MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, IX, 2-1959

O TOTÁLNE NEKOMUTATÍVNYCH POLOGRUPÁCH

ŠTEFAN SCHWARZ a DOROTA KRAJŇÁKOVÁ, Bratislava

Pologrupou nazývame neprázdnu množinu elementov S, medzi ktorými je definované asociatívne násobenie.

Nech je $a \in S$. Ak v postupnosti

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

existuje len konečný počet rôznych elementov, hovoríme, že element a je konečného rádu. Ak každý element pologrupy S je konečného rádu, nazývame pologrupu periodickou. V takej pologrupe existuje ku každému $a \in S$ také číslo $\varrho = \varrho(a)$, že $a^\varrho = e$, kde e je idempotentom.

Štruktúra takýchto pologrúp je opísaná v práci [2]. Tu zhrnieme iba niektoré poznatky, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

Nech $E = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ je množina všetkých idempotentov $\in S$. Ak $a^\varrho = e_\alpha$, hovoríme, že element a patrí k idempotentu e_α. Množinu všetkých elementov patriacich k idempotentu e_α označíme znakom K_α. Pologrupa S dá sa potom písať ako súčet disjunktných množín $S = \sum_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$. Ku každému e_α existuje jediná maximálna grupa G_α, ktorá má e_α za jednotkový element. Zrejme je $G_\alpha \subseteq K_\alpha$. Pre každé $a \in K_\alpha$ je $ae_\alpha = e_\alpha a$. Ďalej je $K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = G_\alpha$. Tie a len tie elementy $a \in K_\alpha$, ktoré splňujú rovnicu $ae_\alpha = e_\alpha a = a$, patria do G_α.

Ak S je komutatívna pologrupa, je každé K_α pologrupou. Ak S nie je komutatívne, nemusí byť každé K_α pologrupou (pozri [2] príklad na strane 10). Existujú však aj také typy nekomutatívnych pologrúp, v ktorých sú všetky K_α pologrupy. Túto vlastnosť majú napr. tzv. totálne nekomutatívne periodické pologrupy zavedené v práci [2] (pozri [2], veta 5).

Úlohou tejto práce je vyšetrovať štruktúru takýchto pologrúp.

I

Definícia. *Nech S je periodická pologrupa, ktorá má aspoň dva idempotenty. Budeme hovoriť, že S je totálne nekomutatívna, ak pre každé dva idempotenty $e_\alpha \neq e_\beta$ platí $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$.*

Takáto pologrupa nemôže mať zrejme nulový ani obojstranný jednotkový element. Ľahko sa dokáže, že centrum takejto pologrupy je prázdne.

Súčin dvoch idempotentov nemusí byť idempotentom. Nasledujúca lemma hovorí niečo o prípade, ak to náhodou nastane.

Lemma 1. *Nech S je totálne nekomutatívna periodická pologrupa. Nech $e_\alpha \neq e_\beta$ a nech $e_\alpha e_\beta = e_\beta$; potom $e_\beta e_\alpha = e_\alpha$.*

Dôkaz. Z rovnosti $e_\alpha e_\beta = e_\beta$ vyplýva $e_\beta e_\alpha e_\beta = e_\beta$, ďalej $e_\beta e_\alpha e_\beta e_\alpha = e_\beta e_\alpha$, t. j. $(e_\beta e_\alpha)^2 = e_\beta e_\alpha$. Teda je aj $e_\beta e_\alpha$ idempotentom. Položme $e_\beta e_\alpha = e_\gamma$. Potom platí:

$$e_\gamma e_\alpha = (e_\beta e_\alpha) e_\alpha = e_\beta e_\alpha = e_\gamma,$$

$$e_\alpha e_\gamma = e_\alpha (e_\beta e_\alpha) = (e_\alpha e_\beta) e_\alpha = e_\gamma.$$

Zo vzťahu $e_\gamma e_\alpha = e_\alpha e_\gamma$ vyplýva vzhľadom na totálnu nekumutatívnosť $e_\gamma = e_\alpha$, č. b. t. d.

Veta 1. *Nech J je ľubovoľný obojstranný ideál totálne nekomutatívnej periodickej pologrupy S. Potom J obsahuje všetky idempotenty z S.*

Dôkaz. Nepriamo. Ak $S = J$, nemáme čo dokazovať. Predpokladajme, že $S - J$ je $\neq \emptyset$ a obsahuje idempotent e. Keďže J je samo periodickou pologrupou, obsahuje J aspoň jeden idempotent. Označme ho e_α. Potom je $ee_\alpha \in eJ \subseteq J$. Element ee_α nemusí byť idempotentom. Existuje však také ϱ, že $(ee_\alpha)^\varrho$ je nejaký idempotent e_β. Zrejme je $e_\beta \in J$ a $e_\beta \neq e$. Zo vzťahu $(ee_\alpha)^\varrho = e_\beta$ vyplýva $ee_\beta = e_\beta$. Podľa lemmy 1 je teda $e_\beta e = e$. Z toho vyplýva $e = e_\beta e \in Je \subseteq J$, čo je v rozpore s predpokladom $e \in S - J$.

Poznámka. Predpoklad, že J je obojstranný ideál, je podstatný. Ak by sme predpokladali, že J je napr. iba pravý ideál, veta nie je pravdivá, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 1. Nech $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ s touto multiplikačnou tabuľkou:

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_2	a_2	a_2
a_2	a_2	a_2	a_2
a_3	a_3	a_3	a_3

Pologrupa S je zrejme totálne nekomutatívna, lebo $a_2 a_3 \neq a_3 a_2$. Množina $\{a_2\}$ je pravý ideál, neobsahuje však všetky idempotenty.

Prv, než pôjdeme ďalej, pripomenieme si: Ak nejaká pologrupa má minimálny obojstranný ideál, má ho len jeden. Periodická pologrupa nemusí mať však minimálny obojstranný ideál. To ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 2. Nech S je množina prirodzených čísel $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, v ktorej je násobenie definované vzťahom $a \circ b = \max(a, b)$. Táto pologrupa je periodická, lebo každý element je sám idempotentom. Množina $J_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ je (obojstranným) ideálom z S a takto dostaneme všetky ideály. Keďže $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ je zrejmé, že neexistuje minimálny (obojstranný) ideál.

Ukážeme, že okolnosť vyložená v príklade 2 nemôže nastať u totálne nekomutatívnych periodických pologrúp.

Nech $\mathfrak{S}$ je systém všetkých obojstranných ideálov z S. Systém $\mathfrak{S}$ je neprázdny, lebo obsahuje aspoň S. Prenik N všetkých množín systému $\mathfrak{S}$ je neprázdny, lebo podľa vety 1 obsahuje množinu E všetkých idempotentov z S. Množina N je zrejme minimálnym obojstranným ideálom z S. Dokázali sme:

Veta 2. *Totálne nekomutatívna periodická pologrupa má minimálny obojstranný ideál.*

Nech je $e_\alpha \in E$. Keďže $e_\alpha \in N$, obsahuje N aj maximálnu grupu G_α patriacu k e_α. Teda súčet všetkých maximálnych grúp leží v N. Tento výsledok možno podstatne spresniť. Ukážeme najprv, že Se_α je minimálny ľavý ideál z S. Nech L je ľubovoľný ľavý ideál z S, pre ktorý platí $L \subseteq Se_\alpha$. Keďže L je periodická pologrupa, má L idempotent e, ktorý sa dá písať v tvare $e = ue_\alpha$, $u \in S$. Teda $ee_\alpha = ue_\alpha e_\alpha = e$. Na základe lemmy 1 je potom $e_\alpha e = e_\alpha$. Preto

$$L \subseteq Se_\alpha = Se_\alpha e \subset Se_\alpha L \subseteq L,$$

t. j. $L = Se_\alpha$. Množina Se_α nemá žiadny vlastný podideál z S, t. j. Se_α je minimálny ľavý ideál z S. Podobne sa dokáže, že $e_\alpha S$ je minimálny pravý ideál z S. Je známe, že v pologrupe, ktorá má minimálny pravý a minimálny ľavý ideál, je minimálny obojstranný ideál súčtom disjunktných izomorfných grúp. Pretože všetky maximálne grupy ležia v N, vyplýva odtiaľ:

Veta 3. *Všetky maximálne grupy totálne nekomutatívnej periodickej pologrupy sú navzájom izomorfné. Ich množinový súčet je minimálnym obojstranným ideálom N pologrupy S.*

Poznámka. Mohla by vzniknúť domnienka, že i všetky maximálne pologrupy K_α sú navzájom izomorfné. To nemusí byť pravda, ako ukazuje príklad 1. Tam sú maximálne pologrupy $K_1 = \{a_1, a_2\}$, $K_2 = \{a_3\}$; maximálne grupy sú $G_1 = \{a_2\}$, $G_2 = \{a_3\}$. Pologrupy K_1, K_2 nie sú zrejme izomorfné.

II

V tomto odseku budeme študovať maximálne obojstranné ideály pologrupy S.

Ideál $J \subset S$ nazývame **maximálnym**, ak $J \subsetneqq S$, ale neexistuje ideál J_1, ktorý splňuje vzťah $J \subsetneqq J_1 \subsetneqq S$.

Periodická pologrupa nemusí mať vôbec žiadny maximálny obojstranný ideál. To ukazuje tento príklad.

Príklad 3. Nech S je množina všetkých prirodzených čísel $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, v ktorej definujeme násobenie vzťahom $a \odot b = \min(a, b)$. Množina $J_n = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ je zrejme obojstranným ideálom z S a takto dostaneme každý obojstranný ideál našej pologrupy. Keďže $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots$, je zrejmé, že neexistuje žiadny maximálny obojstranný ideál z S.

Na druhej strane môže mať pologrupa i nekonečne mnoho maximálnych (obojstranných) ideálov. To ukazuje tento príklad.

Príklad 4. Nech S je množina dvojíc reálnych čísel

$$S = \{(a, a), (a, 0) \mid 0 \leqq a \leqq 1\}$$

a nech násobenie je definované vzťahom $(x, y) \cdot (u, v) = (x, 0)$. Idempotentami tejto pologrupy sú všetky dvojice $(a, 0)$, $0 \leqq a \leqq 1$. Je zrejmé totálne nekomutatívna, lebo pre každé dva idempotenty $e_\alpha, e_\beta \in S$ platí $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Minimálnym obojstranným ideálom je množina $N = \{(a, 0) \mid 0 \leqq a \leqq 1\}$. Maximálne pologrupy sú $K_a = \{(a, a), (a, 0)\}$. Každá množina $J_a = S - \{(a, a)\}$, $a \neq 0$, je zrejme maximálny (obojstranný) ideál. Je ich nekonečne mnoho.

Kedykoľvek budeme v ďalšom hovoriť o maximálnom ideáli, budeme samozrejme predpokladať, že S má maximálny ideál.

Lemma 2. *Nech S je periodická totálne nekomutatívna pologrupa. Nech J je ľubovoľný maximálny obojstranný ideál z S. Potom $S^2 \subseteq J$.*

Dôkaz. (Pozri analogicky Wallace—Koch [1], Theorem 2.) Položme $A = S - J$. Ukážme najprv, že $SAS \subseteq J$. Keby to tak nebolo, musel by existovať element a tak, že $SaS \cap A \neq \emptyset$. Pretože SaS je obojstranný ideál, je aj $SaS + J$ obojstranný ideál a keďže je väčší ako maximálny, je nevyhnutne $SaS + J = S$. Pretože $a \in S$ neleží v J, je $a \in SaS$. To znamená: existujú čísla $x, y \in S$ tak, že $a = xay$. Z toho vyplýva, že pre každé celé n je $a = x^n a y^n$. Avšak y^n s vhodne voleným n je idempotent $y^n = e$. Keďže je podľa vety 1 $e \in J$, je $a = x^n a y^n = x^n a e \in x^n a J \subseteq J$. To je spor s voľbou elementu a. Teda je $SAS \subseteq J$.

Z toho vyplýva ihneď: $S^3 \subseteq J$. Je totiž $S^3 = S(A + J)S = SAS + SJS \subseteq J + J = J$. Dokážeme teraz $S^2 \subseteq J$. Predpokladajme $S^2 \nsubseteq J$. Keďže S^2 je obojstranný ideál, je aj $S^2 + J$ obojstranný ideál, ale keďže je väčší ako maximálny ideál J, je $S^2 + J = S$. Z toho dostávame $S^2 = S^3 + JS \subseteq J + J = J$. To je v rozpore s predpokladom $S^2 \nsubseteq J$. Lemma 2 je dokázaná.

Poznámka. Pri dôkaze lemmy 2 sme použili iba podmienku $E \subseteq J$, takže lemma 2 platí pre každú periodickú pologrupu a každý maximálny ideál obsahujúci všetky idempotenty.

Nech S je pologrupa, pre ktorú platí $S^2 \subsetneqq S$. Nech je $a \in S - S^2$. Potom je zrejmé, že $S - \{a\}$ je maximálny ideál z S. Vo všeobecnosti môžu, pravda, existovať aj maximálne ideály, ktoré nedostaneme takýmto spôsobom. Ak však S je totálne nekomutatívna periodická pologrupa, vyplýva z lemmy 2, že každý maximálny ideál obsahuje S^2. Ak ku S^2 pridáme ľubovoľnú podmnožinu z $S - S^2$, dostaneme zrejme opäť obojstranný ideál. Aby sme dostali maximálny ideál, treba pridať všetky elementy s výnimkou jednoho jediného. Teda

Veta 4. *Nech S je totálne nekomutatívna periodická pologrupa, pre ktorú platí $S^2 \subsetneqq S$. Potom každý maximálny obojstranný ideál má tvar $J_a = S - \{a\}$, kde a je vhodne volený prvok z $S - S^2$.*

V ďalšom sa budeme zaoberať prípadom $S = S^2$.

Veta 5. *Nech S je totálne nekomutatívna periodická pologrupa, pre ktorú platí $S = S^2$. Potom*

a) buď je $S = N$ (t. j. S je jednoduchá pologrupa),

b) alebo $S - N \neq \emptyset$ a súčasne S nemá vôbec žiadny maximálny obojstranný ideál (t. j. žiadna rastúca postupnosť vlastných ideálov z S nemôže mať posledný člen).

Dôkaz. Predpokladajme, že je $N \neq S$. Keby existoval aspoň jeden maximálny ideál J, bolo by $N \subseteqq J \subset S$, $J \neq S$. Podľa lemmy 2 by však bolo $S^2 \subseteqq J$, t. j. $S = J$, čo je v rozpore s predpokladom.

Pre konečné pologrupy platí:

Veta 6. *Nech S je konečná totálne nekomutatívna pologrupa. Potom $S = S^2$ platí vtedy a len vtedy, ak S je jednoduchá pologrupa (t. j. ak $S = N$).*

Dôkaz. α) Ak S je jednoduchá, nemôže platiť $S - S^2 \neq \emptyset$, lebo S^2 by bolo vlastným podideálom z S. Teda je $S = S^2$.

β) Ak S nie je jednoduchá, je $N \subset S$, $N \neq S$. Keďže S je konečná, existuje nevyhnutne taký maximálny ideál J, že platí $N \subseteqq J \subset S$, $J \neq S$. Podľa lemmy 2 je $S^2 \subseteqq J$, teda $S^2 \neq S$, č. b. t. d.

Z vety 4 a 5 vyplýva tiež tento dôsledok:

Dôsledok: *Nech S je totálne nekomutatívna periodická pologrupa, ktorá nie je jednoduchá. Potom nutná a postačujúca podmienka, aby nemala žiadny maximálny ideál, je splnenie podmienky $S = S^2$.*

Poznámka. Nech $S = S^2$, S je periodická a $S \neq N$. Potom možno ľahko podať konštrukciu nekonečného rastúceho reťazca ideálov spomínaného vo vete 5, tvrdenie b.

Poznamenajme najprv: Ak $S = S^2$, $S \neq N$, potom pre žiadne $a \in S - N$ nemôže platiť $a \in SaS$. Keby totiž pre nejaké $a \in S - N$ platilo $a \in SaS$, existovali by dva také elementy $x, y \in S$, že $a = xay$. Potom by bolo tiež pre každé $n \geqq 1$ $a = x^{\iota}ay^{\iota}$. Keďže pre vhodne volené $n \geqq 1$ je $y^{\iota} = e \in N$, mali by sme $a = x^{\iota}ae \in x^{\iota}aN \subseteqq N$, čo je v rozpore s predpokladom. Špeciálne nemôže teda platiť pre žiadne $a \in S$ vzťah $SaS = S$.

Poznamenajme ďalej: Ku každému $a \in S$ existuje také $b \in S$, že $a \in SbS$. Keby totiž pre každé $x \in S$ platilo $a\, non \in SxS$, platilo by tiež $a\, non \in S(\sum_{x \in S} x)S = S^3 = S$, čo dáva zrejmý rozpor.

Zvoľme teraz ľubovoľný element $a \in S - N$ a nájdime také $a_1 \in S$, aby platilo $a \in S\, a_1S$. Keďže $N \subseteqq Sa_1S$ a Sa_1S obsahuje element a neležiaci v N, je iste $N \neq Sa_1S$. Zvoľme ďalej a_2 tak, aby platilo $a_1 \in Sa_2S$. Potom je $Sa_1S \subseteqq Sa_2S$ a keďže a_2 neleží v Sa_2S, je $N \subset Sa_1S \subset Sa_2S$, pričom na žiadnom

mieste neplatí znamienko rovnosti. Opakovaním tohto postupu dostávame reťazec $N \subset Sa_1S \subset Sa_2S \subset \ldots \subset Sa_kS \subset \ldots$ Z konštrukcie je zrejmé, že vzhľadom na vzťah $SbS \neq S$ nemôžeme takto po konečnom počte krokov vyčerpať celú pologrupu S.

Z vety 6 vyplýva:

Veta 7. *Nech S je konečná totálne nekomutatívna pologrupa. Nech N je jej minimálny obojstranný ideál. Potom existuje také celé číslo n, že $S^{\iota} = N$.*

Dôkaz. Uvažujme o tejto postupnosti ideálov z S

$$S \supseteqq S^2 \supseteqq S^3 \supseteqq \ldots \supseteqq S^{\iota} \supseteqq \ldots \tag{1}$$

Každý z týchto ideálov obsahuje v sebe N a N je obojstranný ideál z S^{ι}. Každá z pologrúp S^n má nejaký minimálny obojstranný ideál N_n. Zrejme je $N_n \subseteqq N$. Podľa vety 1 obsahuje N_n v sebe všetky idempotenty, t. j. množinu E. Teda má N_n v sebe aj súčet všetkých grúp $\sum_{e_\alpha \in E} G_\alpha$. Preto je $N \subseteqq N_n$. Teda N je minimálnym obojstranným ideálom každej z pologrúp S^{ι}. Postupnosť (1) má však iba konečný počet rôznych členov, teda od istého indexu n začínajúc je $S^{\iota} = S^{\iota+1} = S^{\iota+2} = \ldots$ Špeciálne je $S^n = S^{2n}$, t. j. $S^{\iota} = (S^{\iota})^2$. Podľa vety 6 je $S^{\iota} = N$, č. b. t. d.

Na záver tohto odseku ukážeme na príklade, že okolnosť spomínaná vo vete 5b môže skutočne nastať.

Príklad 5. Uvažujme o nekonečnej postupnosti rôznych elementov $\{0, a_1, a_2, \ldots\}$. Zostrojme komutatívnu pologrupu T vytvorenú týmito elementami, v ktorej 0 je nulovým elementom a v ktorej platia tieto relácie $a_1^2 = 0$, $a_i^2 = a_{i-1}$ (pre $i \geqq 2$).

Je zrejmé, že každý element pologrupy T rôzny od nuly sa dá písať ako súčin konečného počtu elementov v tvare $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_n}$, kde bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ a $n \geqq 1$. Pre ďalšie účely poznamenajme, že z definičných relácií vyplývajú tieto vlastnosti pologrupy T: a) Ak $0 \leqq k < i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$), platí $a_i^{2^k} = a_{i-k}$; b) $a_i^{2^i} = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots$; c) Pologrupa T má jediný idempotent 0 a každý element $b \in T$ je nilpotentný, t. j. ku každému $b \in T$ existuje prirodzené číslo $\varrho = \varrho(b)$, že $b^\varrho = 0$; d) Každý element z T dá sa písať v tvare súčinu dvoch iných, t. j. $T = T^2$; e) Ak $a_i \neq 0$, neobsahuje obojstranný ideál a_iT element a_i.

Dokážeme teraz, že pologrupa T nemá žiaden maximálny (obojstranný) ideál. Dôkaz vykonáme nepriamo. Predpokladajme, že M je maximálny ideál z T. Potom existuje aspoň jeden taký element $b = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ ($1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $n \geqq 1$), že $b \in T - M$. Uvažujme o ideáli $M + \{b\} + bT$. Tento ideál je väčší než M, teda sa rovná T. Dokážeme však, že vzťah $T = M + \{b\} + bT$ nie je možný. Na to stačí dokázať, že element a_{i_n+1} neleží v súčte $M + \{b\} + bT$. Najprv dokážeme, že a_{i_n+1} neleží v M. Zo vzťahu $a_{i_n+1} \in M$ by vyplývalo $a_{i_n+1}^2 = a_{i_n} \in M$, teda (keďže M je ideál) $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_n} = b \in M$, čo je v rozpore s predpokladom. Ďalej je zrejme $b \neq a_{i_n+1}$. Nakoniec, keby bolo $a_{i_n+1} \in bT$, t. j. $a_{i_n+1} \in a_{i_1} \dots a_{i_n}T \subset a_{i_n}T$, bolo by aj $(a_{i_n+1})^2 \in a_{i_n}T$, t. j. $a_{i_n} \in a_{i_n}T$, čo nie je pravda.

Uvažujme ďalej o pologrupe $E = \{e_1, e_2\}$, v ktorej je násobenie definované vzťahom $e_i e_k = e_k$ $(i, k = 1, 2)$.

Zostrojme nakoniec pologrupu $S = T \times E$, t. j. množinu dvojíc (b, e_i), $b \in T$, $e_i \in E$ s násobením $(b, e_i)(c, e_k) = (bc, e_k)$.

S je zrejme pologrupa, majúca práve dva idempotenty, totiž $(0, e_1)$, $(0, e_2)$. Je totálne nekomutatívna a platí $S^2 = S$. Každý obojstranný ideál tejto pologrupy je tvaru $J = \{(a, e_1) \cup (b, e_2) \mid a, b \in M\}$, kde M je ideál pologrupy T a naopak každá takáto množina je obojstranný ideál z S. Keďže T nemá maximálny ideál, nemá ani S žiadny maximálny obojstranný ideál. Naša pologrupa S splňuje predpoklady vety 5b. Pritom je $N = (0, e_1) \cup (0, e_2)$ a $S - N$ je skutočne neprázdne.

III

V tomto poslednom odseku dokážeme ešte dve vety o preniku všetkých maximálnych ideálov z S. Prvá z nich je dôsledkom viet 4 a 5.

Veta 8. *Nech S je periodická totálne nekomutatívna pologrupa. Nech S nie je jednoduchá. Nech $\mathfrak{M}$ je prenik všetkých maximálnych ideálov z S. Potom $\mathfrak{M} = S^2$.*

Dôkaz. a) Ak $S = S^2$, vyplýva z vety 5, že S nemá vôbec žiadny maximálny ideál; preto v tomto prípade nemáme čo dokazovať.

b) Ak $S - S^2 \neq \emptyset$, vieme z vety 4, že všetky maximálne ideály sú tvaru $J_a = S - \{a\}$, $a \in S - S^2$. Teda je

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{a \in S - S^2} J_a = \bigcap_{a \in S - S^2} \{S - \{a\}\} = S^2, \qquad \text{č. b. t. d.}$$

Poznámka. Analógia vety 8 pre ľavé ideály nie je pravdivá. To znamená: Ak označíme za predpokladov vety 8 znakom $\mathfrak{L}'$ prenik všetkých maximálnych ľavých ideálov z S, potom nemusí platiť $\mathfrak{L}' = S^2$. To ukazuje nasledujúci príklad (duálny k príkladu 1). Nech $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ je pologrupa s touto multiplikačnou tabuľkou (pozri hore):

	a_1	a_2	a_3
a_1	a_2	a_2	a_3
a_2	a_2	a_2	a_3
a_3	a_2	a_2	a_3

Existujú dva maximálne ľavé ideály. Sú to $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$. Pritom platí:

$$\mathfrak{L}' = \{a_1, a_2\} \cap \{a_2, a_3\} = \{a_2\} \neq S^2 = \{a_2, a_3\}.$$

Veta analogická k vete 8 sa dá dokázať iba vtedy, ak o maximálnych ľavých ideáloch urobíme ďalší obmedzujúci predpoklad. To bude obsahom vety 9. Najprv dokážeme túto lemmu, ktorá je podobná lemme 2.

Lemma 3. *Nech S je periodická pologrupa. Nech E je množina všetkých idempotentov z S. Nech L je taký maximálny ľavý ideál, pre ktorý je $ES \subseteq L$. Potom $S^2 \subseteq L$.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že $S(S - L) \subseteq L$. Predpokladajme, že to tak nie je. Potom existuje taký element $a \in S - L$, že $Sa \cap (S - L) \neq \emptyset$. Pretože Sa je ľavý ideál, ktorý nie je celý obsažený v maximálnom ľavom ideáli L, je nevyhnutné $Sa + L = S$. Teda je $a \in Sa$. Z toho vyplýva, že existuje také x, že $a = xa$. Teda pre každé celé n je $a = x^n a$. Pre vhodné n je $x^n = e$, kde e je idempotent. Zo vzťahu $a = ea$ vyplýva $a \in ES \subseteq L$. To je v rozpore s predpokladom $a \in S - L$. Teda je

$$S^2 = S\{L + (S - L)\} = SL + S(S - L) \subseteq L + L = L,$$

t. j. $S^2 \subseteq L$, č. b. t. d.

Veta 9. *Nech S je periodická totálne nekomutatívna pologrupa. Nech S nie je jednoduchá pologrupa. Nech E je množina všetkých idempotentov z S. Nech $\mathfrak{L}$ je prenik všetkých takých maximálnych ľavých ideálov z S, z ktorých každý obsahuje E. Potom $S^2 = \mathfrak{L}$.*

Dôkaz. Nech L je maximálny ideál, pre ktorý je $E \subseteq L$. Z toho vzťahu vyplýva $SE \subset SL$, t. j. $SE \subseteq L$. Množina SE sa dá písať ako súčet $SE = \sum_{e_\alpha \in E} (Se_\alpha)$. Pri dôkaze vety 3 sme videli, že každá z množín Se_α je minimálnym ľavým ideálom a ich súčet sa rovná N. Teda $SE = N$. Množina N sa však zároveň rovná súčtu všetkých minimálnych pravých ideálov z S, t. j. $ES = N$. Preto je $ES = SE$ a teda $ES \subset L$. Každý z maximálnych ľavých ideálov L splňuje teda predpoklady lemmy 3. Preto je $S^2 \subseteq \mathfrak{L}$. Keďže predpokladáme existenciu aspoň jedného maximálneho ľavého ideálu, je $\mathfrak{L} \subsetneqq S$, teda $S - S^2 \neq \emptyset$. Nech je $a \in S - S^2$ a $L_a = S - \{a\}$. Množina L_a je maximálnym ľavým ideálom z S. Keďže a nie je idempotentom, je $E \subseteq L_a$. Preto je $E = \bigcap_{a \in S - S^2} L_a \subseteq S^2$. Teda $S^2 \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \bigcap_{a \in S - S^2} L_a \subseteq S^2$, t. j. $\mathfrak{L} = S^2$, č. b. t. d.

LITERATÚRA

[1] Koch R. L., Wallace A. D., Maximal ideals in compact semigroups, Duke Math. J. 21 (1954), 681—686.

[2] Schwarz Š., K teoriji periodičeskich polugrupp, Čech. mat. žurnal 3 (78), (1953), 7—21.

Došlo 28. 10. 1958.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О ВПОЛНЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУППАХ

ШТЕФАН ШВАРЦ И ДОРОТА КРАЙНЯКОВА

Выводы

Периодическая полугруппа называется вполне некоммутативной, если она содержит более одново идемпотента и если для любых двух идемпотентов $e_\alpha \neq e_\beta$ имеет место $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$.

В дальнейшем S обозначает всегда вполне некоммутативную полугруппу и E множество всех идемпотентов $\in S$.

В статье доказываются следующие теоремы:

1. S содержит всегда минимальный двусторонний идеал N и имеет место соотношение $E \subset N$.

2. Если S конечная полугруппа, то существует натуральное число $n \geqq 1$ такое, что $S^n = N$.

3. Если $S^2 \neq S$, то а) пересечением всех максимальных двусторонних идеалов из S является множество S^2, б) множество S^2 является тоже пересечением всех максимальных левых идеалов содержащих E.

4. Если $S^2 = S$, то а) или $S = N$ (значит S простая полугруппа), б) или $S - N \neq \emptyset$ и S неимеет никакий максимальный двусторонний идеал. (Возможность этого второго случая показана на примере.)

ON TOTALLY NON-COMMUTATIVE SEMIGROUPS

By ŠTEFAN SCHWARZ and DOROTA KRAJŇÁKOVÁ

Summary

A torsion semigroup containing at least two idempotents is called totally non-commutative if for every couple of idempotents $e_\alpha \neq e_\beta$ we have $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$.

In the following S denotes always a totally non-commutative semigroup and E the set of all idempotents $\in S$.

The following results are proved:

1. S contains a minimal two-sided ideal N and $E \subset N$ holds.

2. If S is finite, then there is an integer $n \geqq 1$ such that $S^n = N$ holds.

3. If $S^2 \neq S$, then a) the intersection of all maximal two-sided ideals of S is the set S^2, b) the set S^2 is at the same time the intersection of all maximal left ideals containing E.

4. If $S^2 = S$, then a) either $S = N$ (hence S is a simple semigroup), b) or $S - N \neq \emptyset$ and S does not contain maximal two-sided ideals. (The possibility of this second case is proved by an example.)