všetkých ostatných prípadoch môžeme bodmi O, A, B položiť priamku; potom súčet bodov A, B určí sa pomocou involúcie I na tejto priamke (obr. 2). Involúciu I určíme samodružným bodom A (jej priesečníkom s nadrovinou ω) a párom A, B odpovedajúcich si bodov. Súčtom bude bod, ktorý v involúcii I odpovedá počiatku sčítania O.



Obr. 1.



Obr. 2.

Poznámka: Z definície vyplýva, že ak body A, B splynú, potom súčet je štvrtý harmonický bod k počiatku O, vzhľadom na bod $A \equiv B$ a na priesečník $\bar{A}$.

Zaveďme do nášho priestoru projektívny súradnicový systém. Za jednotkový bod zvolíme bod O, n základných bodov súradnicového systému položme do nadroviny ω tak, aby jej rovnica bola $x_1 = 0$; $(n + 1)$-vý základný bod zvolíme ľubovoľne. Bod A nech má súradnice $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, bod B súradnice $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$. Potom platí:

Veta. *Súradnice súčtu dvoch bodov A, B, neležiacich súčasne v nadrovine ω, sú vyjadrené rovnicami*

$$x_i = -a_1b_1 + a_ib_1 + a_1b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1). \tag{a}$$

Dôkaz. α) Nech body A, B a O sú lineárne nezávislé. Výpočtom zistíme, že súradnice bodu $\bar{A}$ sú $\bar{a}_i = -a_1 + a_i$ a súradnice bodu $\bar{B}$ sú $\bar{b}_i = -b_1 + b_i$. Parametrické rovnice spojníc $\bar{A}B$ a $A\bar{B}$ sú

$$(\bar{A}B)_i = \lambda_1(-a_1 + a_i) + \lambda_2 b_i = -\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i,$$
$$(A\bar{B})_i = \mu_1 a_i + (-b_1 + b_i)\,\mu_2 = -\mu_2 b_1 + \mu_1 a_i + \mu_2 b_i.$$

Pre ich priesečník platí $\lambda_1 : \lambda_2 = b_1 : a_1$, čiže $(A + B) = b_1\bar{A} + a_1 B$. Po dosadení súradníc bodov $\bar{A}$ a B súradnice súčtu sú dané rovnicami

$$x_i = -a_1b_1 + a_ib_1 + a_1b_i.$$

Z konštrukcie aj z rovníc (a) vyplýva, že súčtom bodov A, B, pričom bod A leží v nadrovine ω a bod B v nej neleží, je bod A.

β) Ak sú body A, B, O lineárne závislé, ležia na priamke. Ukážeme, že aj v tomto prípade súčet bodov A, B má súradnice $a_ib_1 - a_ib_1 - a_1b_i$. Predovšetkým ukážeme, že bod o takýchto súradniciach je lineárne závislý od bodov O, A, B. Skutočne platí

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_i \\ b_1, & b_2, & b_i, \\ -a_1b_1, & a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1, & a_ib_1 - a_ib_1 - a_1b_i, \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_i, \\ b_1, & b_2, & b_i, \\ 0, & a_1b_1 - a_2b_1, & a_ib_1 - a_ib_1, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_i, \\ b_1, & b_2, & b_i \\ a_1b_1, & a_1b_1, & a_1b_1, \end{vmatrix} = a_1b_1 \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_i, \\ b_1, & b_2, & b_i, \\ 1, & 1, & 1, \end{vmatrix} = 0.$$

Treba ešte ukázať, že O a $(A + B)$ sú párom involúcie I, opísanej vo vete. Nech bod $\bar{A}$ je priesečník spojnice OAB s rovinou ω a nech má súradnice $(0, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_{n+1})$. Premietnime teraz spojnicu OAB z priestoru o rovniciach $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ do priestoru o rovniciach $x_3 = 0$, $x_4 = 0, \ldots, x_{n+1} = 0$ do priamky p. Potom body O', A', B', $(A + B)'$, $\bar{A}'$ (premietnuté body O, A, B, $(A + B)$, $\bar{A}$) budú mať na priamke p po rade súradnice $(1, 1, 0, \ldots, 0)$, $(a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$, $(b_1, b_2, 0, \ldots, 0)$, $(-a_1b_1, a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \bar{a}_2, 0, \ldots, 0)$. Môžeme teda prvé dve súradnice považovať za projektívne súradnice uvažovaných bodov na priamke p. Involúcia I' je potom určená samodružným

bodom $\bar{A}'$ a párom odpovedajúcich si bodov A', B'. Predpokladajme najprv, že ani jeden z bodov A', B' nesplýva s bodom $\bar{A}'$; potom rovnice involúcie I' sú

$$\varrho x_1' = -x_1, \qquad -\varrho a_1b_1x_2' = (a_1b_2 + a_2b_1)\,x_1 - a_1b_1x_2.$$

V involúcii I' zodpovedá bodu $O'(1,1)$ bod o súradniciach

$$\varrho x_1' = -1, \qquad -\varrho a_1b_1x_2' = a_1b_2 + a_2b_1 - a_1b_1,$$

čiže

$$x_1' : x_2' = -a_1b_1 : a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1.$$

Tieto súradnice má však práve bod $(A + B)'$. Spätným premietnutím zistíme, že aj bod $(A + B)$ odpovedá bodu O v involúcii I.

Ak napr. bod A' splýva s bodom $\bar{A}'$ (teda aj bod A splýva s bodom $\bar{A}$), platí $a_1 = 0$. Potom súradnice súčtu sú: $(0, -a_2b_1, -a_3b_1, \ldots, -a_{n+1}b_1)$ a teda súčet $(A + B)$ splýva s bodom $\bar{A}$. V tom prípade je aj involúcia I parabolická so singulárnym bodom $\bar{A}$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 1. Ak bod A splýva s bodom O, potom súčtom bodov A, B je bod B; súčtom bodu O s ľubovoľným bodom A je teda tento bod A.

Poznámka 2. Ak bod A splýva s bodom B, potom ich súčet oddeľuje harmonicky spolu s bodom O body A a $\bar{A}$.

2. Budeme sa zaoberať dvoma nadrovinami α, β, z ktorých ani jedna nesplýva s nadrovinou ω a ktorých prienik neleží v nadrovine ω. Medzi bodmi nadrovín α, β zaveďme kolineárnu transformáciu K. Budeme hľadať podmienky, pri ktorých súčty odpovedajúcich si bodov v kolineácii K ležia opäť v nadrovine.

Veta. *Nech nadroviny α, β, ω nie sú lineárne závislé; potom nutnou a postačujúcou podmienkou, aby súčty odpovedajúcich si bodov nadrovín α, β v kolineácii K ležali v jednej nadrovine, je, aby kolineácia K priraďovala bodom prieniku nadrovín α, ω body prieniku nadrovín β, ω.*

Dôkaz. Súradnicový systém zvolíme tak, že nadrovina α bude mať v ňom rovnicu $x_2 = 0$ a nadrovina β rovnicu $x_3 = 0$. Kolineácia K je teda daná rovnicami

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1} \\ x_i' &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i4}x_4 + \ldots + a_{i,n+1}x_{n+1} \quad (i = 3, \ldots, n + 1), \end{aligned} \tag{b}$$

pričom x_i sú súradnice bodov nadroviny α a x_i' súradnice odpovedajúcich bodov v nadrovine β. Súradnice X_i súčtu priradených bodov v kolineácii K podľa vety odseku 1 sú:

$$\begin{aligned} X_i = {} & (a_i - a_1)(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{14}a_4 + \ldots + a_{1,n+1}a_{n+1}) + \\ & + a_1(a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + a_{i4}a_4 + \ldots + a_{i,n+1}a_{n+1}), \quad (i = 1, \ldots, n + 1). \end{aligned} \tag{c}$$

Aby všetky súčty priradených bodov ležali v jednej nadrovine, musia súradnice súčtu byť lineárne vzhľadom na parametre a. To nastane len vtedy, ak zo všetkých X_i možno vyňať číslo a_1. V X_i preto musia byť koeficienty $a_{12}, a_{14}, a_{15}, \ldots, a_{1,n+1}$ nulové. Kolineácia K má potom rovnice

$$x_1' = a_{11}x_1$$
$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i,n+1}x_{n+1} \ (i = 3, \ldots, n+1). \tag{d}$$

Ak bod nadroviny β leží v nadrovine ω, t. j. je $a_1 = 0$, jemu odpovedajúci bod v nadrovine α má tiež $a_1' = 0$. Kolineácia K priraďuje skutočne bodom prieniku nadrovín α, ω body prieniku nadrovín β a ω.

Podmienka vety je postačujúca. Nech totiž (d) sú rovnice kolineácie medzi bodmi nadrovín α, β. Potom súčty sebeodpovedajúcich bodov majú súradnice

$$X_1 = a_{11}a_1$$
$$X_i = (a_{i1} - a_{11})\, a_1 + a_{i2}a_2 + \ldots + (a_{i,n+1} + a_{11})\, a_{n+1} \ (i = 2, \ldots, n+1). \tag{e}$$

Z rovníc (e) vyplýva, že súčty X_i ležia v nadrovine.

Poznámka 1. Nadrovina, v ktorej ležia súčty bodov, nezávisí iba od nadrovín α, β, ale aj od kolineácie K.

Poznámka 2. Kolineácia K môže byť perspektívnou len v tom prípade, ak jej stred bude ležať v nadrovine ω.

3. Ak prienik nadrovín α, β leží v nadrovine ω, sčítame každý bod nadroviny α s každým bodom nadroviny β (s výnimkou bodov, súčasne ležiacich v nadrovine ω).

Veta. *Nech nadroviny α, β, ω sú nadrovinami jedného zväzku S. Potom súčty bodov nadrovín α, β ležia v nadrovine, patriacej do zväzku S.*

Dôkaz. Nech v projektívnom súradnicovom systéme nadrovina ω má rovnicu $x_1 = 0$ a nadrovina α rovnicu $x_2 = 0$. Nadrovina β je daná rovnicou $\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 = 0$ ($\varrho_2 \neq 0$). Súradnice ľubovoľného bodu A nadroviny α sú $(a_1, 0, a_3, \ldots, a_{n+1})$, bodu B nadroviny β sú $(-k\varrho_2, k\varrho_1, b_3, \ldots, b_{n+1})$. Súradnice súčtu X_i vypočítame podľa vety odseku 1:

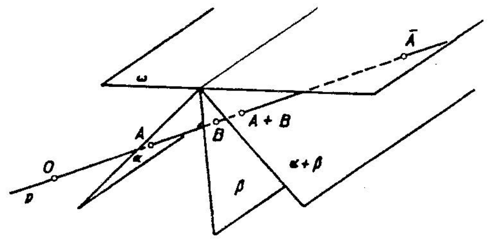
$$X_1 = -k\varrho_2 a_1$$
$$X_2 = k(\varrho_2 + \varrho_1)\, a_1$$
$$X_i = k\varrho_2(a_1 - a_i) + a_1 b_i \ \ (i = 3, \ldots, n+1).$$

Súčty ležia v nadrovine o rovnici $(\varrho_2 + \varrho_1)\, x_1 + \varrho_2 x_2 = 0$, ktorá patrí do zväzku S, pretože je lineárnou kombináciou nadrovín α a β. Nadrovinu, v ktorej súčty ležia, zostrojíme takto (obr. 3, pre $n = 3$): Položme bodom O priamku p tak, aby pretínala nadroviny α, β, ω postupne v troch rôznych bodoch A, B, $\bar{A}$. Potom hľadaná nadrovina prechádza bodom $(A + B)$.

Poznámka. Každá nadrovina zväzku S môže sa pokladať za nadrovinu, v ktorej ležia súčty bodov nadroviny α a bodov nejakej inej nadroviny zväzku S.

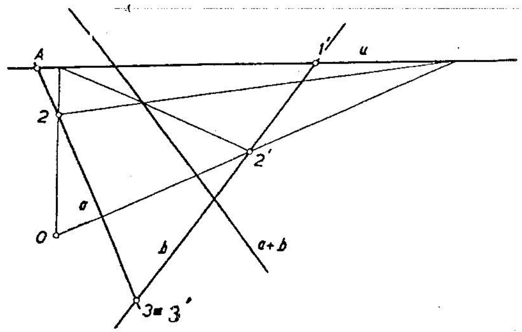
Dôsledok. *Ak sčítame body jedinej nadroviny navzájom, súčty ležia tiež v nadrovine α', lineárne závislej od nadrovín ω, α a podľa definície sčítania platí, že dvojpomer $(\Theta, \alpha', \alpha, \omega) = -1$, kde Θ je nadrovina, lineárne závislá od nadrovín α, ω a idúca bodom O.*

Platnosť tohto vzťahu vyplýva z predošlej konštrukcie.

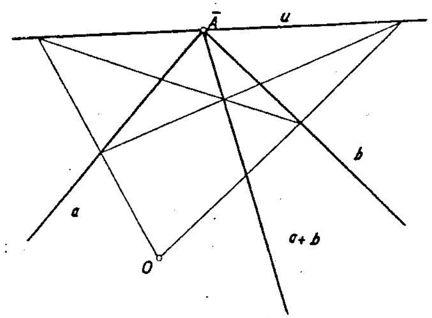


Obr. 3.

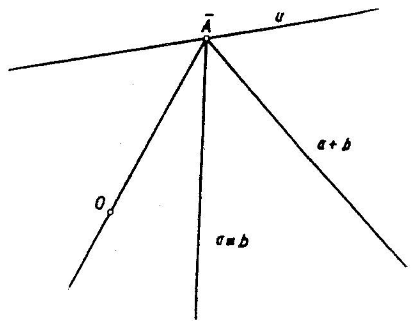
4. Aplikujme predošlé výsledky pre $n = 2$, t. j. na rovinu. Miesto sčítacej nadroviny ω máme pri sčítaní priamku u. Súčty bodov dvoch priamok a, b podľa viet z **2.** a **3.** odseku ležia na priamke v týchto prípadoch:



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

a) Priamky a, b sú rôzne a nepretínajú sa na priamke u (obr. 4). Medzi bodmi oboch priamok definujeme projektivitu P, v ktorej si odpovedajú priesečníky priamok a, b s priamkou u. Súčty takto priradených bodov ležia na priamke.

b) Ak sa priamky pretínajú na priamke u (obr. 5), súčty ich bodov ležia na priamke, prechádzajúcej ich priesečníkom A. Ak priamky a, b splývajú (obr. 6) a neprechádzajú bodom O, potom súčty sú na štvrtej harmonickej priamke k spojnici počiatku O a priesečníka A priamok $a \equiv b$ s priamkou u, vzhľadom na priamky $a \equiv b$ a u.

Poznámka. Vety odseku 2 a 3 možno dokázať aj iným spôsobom. Súčet, definovaný v tomto článku, je projektívnym zovšeobecnením vektorového súčtu v euklidovskom priestore. Príslušné dôkazy stačí potom urobiť pre euklidovský priestor a výsledky zovšeobecniť pre projektívny priestor.

Došlo 25. 2. 1956.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

О СУММАХ ТОЧЕК ДВУХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

ТАТЯНА МЕДЕКОВА

Выводы

В n-мерном проективном пространстве задано сложение точек и выведены условия для того, чтобы суммы точек двух гиперплоскостей принадлежали одной гиперплоскости.

ÜBER DIE SUMMEN DER PUNKTE ZWEIER HYPEREBENEN

TATIANA MEDEKOVÁ

Zusammenfassung

Im n-dimensionalen projektiven Raume ist eine Addition der Punkte bestimmt. Man untersucht die Bedingungen, unter welchen die Summe der Punkte zweier Hyperebenen wieder in einer Hyperebene liegen.