MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK IX ČÍSLO 2

Z TEÓRIE KONEČNÝCH GRAFOV S LINEÁRNYM FAKTOROM I

ANTON KOTZIG, Bratislava

Úvod

Špeciálnu triedu grafov (v celej práci pod grafom budeme vždy rozumieť konečný graf) tvoria grafy, v ktorých existujú lineárne faktory (podgrafu L grafu G sa hovorí lineárny faktor, alebo tiež faktor prvého stupňa, ak L obsahuje všetky uzly z G a ľubovoľný uzol grafu G je incidentný práve s jednou hranou grafu L). Problematike lineárnych faktorov grafu venovalo sa v literatúre nemálo pozornosti. To presvedčivo hovorí o dôležitosti postavenia, ktoré táto problematika v teórii grafov zaujíma. Pozornosť sa sústredila najmä na otázku existencie lineárneho faktora v pravidelnom grafe (graf sa nazýva pravidelným grafom n-tého stupňa, ak každý jeho uzol je incidentný práve s n hranami grafu).

Priamo z definície lineárneho faktora vyplýva, že pravidelný graf prvého stupňa obsahuje lineárny faktor (lineárnym faktorom je tu graf sám). Veľmi jednoduchou sa problematika javí v pravidelnom grafe druhého stupňa. Je známe, že v pravidelnom grafe druhého stupňa existuje lineárny faktor práve vtedy, keď každá z jeho komponent (komponentou je tu vždy kružnica) obsahuje párny počet hrán (resp. uzlov). Dôležitú vetu pre pravidelné grafy tretieho stupňa odvodil Petersen v [1], ktorý dokázal, že v takom ľubovoľnom pravidelnom grafe tretieho stupňa, ktorý neobsahuje most (pod mostom rozumie sa hrana, ktorá nepatrí do žiadnej kružnice grafu), existuje lineárny faktor. Nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu lineárneho faktora v pravidelnom grafe tretieho stupňa (neobmedzujúc sa pritom len na grafy bez mostov, ako je to u Petersena) odvodil som v svojej práci [2], kde som dokázal toto: v ľubovoľnom pravidelnom grafe tretieho stupňa G existuje lineárny faktor práve vtedy, keď v G existuje taký Listingov systém otvorených ťahov, že každý jeho ťah obsahuje práve tri hrany a v ďalšej práci [3] som dokázal, že v predošlej vete možno dokonca slová „práve tri hrany" nahradiť slovami „nepárny počet hrán" (systém $\mathfrak{S}$ otvorených ťahov grafu G nazývame Listingovým systémom, ak každá hrana grafu G je hranou práve jednoho ťahu $\in \mathfrak{S}$

a počet ťahov systému činí polovicu z počtu tých uzlov grafu, ktoré sú uzlami nepárneho stupňa v grafe G; je známe, že v každom pravidelnom grafe nepárneho stupňa existuje Listingov systém otvorených ťahov).

Poznatky o pravidelných grafoch vyššieho stupňa, pokiaľ ide o ich lineárne faktory, sú zatiaľ veľmi skromné. O pravidelnom grafe nepárneho stupňa je napr. známe ešte toto: ak v istom pravidelnom grafe nepárneho stupňa G existuje lineárny faktor L a G obsahuje most, potom L obsahuje všetky mosty grafu G (pozri König [4], str. 195). O lineárnych faktoroch v pravidelných grafoch párneho stupňa (vyššieho než druhého) sa nevie takmer nič. V práci [5] som dokázal, že pre ľubovoľné prirodzené $n > 3$ existuje súvislý pravidelný graf n-tého stupňa (dokonca rodu nula — ako z konštrukcie tam opísanej vyplýva) s párnym počtom uzlov, ktorý neobsahuje žiadny most a neexistuje v ňom lineárny faktor.

Trochuináč sa však veci majú, pokiaľ ide o špeciálne pravidelné grafy. Je napr. známe (pozri König [4], str. 171), že ľubovoľný párny pravidelný graf n-tého stupňa dá sa rozložiť na n lineárnych faktorov (párny graf je graf, ktorý neobsahuje kružnicu s nepárnym počtom hrán). Alebo je známe, že ľubovoľný kompletný graf s párnym počtom uzlov dá sa rozložiť na lineárne faktory (kompletný graf je graf, v ktorom ľubovoľné dva uzly sú spojené práve jednou hranou). Istým skromným príspevkom v uvažovanom smere môžu byť aj poznatky o špeciálnych grafoch štvrtého stupňa (o tzv. ϑ-grafoch), ktoré som odvodil v práci [6]. To sú v hrubých obrysoch známe poznatky o lineárnych faktoroch v pravidelných grafoch.

Otázku existencie lineárneho faktora vo všeobecnejších grafoch (bez toho, že by sa obmedzoval len na pravidelné grafy, ba dokonca na grafy konečné) skúmal Kaluža v [7]. Kaluza konštruuje zložitejšie grafy z grafov jednoduchších, vychádzajúc z grafu G_0 — ktorý je cestou s nepárnym počtom hrán — pomocou dvoch operácií: (A) napojením novej párnej cesty na uzol grafu; (B) spojením dvoch uzlov grafu novou nepárnou cestou. Pod párnou, resp. nepárnou cestou rozumie cestu s párnym, resp. nepárnym počtom hrán; napojenie cesty C na uzol u istého grafu G_i (aby tak vznikol istý graf G_{i+1}) poníma tak, že jeden koncový uzol cesty C (ktorá nemá s grafom G_i žiadny prvok spoločný) splynie s uzlom u; spojenie uzlov $u \neq v$ grafu G_i novou cestou C' chápe tak, že jeden koncový uzol cesty C' splynie s uzlom u, druhý splynie s uzlom v. Dokazuje toto: v ľubovoľnom grafe G existuje lineárny faktor práve vtedy, keď graf G možno z istej nepárnej cesty G_0 skonštruovať pomocou operácií (A), (B), prípadným ich opakovaním. Využitie tohto Kaluzovho kritéria pre existenciu lineárneho faktora je sťažené najmä tam, kde sa nemôžeme obmedziť iba na grafy s malým počtom uzlov (napr. v triede všetkých pravidelných grafov istého daného stupňa). Pritom zostáva, pravda, ešte mnoho dôležitých otázok otvorených.

V našej práci zameriame sa predovšetkým na skúmanie základných spoločných vlastností úplne všeobecných grafov, ktoré spĺňajú túto jedinú podmienku: existuje v nich lineárny faktor. Napriek tomu, že sa nezameriavame na hľadanie jednoduchších, ľahšie použiteľných kritérií pre posúdenie otázky existencie lineárneho faktora v grafe, dúfame, že prispejeme týmto k riešeniu niektorých už uvedených otvorených otázok. K tomu nás pobáda aj skutočnosť, že práve v naznačenom smere teória grafov často aj v základných otázkach vykazuje celý rad medzier.

1. Jadro grafu, α-kružnice a α-cesty

Prv než prikročíme k odvodeniu základných pojmov, o ktoré sa chceme pri skúmaní grafov s lineárnym faktorom opierať, pripomenieme si formou pomocných viet niektoré — pre ďalšie skúmanie užitočné — poznatky.

Lemma 1. *Ľubovoľná komponenta grafu s lineárnym faktorom obsahuje párny počet uzlov.*

Lemma 2. *V ľubovoľnom grafe G existuje lineárny faktor práve vtedy, keď existuje lineárny faktor v každej jeho komponente. Ak G má komponenty G_1, $G_2, \ldots, G_n$ a L_i je ľubovoľný lineárny faktor komponenty G_i $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, potom kompozícia $L = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$ je lineárnym faktorom grafu G.*[1] *Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G a L_i podgraf komponenty G_i, pozostávajúci z tých prvkov a len z tých prvkov z L, ktoré patria do G_i, potom L_i je lineárnym faktorom grafu G_i.*

Lemma 3. *Nech graf G_0 je podgrafom istého grafu G_1, pričom G_0 obsahuje všetky uzly z G_1. Ľubovolný lineárny faktor grafu G_0 je tiež lineárnym faktorom grafu G_1.*

Dôkaz lemmy 1, 2, 3 je veľmi ľahký, jeho vykonanie prenechávam preto čitateľovi.

Prikročme teraz k definícii pre ďalšie skúmanie dôležitých pojmov.

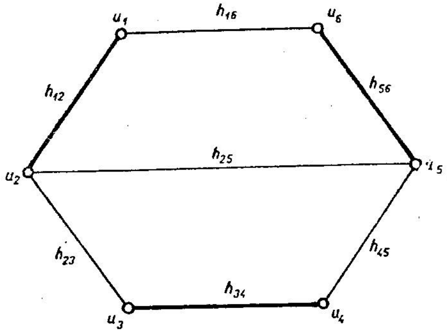
Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor L. Kružnici K grafu G budeme hovoriť alternujúca kružnica (alebo tiež skrátene α-kružnica) vzhľadom na L, ak ľubovoľný uzol z K je incidentný práve s jednou takou hranou z K, ktorá patrí do L. Ceste C grafu G budeme hovoriť alternujúca cesta (alebo tiež skrátene α-cesta) vzhľadom na L, ak každý uzol cesty C je incidentný práve s jednou hranou cesty C, patriacou do L.

Poznámka 1. Pojem α-kružnice vzhľadom na lineárny faktor grafu pre špeciálne prípady grafov (pravidelné grafy tretieho stupňa) zaviedol vlastne

[1]) Nech $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sú podgrafy istého grafu G. Pod kompozíciou G_0 grafov G_1, $G_2, \ldots, G_n$ (písané $G_0 = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$) rozumieme podgraf grafu G, ktorý obsahuje práve tie hrany $\in G$, ktoré sa vyskytujú v nepárnom počte komponovaných grafov G_1, $G_2, \ldots, G_n$ a okrem toho už len tie uzly $\in G$, ktoré sú s takýmito hranami incidentné. Kompozícia môže byť, pravda, aj nulovým grafom.

už Petersen v [1] (používa preň názov Wechselpolygon); α-cesta v našom pojatí je novým pojmom v teórii grafov. Názov alternujúci pochádza z toho, že α-kružnica, resp. α-cesta má túto vlastnosť: v postupnosti opisujúcej sled hrán v takejto kružnici, resp. cesty striedajú sa hrany patriace do L a nepatriace do L.

Príklad. Na obr. 1 je znázornený graf, ktorý obsahuje lineárny faktor. Uzly grafu sú znázornené malými krúžkami, hrany čiarami, ktoré tieto krúžky spojujú. Pritom hrany lineárneho faktora sú znázornené silnejšími čiarami. Cesta $C = u_1, h_{1,2}, u_2, h_{25}, u_5, h_{56}, u_6$ je zrejme α-cestou vzhľadom na L a kružnica obsahujúca hrany $h_{12}, h_{25}, h_{56}, h_{16}$ je α-kružnicou vzhľadom na L.



Obr. 1.

Poznámka 2. Graf s lineárnym faktorom nemusí obsahovať kružnicu a tým menej α-kružnicu. Existujú tiež grafy s lineárnym faktorom obsahujúce kružnicu, v ktorých neexistuje žiadna α-kružnica. Takýto graf je znázornený na obr. 2. Naproti tomu platí: v každom grafe s lineárnym faktorom L existuje aspoň jedna α-cesta. Napríklad jedna hrana z L spolu s uzlami, ktoré spojuje, tvorí α-cestu.

Platia tieto vety:

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný graf a nech $L_1 \neq L_2$ sú ľubovoľné dva lineárne faktory grafu G, potom ľubovoľná kružnica z kompozície $L_1 \times L_2$ je alternujúca aj vzhľadom* na L_1 *aj vzhľadom na L_2.*

Dôkaz. Nech u je ľubovoľný uzol grafu G. Z definície lineárneho faktora vyplýva, že uzol u je incidentný práve s jednou hranou z L_1 (označme ju h_1) a práve s jednou hranou z L_2 (označme ju h_2). Ak je $h_1 = h_2$, potom $h_1 = h_2$ nie je hranou kompozície $L_1 \times L_2$ (pretože sa vyskytuje v párnom počte kompo- novaných grafov). Potom však uzol u nie je incidentný ani s jednou hranou kompozície $L_1 \times L_2$ a nepatrí teda do $L_1 \times L_2$. Ak je $h_1 \neq h_2$, potom $L_1 \times L_2$ obsahuje aj hranu h_1 aj hranu h_2 aj uzol u, ktorý je uzlom druhého stupňa v grafe $L_1 \times L_2$. Ak teda uzol u je uzlom kompozície $L_1 \times L_2$, potom je

incidentný práve s jednou hranou kompozície patriacou do L_1 a práve s jednou hranou patriacou do L_2. To platí o ľubovoľnom uzle kompozície. Preto kompozícia $L_1 \times L_2$ je pravidelným grafom druhého stupňa, každá jej komponenta je kružnica, ktorá je α-kružnicou aj vzhľadom na L_1 aj vzhľadom na L_2, čo bolo treba dokázať.

Veta 2. *Nech G je ľubovoľný graf obsahujúci lineárny faktor L_1 a nech H_1 je množina hrán lineárneho faktora L_1. Nech K je ľubovoľná α-kružnica v G alternujúca vzhľadom na L_1. Označme znakom H'_1, resp. (H'_2) množinu hrán z K patriacich (resp. nepatriacich) do H_1. Platí: množina hrán H_2, kde $H_2 = H_1 - H'_1 + H'_2$, je množinou hrán istého lineárneho faktora L_2 ($L_2 \neq L_1$) grafu G.*

Dôkaz. Nech u je ľubovoľný uzol z G. Nech h_1 je tá hrana z H_1, s ktorou je incidentný uzol u. Je buď $h_1 \in H_1 - H'_1$, alebo je $h_1 \in H'_1$. V prvom prípade je tiež $h_1 \in H_2$, v druhom prípade uzol u je uzlom kružnice K a okrem hrany h_1 je incidentný ešte s jednou inou hranou kružnice K (označme ju h_2), ktorá patrí do H'_2. Pretože h_1 nepatrí do $H_1 - H'_1 + H_2$ a je $h_2 \in H'_2$; $h_2 \in H_2$ a žiadna iná hrana incidentná s uzlom u nepatrí do H_2, je nutne uzol u incidentný práve s jednou hranou z H_2. Ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou istého lineárneho faktora L_2. Pretože H'_1, H'_2 sú z H_2, teda H_2 je množinou hrán istého lineárneho faktora L_2. Pretože H'_1, H'_2 sú neprázdne množiny, je $H_1 \neq H_2$ a teda tiež $L_1 \neq L_2$. Dôkaz je vykonaný.

Vetu 2 možno formulovať aj takto: Kompozícia $L_2 = K \times L_1$ ľubovoľnej kružnice K, ktorá je alternujúca vzhľadom na lineárny faktor L_1 grafu G s lineárnym faktorom L_1 je lineárny faktor grafu G.

Poznámka 3. Výsledky z vety 1 a 2 majú tento zaujímavý dôsledok: zmenou zatriedenia hrán v istých α-kružniciach vzhľadom na pevne zvolený faktor L_0 (namiesto hrán z α-kružnice patriacich do L_0 zaradíme do H_i tie hrany z α-kružnice, ktoré nepatria do L_0 a okrem toho do H_i zaradíme už len tie hrany z L_0, ktoré nepatria do uvažovaných α-kružníc) možno skonštruovať množinu hrán ľubovoľného lineárneho faktora L_i. Aby vznikol z lineárneho faktora L_0 lineárny faktor L_i, treba urobiť opísanú zmenu v kružniciach a len v kružniciach kompozície $L_0 \times L_i$.

Veta 3. *Nech G je ľubovoľný graf a nech L_a, L_b sú ľubovoľné dva lineárne faktory grafu G. Nech $\widehat{H}_a$ (resp. $\widehat{H}_b$) je množina tých hrán z G, ktoré sú hranou aspoň jednej kružnice alternujúcej vzhľadom na L_a (resp. vzhľadom na L_b). Platí: $\widehat{H}_a = \widehat{H}_b$.*

Dôkaz. Ak by obe množiny $\widehat{H}_a$, $\widehat{H}_b$ boli prázdne, alebo ak by bolo $\widehat{H}_a = \widehat{H}_b \neq 0$, netreba nič dokazovať. Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že existuje hrana $h \in \widehat{H}_a$, ktorá nepatrí do $\widehat{H}_b$.

Nech K je ľubovoľná α-kružnica vzhľadom na L_a obsahujúca hranu h. Nech $L_c = K \times L_a$. Podľa vety 2 je L_c lineárny faktor grafu G a platí: hrana h je buď hranou z L_a a nepatrí do L_b, alebo je hranou z L_b a nepatrí do L_a. Preto buď kompozícia $L_a \times L_b$ (prvý prípad), alebo kompozícia $L_c \times L_b$ (druhý prípad) obsahuje hranu h. Pretože ľubovoľná kružnica z kompozícií $L_a \times L_b$; $L_c \times L_b$ je kružnicou alternujúcou vzhľadom na L_b a práve jedna z týchto kružníc obsahuje hranu h, existuje kružnica K' obsahujúca hranu h, ktorá je α-kružnicou vzhľadom na L_b; čiže h patrí do $\widehat{H}_b$. To je spor s predpokladom. Podobne dostaneme sa do sporu, ak predpokladáme, že existuje hrana $h' \in \widehat{H}_b$, ktorá nepatrí do $\widehat{H}_a$. Preto je $\widehat{H}_a = \widehat{H}_b$, čo bolo treba dokázať.

Priamym dôsledkom vety 3 je táto veta:

Veta 4. *Množina $\widehat{H}$ tých hrán grafu G, ktoré sú hranou aspoň jednej α-kružnice vzhľadom na istý lineárny faktor grafu G, nie je odvislá od voľby lineárneho faktora.*

Dôkaz je zrejmý.

Definícia. *Podgraf grafu G (obsahujúceho aspoň jeden lineárny faktor), ktorý pozostáva práve z tých hrán, ktoré sú hranou aspoň jednej α-kružnice v G a z uzlov s týmito hranami incidentných, budeme nazývať jadrom grafu G. Jadro grafu G budeme označovať znakom $\widehat{G}$. Ak o istom grafe (s lineárnym faktorom) G platí: $G = \widehat{G}$, t. j. ak graf G je sám sebe jadrom, budeme sa tiež vyjadrovať tak, že graf G je jadro.*

Jadrom grafu môže byť aj nulový graf (príklad: graf znázornený na obrázku 2 má nulové jadro).

Dohovor. Graf, ktorý vznikne z grafu G (obsahujúceho lineárny faktor) odstránením všetkých tých jeho hrán, ktoré nepatria do žiadneho lineárneho faktora grafu G, budeme označovať znakom $\mathring{G}$.

Platí táto veta:

Veta 5. *Množina všetkých hrán $\in \mathring{G}$, ktoré patria do komponent grafu $\mathring{G}$, obsahujúcich iba po jednej hrane, je práve množinou všetkých hrán grafu G, ktoré patria do každého lineárneho faktora grafu G. Tie komponenty grafu $\mathring{G}$, ktoré obsahujú viac než jednu hranu (pritom každá komponenta grafu $\mathring{G}$ obsahuje aspoň jednu hranu), tvoria práve komponenty jadra $\widehat{G}$.*

Dôkaz. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G a nech h_1 je hrana, ktorá je jedinou hranou istej komponenty grafu $\mathring{G}$. Nech u_1 je uhol incidentný s hranou h_1. Uzol u_1 je incidentný práve s jednou hranou z L a pretože žiadna hrana incidentná s u_1 a iná než h_1 nepatrí do L, musí h_1 patriť do L. Teda h_1 patrí do každého lineárneho faktora grafu G. Platí tiež hrana h_1 nepatrí do $\mathring{G}$.

Nech h_2 je hrana, patriaca do takej komponenty grafu $\mathring{G}$, ktorá obsahuje viac než jednu hranu. Potom hrana h_2 je incidentná aspoň s jedným uzlom (označme ho u_2), ktorý je vyššieho než prvého stupňa a existuje hrana h_2' iná než h_2, ktorá je incidentná s uzlom u_2. Priamo z definície grafu $\mathring{G}$ vyplýva, že existuje lineárny faktor L_2, resp. L_2' grafu G obsahujúci hranu h_2, resp. hranu h_2'. Kompozícia $L_2 \times L_2'$ podľa vety 1 patrí celá do jadra $\widehat{G}$ a pretože kompozícia $L_2 \times L_2'$ obsahuje nutne aj hranu h_2 aj hranu h_2', platí: hrana h_2 patrí do jadra $\widehat{G}$.

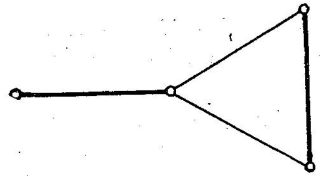
Z uvedeného vyplývajú ihneď všetky tvrdenia vety.

Z definície grafu $\mathring{G}$ a z vety 5 vyplýva táto veta:

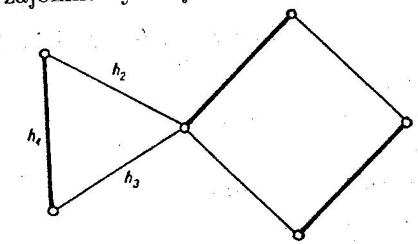
Veta 6. *Ľubovoľný lineárny faktor grafu G je tiež lineárnym faktorom grafu $\mathring{G}$ a obrátene: ľubovoľný lineárny faktor grafu $\mathring{G}$ je lineárnym faktorom grafu G. Ak jadro $\widehat{G}$ je nenulový graf, potom v $\widehat{G}$ existuje lineárny faktor a každému lineárnemu faktoru z G odpovedá (indukovaný) lineárny faktor v $\widehat{G}$ a naopak. Jadrom nenulového jadra $\widehat{G}$ je jadro $\widehat{G}$, čiže: $\widehat{\widehat{G}} = \widehat{G}$.*

Dôkaz. Veta je dôsledkom vety 5.

Iný dôsledok vety 5 možno formulovať takto: ľubovoľná hrana h grafu G obsahujúceho aspoň jeden lineárny faktor je buď hranou jadra $\widehat{G}$, alebo nepatrí do žiadneho lineárneho faktora grafu G, alebo patrí do každého lineárneho faktora grafu G a tieto tri prípady sa vzájomne vylučujú.



Obr. 2.



Obr. 3.

Príklad. Na obrázku 3 je znázornený graf G, v ktorom existuje lineárny faktor (hrany lineárneho faktora sú znázornené silnejšími čiarami). Hrana h_1 je hranou každého lineárneho faktora v G (čitateľ sa ľahko presvedčí, že v znázornenom grafe existujú dva rôzne lineárne faktory); hrany h_2, h_3 nepatria do žiadneho lineárneho faktora v G; ostatné hrany patria do $\widehat{G}$.

Veta 7. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor L_0 a nech $u \neq v$ sú ľubovoľný dva uzly z G. Platí: α-cesta vzhľadom na ľubovoľný lineárny faktor L_i grafu G, ktorá spojuje uzly u, v, existuje práve vtedy, keď existuje α-cesta vzhľadom na lineárny faktor L_0, ktorá spojuje uzly u, v.*

Dôkaz. (A) Nech v G existuje α-cesta C vzhľadom na L_0, ktorá spojuje uzly u, v. Utvorme z grafu G graf G' tak, že uzly u, v spojíme novou — v G sa nevyskytujúcou — hranou h'. Cesta C spolu s hranou h' tvorí v grafe G' α-kružnicu vzhľadom na L_0. Teda h' je hranou jadra $\widehat{G}'$.

Pretože graf G' má tie isté uzly ako graf G a graf G je podgrafom grafu G', ľubovoľný lineárny faktor L_i grafu G je tiež lineárnym faktorom grafu G'. Podľa vety 3 a 4 existuje v grafe G' α-kružnica K_i vzhľadom na ľubovoľný linerány faktor L_i obsahujúca hranu h'. Ak zrušíme v kružnici K_i hranu h', dostaneme tak cestu C_i alternujúcu vzhľadom na L_i, ktorá spojuje uzly u, v a pritom cesta C_i je podgrafom grafu G. Teda ak v grafe G existuje α-cesta vzhľadom na L_0 spojujúca uzly u, v, potom existuje v G cesta C_i spojujúca uzly u, v alternajúca vzhľadom na ľubovoľný lineárny faktor L_i grafu G.

(B) Nech v grafe G neexistuje taká cesta spojujúca uzly u, v, ktorá by bola α-cestou vzhľadom na L_0, potom nemôže existovať ani α-cesta vzhľadom na L_i — kde L_i je ľubovoľný pevne zvolený lineárny faktor grafu G —, ktorá spojuje uzly u, v, lebo z existencie takejto cesty by podľa časti (A) dôkazu vyplývala existencia cesty C_0 alternujúcej vzhľadom na L_0 spojujúcej uzly u, v, čo je proti predpokladu.

Preto α-cesta vzhľadom na ľubovoľný lineárny faktor L_i grafu G, ktorá spojuje uzly u, v, existuje práve vtedy, keď existuje takáto α-cesta vzhľadom na L_0; čo bolo treba dokázať.

2. Relácia Ω a relácia Λ v množine uzlov grafu

Prvé poznatky, ktoré sme získali v úvahách predchádzajúcej časti umožňujú nám definovať ďalšie dôležité pojmy a zoznámiť sa s ich základnými vlastnosťami.

Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor. Definujme si v množine uzlov grafu G reláciu Ω takto: uzly u, v sú v relácii Ω (písané $u\Omega v$) práve vtedy, keď $u = v$, alebo keď existuje v G taká cesta spojujúca uzly u, v, ktorej každá hrana je hranou aspoň jednoho lineárneho faktora grafu G. Definujme si ďalej reláciu Λ takto: uzly u, v sú v relácii Λ (písané $u\Lambda v$) práve vtedy, keď neexistuje v G taká α-cesta (vzhľadom na ľubovoľny lineárny faktor — pozri vetu 7), ktorá by spojovala uzly u, v. Platí táto veta:

Veta 8. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor. Relácia Ω v množine uzlov grafu G je reláciou ekvivalencie.*

Dôkaz. Veta vyplýva priamo z vety 5.

Dohovor. Rozklad množiny U_G uzlov grafu G (obsahujúceho lineárny faktor) na triedy uzlov, ktoré sú v relácii Ω, budeme označovať znakom $\overline{U}_G^\Omega$.

Veta 9. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor a nech $\mathring{G}$ je graf, ktorý vznikne z G odstránením všetkých hrán, ktoré nepatria do žiadneho lineárneho faktora grafu G. Platí $\overline{U}_G^\Omega = \overline{U}_{\mathring{G}}^\Omega$ je rozklad množiny uzlov grafu $\mathring{G}$ na množiny uzlov jednotlivých jeho komponent.*

Dôkaz. Veta je dôsledkom vety 5 a vety 6.

Lemma 4. *Nech G je ľubovoľný graf s lineárnym faktorom. Ľubovoľná trieda rozkladu $\overline{U}_G^\Omega$ množiny jeho uzlov obsahuje párny počet uzlov.*

Dôkaz. Lemma je dôsledkom lemmy 1 a vety 5, 6.

Veta 10. *Nech G je ľubovoľný graf, obsahujúci aspoň jeden lineárny faktor, ktorý má nenulové jadro. Nech h je ľubovoľná hrana z $\hat{G}$ a nech h spojuje uzly u_1, u_2. Platí: $u_1\Omega u_2$, t. j. uzly u_1, u_2 patria do tej istej triedy U_i rozkladu $\overline{U}_G^\Omega = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ a neplatí $u_1\Lambda u_2$. Ak v je ľubovoľný taký uzol z G, že platí $u_1\Lambda v$; $u_2\Lambda v$, potom platí $u_x\Lambda v$ pre všetky uzly u_x z množiny U_i.*

Dôkaz. Podľa vety 6 existuje taký lineárny faktor L grafu G, ktorý obsahuje hranu h. Cesta $C = u_1, h, u_2$ je takou cestou spojujúcou uzly u_1, u_2, ktorej jediná hrana je hranou lineárneho faktora v G. Preto je $u_1\Omega u_2$. Cesta C je však tiež α-cestou vzhľadom na L, preto neplatí $u_1\Lambda u_2$.

Nech v je ľubovoľný taký uzol z G, o ktorom platí $u_1\Lambda v$, $u_2\Lambda v$. Ak by o triede U_i platilo $U_i = \{u_1, u_2\}$, netreba už nič dokazovať. Predpokladajme, že okrem uzlov u_1, u_2 obsahuje U_i ešte ďalšie uzly.

Nech L' je ľubovoľný taký lineárny faktor grafu G, ktorý neobsahuje hranu h. Pretože h patrí do $\hat{G}$, existuje α-kružnica K' vzhľadom na L', ktorá obsahuje hranu h. Ak v kružnici K' zrušíme hranu h, dostaneme tak zrejme cestu C' spojujúcu uzly u_1, u_2, ktorá je α-cestou vzhľadom na L'.

I. Tvrdím: nech $C' = u'_1, h_{1,2}, u'_2, \ldots, u'_{2n}$ je ľubovoľná α-cesta vzhľadom na L', ktorá spojuje uzol $u'_1 = u_1$ s uzlom $u'_{2n} = u_2$, potom platí $u'_x \neq v$ pre všetky $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$.

Dôkaz tvrdenia. Pretože podľa predpokladu existuje α-cesta C' vzhľadom na L', ktorá spojuje uzly u_1, u_2 a je $u_1\Lambda v$, $u_2\Lambda v$, je nutne $u'_1 = u_1 \neq v$; $u'_{2n} = u_2 \neq v$. Ľubovoľný uzol u_x z C' rozdeľuje cestu C' na dve čiastočné cesty: na cestu C'_1, ktorá spojuje uzol u'_1 s uzlom u'_x a na cestu C'_2, ktorá spojuje uzol u'_x s uzlom u'_{2n}. Práve jedna z ciest C'_1, C'_2 je α-cestou vzhľadom na L' a pretože má platiť súčasne $u'_1\Lambda v$, $u'_{2n}\Lambda v$, je nutne $u'_x \neq v$ pre všetky $x \in \{2, 3, \ldots, 2n-1\}$; čiže je $u'_x \neq v$ pre všetky $u'_x \in C'$.

II. Tvrdím: nech $C' = u'_1, h_{1,2}, u'_2, \ldots, h_{2n-1,2n}, u'_{2n}$ je ľubovoľná α-cesta vzhľadom na L', ktorá spojuje uzol $u'_1 = u_1$ s uzlom $u'_{2n} = u_2$, potom platí $v\Lambda u'_x$ pre všetky $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$.

Dôkaz tvrdenia. Predpokladajme naopak, že existuje α-cesta C'' vzhľadom na L', ktorá spojuje uzol v s istým uzlom u'_x z C' a nech $C'' = v_1, g_{1,2}, v_2, \ldots, v_{2m}$ (kde $v_1 = v$, $v_{2m} = u'_x$; hrana $g_{i,i+1} \in C''$ spojuje uzol v_i s uzlom v_{i+1}). Podľa predošlého je $v_1 = v \neq u'_y$ pre všetky $y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Označme znakom z najmenšie číslo z $\{1, 2, \ldots, 2m\}$, o ktorom platí $v_z \in C''$ patrí do C'. Pretože C'' je α-cesta vzhľadom na L', patria do L' z hrán $\in C''$ tieto a len tieto hrany: $g_{1,2}, g_{3,4}, \ldots, g_{2m-1,2m}$. Platí nutne $z \equiv 0 \pmod 2$, t. j. hrana $g_{z-1,z} \in C''$ nepatrí do L. Hrana $g_{z-1,z}$ nepatrí do C' a pretože uzol $v_z = u'_i$ je incidentný práve s jednou hranou z L', ktorá patrí do α-cesty C', nemôže hrana $g_{z-1,z}$ patriť do L (ináč by uzol u'_i bol incidentný s dvoma hranami z L', čo nie je možné).

Uzol u'_i rozdeľuje cestu C' na dve cesty C'_a, C'_b, z ktorých prvá spojuje uzol u'_1 s uzlom u'_i, druhá uzol u'_i s uzlom u'_{2n}. Práve jedna z týchto ciest je α-cestou vzhľadom na L'. Označme znakom C_0'' túto časť cesty C'': $C_0'' = v_1, g_{1,2}, v_2, \ldots, v_{z-1}, g_{z-1,z}, v_z$.

Pretože cesty C_a', C_0'', ani cesty C_b', C_0'' nemajú spoločné hrany a hrana $g_{z-1,z}$ nepatrí do L', buď prvky ciest C_a', C_0'' tvoria α-cestu vzhľadom na L', ktorá spojuje uzol v s uzlom u_1', alebo prvky ciest C_b', C_0'' tvoria α-cestu vzhľadom na L', ktorá spojuje uzol v s uzlom u_{2n}'. To je však spor, lebo sme predpokladali, že platí súčasne $v\Lambda u_1' = u_1$; $v\Lambda u_{2n}' = u_2$. Preto nemôže existovať α-cesta vzhľadom na L', ktorá by spojovala uzol $u_x' \in C'$ s uzlom v a je teda $v\Lambda u_x'$ pre všetky $x \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, čo bolo treba dokázať.

III. Z tvrdení I a II ako aj zo skutočnosti, že hrana jadra je hranou aspoň jednej α-kružnice vzhľadom na pevne zvolený lineárny faktor, vyplýva ihneď toto: nech $h \in \widehat{G}$ spojuje uzly u_1, u_2 a nech K je ľubovoľná α-kružnica vzhľadom na istý lineárny faktor L; ak o istom uzle $v \in G$ platí $v_1\Lambda v$; $u_2\Lambda v$, potom platí $u_x\Lambda v$ pre ľubovoľný uzol $u_x \in K$.

Dokončíme teraz dôkaz vety. Ak platí $U_i = \{u_1, u_2\}$, netreba už nič dokazovať. Predpokladajme, že u_x je ľubovoľný taký uzol, ktorý je rôzny od u_1 a rôzny od u_2 a patrí do U_i. Platí teda $u_1\Omega u_x$, t. j. existuje cesta $C^0 = w_1, h_{1,2}^0, w_2, h_{2,3}^0, \ldots, w_r$, ktorá spojuje uzol $w_1 = u_1$ s uzlom $w_r = u_x$ taká, že každá jej hrana je hranou aspoň jedného lineárneho faktora v G. Cesta C^0 nemôže obsahovať takú hranu, ktorá by bola hranou každého lineárneho faktora v G, lebo potom by dva uzly cesty incidentné s touto hranou tvorili triedu $U_j \in \overline{U}_G^\Omega$ a to je spor s predpokladom, že všetky uzly z C^0 patria do triedy U_i, ktorá má viac než dva uzly. Preto všetky hrany z C^0 patria do jadra $\widehat{G}$ a pretože sú hranami jednej a tej istej cesty, patria všetky do tej istej komponenty jadra $\widehat{G}$.

Nech L je ľubovoľný lineárny faktor v G, ktorý obsahuje hranu h spojujúcu uzly u_1, u_2. Označme znakom K_1 ľubovoľnú α-kružnicu vzhľadom na L, ktorá obsahuje hranu $h_{1,2}^0$. Kružnica K_1 obsahuje nutne hranu h, lebo K_1 obsahuje uzol $u_1 = w_1$ a ľubovoľný uzol α-kružnice je incidentný práve s jednou hranou z kružnice, ktorá patrí do L (touto hranou v našom prípade je zrejme hrana $h \in L$). Podľa vyššie uvedeného všetky uzly z K_1 sú v relácii Λ s uzlom v. Nech w_{y_1} je ten uzol z C^0, ktorý patrí do K_1 a o ktorom platí: buď je $y_1 = r$, alebo pre všetky $y > y_1$ uzol $w_y \in C^0$ nepatrí do K_1. Pretože je $h_{1,2}^0 \in K_1$, teda w_2 patrí do K_1, je nutne $y_1 \geq 2$. Ak by bolo $y_1 = r$, sme s dôkazom hotoví. Predpokladajme, že je $y_1 < r$. Hrana $h_{y_1,y_1+1}^0 \in C^0$ nepatrí do L, lebo hrana z L incidentná s uzlom w_{y_1} patrí do K_1 a hrana h_{y_1,y_1+1}^0 nepatrí do K_1. Pretože hrana h_{y_1,y_1+1}^0 je hranou jadra $\widehat{G}$, existuje kružnica K_2, ktorá obsahuje hranu h_{y_1,y_1+1}^0 a ktorá je α-kružnicou vzhľadom na L. Kružnica K_2 má s kružnicou K_1 spoločnú tú hranu z L (označme ju $g_{1,2}$), ktorá je incidentná s uzlom w_{y_1}. Oba uzly, s ktorými je incidentná hrana $g_{1,2}$, sú podľa predošlého — pretože patria do K_1 — v relácii Λ s uzlom v. Potom však aj všetky uzly z K_2 sú

v relácii Λ s uzlom v. Označme znakom w_{y_2} ten uzol z K_2 patriaci do C^0, o ktorom platí: buď je $y_2 = r$, alebo všetky $w_y \in C^0$, kde $y > y_2$, sú mimo kružnice K_2. Je zrejme $y_2 \geq y_1 + 1$. Ak je $y_2 = r$, sme s dôkazom hotoví; v opačnom prípade existuje kružnica K_3 obsahujúca hranu h_{y_2,y_2+1}^0 (ktorá nepatrí do L), ktorá je α-kružnicou vzhľadom na L a má s kružnicou K_2 spoločnú hranu $g_{2,3} \in L$. Z toho vyplýva, že všetky uzly z K_3 sú v relácii Λ s uzlom v. Po konečnom počte takýchto krokov nájdeme kružnicu K_q takú, ktorá je α-kružnicou vzhľadom na L, obsahuje uzol $w_{y_q} = w_r = u_x$ a všetky jej uzly sú v relácii Λ s uzlom v. Teda uzol u_x je v relácii Λ s uzlom v. Pretože u_x bol ľubovoľný uzol z U_i, je nutne $u_x\Lambda v$ pre všetky uzly $u_x \in U_i$, čo bolo treba dokázať. Dôkaz vety je tým vykonaný.

Veta 11. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor L a nech $\overline{U}_G^\Omega$ je rozklad množiny U_G uzlov grafu G na triedy uzlov, ktoré sú v relácii Ω. Platí v ľubovoľnej triede $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$ je relácia Λ reláciou ekvivalencie.*

Dôkaz. Z definície relácie Λ priamo vyplýva, že relácia Λ je reflexívna a symetrická. V množine $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$, ktorá obsahuje práve dva uzly, je preto relácia Λ zrejme reláciou ekvivalencie. Treba dokázať, že relácia Λ je tranzitívna v takej triede $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$, ktorá obsahuje viac než dva uzly. Nech u, v, w sú také tri rôzne uzly z $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$, o ktorých platí $u\Lambda v$, $v\Lambda w$. Predpokladajme proti tvrdeniu vety, že uzly u, w nie sú v relácii Λ, t. j., že existuje cesta $C = u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, h_{2n-1,2n}, u_{2n}$ spojujúca uzol $u_1 = u$ s uzlom $u_{2n} = w$, ktorá je α-cestou vzhľadom na L. Potom hrany a len hrany $h_{2x-1,2x} \in C$ (kde $x = 1, 2, \ldots, n$) patria do L. Podľa tvrdenia I a II z dôkazu predošlej vety platí $v \neq u_y$, $v\Lambda u_y$, pre všetky $y = 1, 2, \ldots, 2n$. Pretože hrana $h_{1,2}$ patrí do L a hrana $h_{1,2}$ nemôže byť hranou každého lineárneho faktora v G, je nutne $u_1\Omega u_2$ a hrana $h_{1,2}$ je hranou jadra $\widehat{G}$. Potom však podľa vety 10 platí $v\Lambda u_x$ pre všetky uzly $u_x \in U_i$, za predpokladu, že je $u_1, u_2 \in U_i$ ($U_i \in \overline{U}_G^\Omega$) a že uzly u_1, u_2 sú spojené hranou z $\widehat{G}$; čo v našom prípade je splnené. Čiže uzol v je relácii Λ so všetkými ostatnými uzlami z U_i. Nech h_0 je tá hrana z L, ktorá je incidentná s uzlom v a nech $t \neq v$ je druhý uzol, s ktorým je incidentná hrana h_0. Je nutne $v\Omega t$, čiže t patrí do U_i a podľa predošlého je $v\Lambda t$. To je spor, pretože cesta pozostávajúca z uzla v, hrany $h_0 \in L$ a uzla t je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol v s uzlom t a je teda v non Λt. Predpoklad, že neplatí $u\Lambda w$ viedol ku sporu. Je preto $u\Lambda w$ a relácia Λ je tranzitívna v ľubovoľnej množine $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$. Relácia Λ je reláciou ekvivalencie v ľubovoľnej množine $U_i \in \overline{U}_G^\Omega$. Dôkaz je vykonaný.

Pretože relácia Λ je reláciou ekvivalencie v ľubovoľnej triede U_i rozkladu $\overline{U}_G^\Omega$, možno každú z tried z $\overline{U}_G^\Omega$ rozložiť jednoznačne ešte na triedy (podtriedy) uzlov, ktoré sú aj v relácii Ω aj v relácii Λ. Rozklad množiny U uzlov grafu G na triedy uzlov, ktoré sú aj v relácii Ω aj v relácii Λ, budeme označovať znakom $\overline{U}_G^*$. Je zrejmé, že rozklad $\overline{U}_G^*$ je zjemnením rozkladu $\overline{U}_G^\Omega$. Každá trieda z $\overline{U}^{\Omega}_{G}$ obsahuje uzly najmenej z dvoch tried rozkladu $\overline{U}^{*}_{G}$, pretože ľubovoľná trieda z $\overline{U}^{\Omega}_{G}$ obsahuje najmenej dva uzly (pozri vetu 9) a ľubovoľný uzol nie je v relácii Λ aspoň s jedným uzlom tej istej triedy rozkladu $\overline{U}^{\Omega}_{G}$.

Veta 12. *Nech G je ľubovoľný graf, v ktorom existuje lineárny faktor a v ktorom rozklad $\overline{U}^{\Omega}_{G}$ obsahuje aspoň dve triedy uzlov. Nech u_1, v_1 sú ľubovoľné dva uzly patriace do rôznych tried z $\overline{U}^{\Omega}_{G}$; $u_1 \in U_i$; $v_1 \in U_j$; U_i, $U_j \in \overline{U}^{\Omega}_{G}$. Nech L je ľubovoľný lineárny faktor grafu G. Označme znakom u_2 (resp. v_2) ten uzol z G, ktorý je spojený s uzlom u_1 (resp. v_1) hranou z L. Ak existujú cesty C_1, C_2, ktoré sú α-cestami vzhľadom na L a cesta C_1 spojuje uzly u_1, v_1 a cesta C_2 spojuje uzly u_2, u_2, potom existuje α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u_1, v_2 a existuje tiež α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u_2, v_1.*

D ô k a z. Nech C_1 (resp. C_2) je α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u_1, v_1 (resp. uzly u_2, v_2). Hrana z L spojujúca uzly u_1, u_2 (označme ju g_0) a tiež hrana z L spojujúca uzly v_1, v_2 (označme ju h_0) patrí zrejme aj do cesty C_1 aj do cesty C_2. Cesty C_1, C_2 musia mať okrem hrán g_0, h_0 a uzlov u_1, u_2, v_1, v_2 ešte ďalšie spoločné prvky, lebo v opačnom prípade by hrany a uzly oboch týchto ciest tvorili α-kružnicu vzhľadom na L a to je spor s predpokladom, že uzly u_1, v_1 patria do rôznych tried z $\overline{U}^{\Omega}_{G}$.

Ďalej: keby cesty C_1, C_2 mali okrem uvedených prvkov spoločné už len isté uzly, potom každý takýto uzol bol by incidentný s jednou hranou z C_1 patriacou do L a s jednou hranou z C_2 patriacou do L, a to nie je možné, lebo L je lineárny faktor. Teda cesty C_1, C_2 majú okrem hrán g_0, h_0 spoločnú aspoň ešte jednu hranu.

Označme znakom G_0 podgraf grafu G, ktorý pozostáva z prvkov a len z prvkov ciest C_1, C_2. Graf F_0 je zrejme súvislý, neobsahuje žiadny uzol prvého stupňa a neobsahuje žiadny uzol vyššieho stupňa než tretieho. Keby totiž niektorý z uzlov bol vyššieho stupňa než tretieho, znamenalo by to, že dve a dve hrany s ním incidentné by patrili do C_1, resp. do C_2 a takýto uzol by bol incidentný s dvoma hranami z L, pretože C_1, C_2 sú podľa predpokladu α-cestami vzhľadom na L. To však je spor, lebo L je linerárny faktor. Graf G_0 obsahuje uzly najviac tretieho stupňa.

Označme znakom H^1_0 (resp. H^2_0, resp. H^3_0) množinu tých hrán grafu G_0, ktoré patria len do cesty C_1 (resp. len do cesty C_2, resp. do oboch ciest). Nech w je ľubovoľný uzol grafu G_0 nepatriaci do $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Platí toto: ak w je uzlom druhého stupňa v grafe G_0, potom obe hrany z G_0 s ním incidentné patria do tej istej množiny z množín H^1_0, H^2_0, H^3_0; ak uzol w je tretieho stupňa v G_0, potom každá z hrán s ním incidentných patrí do inej z množín H^1_0, H^2_0, H^3_0, pretože práve jedna z týchto troch hrán patrí aj do C_1 aj do C_2, práve jedna patrí len do C_1 a práve jedna len do C_2. Označme znakmi $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$ uzly cesty C_1 v poradí, v akom cez ne prechádzame vychádzajúc z uzla $x_0 = u_1$ a končiac v uzle $x_{2n+1} = v_1$ (platí potom $x_1 = u_2$; $x_{2n} = v_2$) a označme znakmi $y_0, y_1, \ldots, y_{2m+1}$ uzly cesty C_2 v poradí, v akom cez ne prechádzame vychádzajúc z uzla $y_0 = u_2$ a končiac v uzle $y_{2m+1} = v_2$ (platí zrejme $y_1 = u_1$; $y_{2m} = v_1$). Nech x_p (presp. x_q) je ten uzol cesty C_1, ktorý je spoločný obom cestám a má z takýchto uzlov $x_i \in C_1$ najmenšie (resp. najväčšie) poradové číslo a nech y_r (resp. y_s) je ten uzol cesty C_2, ktorý je spoločný obom cestám a má z takýchto uzlov $y_i \in C_2$ najmenšie (resp. najväčšie) poradové číslo.

I. Tvrdím: ak je $x_p = y_r$, alebo ak je $x_q = y_s$, potom v grafe G existuje α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u_1, v_2 a tiež α-cesta vzhľadom na L spojujúca uzly u_2, v_1. Dokážme to. Nech je $x_p = y_r$. V uzle $x_p = y_r$ možno cestu C_1 rozdeliť na dve čiastočné cesty $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, pričom cesta $C_{1,1}$ spojuje uzol $x_0 = u_1$ s uzlom x_p, cesta $C_{1,2}$ spojuje uzol x_p s uzlom x_1. Podobne v uzle $x_p = y_r$ možno rozdeliť cestu C_2 na dve čiastočné cesty $C_{2,1}$, $C_{2,2}$ (z uzla u_2 do uzla y_r a z uzla y_r do uzla v_2). Platí: ani hrana z $C_{1,1}$, ani hrana z $C_{2,1}$, s ktorou je uzol $x_p = y_r$ incidentný, nepatrí do L; do L patrí tá hrana incidentná s uzlom $x_p = y_r$, ktorá je spoločná cestám C_1, C_2. Teda cesta $C_{1,2}$ (resp. cesta $C_{2,2}$) je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol $x_p = y_r$ s uzlom v_1 (resp. s uzlom v_2). Potom však prvky ciest $C_{1,1}$, $C_{2,2}$ (resp. prvky ciest $C_{2,1}$, $C_{1,2}$) tvoria nutne α-cestu vzhľadom na L, ktorá spojuje uzol u_1 s uzlom v_2 (resp. uzol u_2 s uzlom v_1); cesty s požadovanými vlastnosťami existujú, ak je $x_p = y_r$. Podobne sa dokáže, že takéto cesty existujú, ak je $x_q = y_s$.

Ak by platila aspoň jedna z rovníc $x_p = y_r$; $x_q = y_s$, sme s dôkazom vety hotoví. Predpokladajme, že platí súčasne $x_p \neq y_r$; $x_q \neq y_s$. Nech $\overline{U}$ je množina tých uzlov grafu G_0, ktoré sú v G_0 uzlami tretieho stupňa. Skonštruujme graf $\overline{G}$ takto: uzlami grafu $\overline{G}$ sú uzly množiny $\in\overline{U}$, dva uzly z $\overline{U}$ sú spojené hranou v grafe $\overline{G}$ práve vtedy, keď v grafe G_0 existuje taká cesta spojujúca tieto dva uzly, ktorej všetky hrany patria do tej istej množiny H^i_0 ($i \in \{1, 2, 3\}$) a okrem toho nech existujú už len tieto dve hrany: hrana spojujúca uzol x_p s uzlom y_r a hrana spojujúca uzol x_q s uzlom y_s (je zrejmé, že uzly x_p, x_q, y_r, y_s patria do množiny $\overline{U}$). Teda existuje prosté zobrazenie $\overline{\varphi}$ množiny takých ciest v grafe G_0, ktoré spojujú dva uzly tretieho stupňa z G_0 a ktorých vnútorný uzol nepatrí do $\overline{U}$, na množinu hrán grafu $\overline{G}$; ináč povedané: graf $\overline{G}$ je pravidelný graf tretieho stupňa, ktorý je homeomorfný s grafom G_0.

II. Tvrdím: vzorom ľubovoľnej hrany z G v zobrazení $\overline{\varphi}$ je cesta grafu G_0, ktorá obsahuje nepárny počet hrán. Obrazy ciest v G_0 spojujúcich dva uzly z $\overline{U}$, ktorých všetky hrany patria do H^3_0, tvoria množinu hrán istého lineárneho faktora $\overline{L}$ grafu $\overline{G}$. Dokážme platnosť uvedených tvrdení. Nech $\overline{h}$ je ľubovoľná hrana z $\overline{G}$, ktorá je obrazom cesty C_0 z grafu G_0 obsahujúcej hrany z H^3_0. Hrana $\overline{h}$ (resp. cesta C_0) nech spojuje uzly $\overline{u}$, $\overline{v} \in \overline{U}$. Tá hrana z C_0, ktorá je incidentná s koncovým uzlom, patrí nutne do L. Keby totiž niektorá z hrán cesty C_0 incidentných s uzlom $\overline{u}$, $\overline{v}$ nepatrila do L, potom by patrili do L aj hrana z C_1 nepatriaca do C_2, aj hrana z C_2 nepatriaca do C_1, ktorá je incidentná s uzlom $\overline{u}$, resp. s uzlom $\overline{v}$, čo nie je možné. To však znamená, pretože hrany patriace do L a nepatriace do L sa v ceste C_0 striedajú, že cesta C_0, ktorá je vzorom hrany $\overline{h}$ v zobrazení $\overline{\varphi}$, obsahuje nepárny počet hrán. Ľubovoľná cesta z G_0 spojujúca dva uzly z $\overline{U}$ obsahujúca len hrany množiny H_0^3 obsahuje nepárny počet hrán. Podobne je to s cestami grafu G_0, ktoré spojujú dva uzly z $\overline{U}$ a obsahujú len hrany z H_0^1 (resp. len hrany z H_0^2). Takéto cesty začínajú a končia hranou nepatriacou do L, lebo hrana z G_0 patriaca do L a incidentná s uzlom množiny U patrí podľa predošlého do množiny H_0^3 a pretože sa v nich taktiež hrany nepatriace a patriace do L striedajú. Teda všetky vzory hrán grafu $\overline{G}$ v zobrazení $\overline{\varphi}$ sú cestami grafu G_0 s nepárnym počtom hrán. Pretože každý uzol z $\overline{U}$ je incidentný v G_0 práve s jednou hranou z H_0^3 — teda je koncovým uzlom práve jednej takej cesty spojujúcej dva uzly množiny $\overline{U}$, ktorej všetky hrany patia do H_0^3 — každý uzol z U je v grafe G incidentný práve s jednou takou hranou, ktorá je obrazom cesty z G_0 obsahujúcej len hrany množiny H_0^3. Množiny všetkých takýchto hrán v grafe $\overline{G}$ je množinou hrán istého lineárneho faktora $\overline{L}$ grafu $\overline{G}$. Teda graf $\overline{G}$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, v ktorom existuje lineárny faktor $\overline{L}$.

III. Tvrdím: graf $\overline{G}$ obsahuje aspoň jeden most h^* a most h^* je hranou každého lineárneho faktora grafu $\overline{G}$. Dôkaz tvrdenia: ľubovoľný most ľubovoľného grafu obsahujúceho lineárny faktor je buď hranou každého lineárneho faktora grafu, alebo nie je hranou žiadneho lineárneho faktora tohoto grafu (v opačnom prípade by bol most hranou jadra, čo podľa definície jadra nie je možné). Dokážme najprv toto: ak graf $\overline{G}$ obsahuje most h^*, potom h^* je hranou každého lineárneho faktora grafu $\overline{G}$. Nech h^* spojuje uzly $\overline{u}, \overline{v}$ a nech cesta C_0 je vzorom hrany h^* v zobrazení $\overline{\varphi}$. Uzly $\overline{u}, \overline{v}$ sú uzlami aj cesty C_1 aj cesty C_2. Cesta C_0 je jedinou cestou grafu G_0 spojujúcou uzly $\overline{u}, \overline{v}$. Cesta C_0 je preto čiastočnou cestou aj cesty C_1 aj cesty C_2, čiže: všetky hrany z C_0 patria do H_0^3. To však znamená podľa II., že h^* patrí do $\overline{L}$ a patrí tiež do každého lineárneho faktora grafu $\overline{G}$. Ak preto existuje v grafe $\overline{G}$ most, patrí tento most do každého lineárneho faktora grafu $\overline{G}$. Dokážeme napokon, že v grafe $\overline{G}$ existuje most.

Je známa táto veta: nech G je ľubovoľný konečný súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, ktorý neobsahuje most, potom v grafe G existuje lineárny faktor L a ľubovoľná hrana z G je hranou aspoň jednej α-kružnice vzhľadom na L (pozri [8]). Ak by teda graf $\overline{G}$ neobsahoval most, potom podľa uvedenej vety každá hrana z $\overline{G}$ by bola hranou jadra $\widehat{\overline{G}}$. Pretože graf $\overline{G}$ je homeomorfný s grafom G_0 a vzorom každej hrany z $\overline{G}$ je cesta v G_0, ktorá obsahuje nepárny počet hrán, odpovedá α-kružnici z grafu $\overline{G}$ kružnica, ktorá je α-kružnicou v grafe G_0. To vyplýva z tejto úvahy: cesty grafu G_0, ktoré sú v zobrazení $\overline{\varphi}$ vzorom hrán z $\overline{L}$, začínajú a končia hranou z L, ostatné cesty grafu G_0, ktoré sú vzorom hrán grafu $\overline{G}$ v zobrazení $\overline{\varphi}$, začínajú a končia hranou nepatriacou do L. Množine hrán ľubovoľnej α-kružnice vzhľadom na $\overline{L}$ z grafu $\overline{G}$ odpovedá preto množina ciest grafu G_0 na seba nadväzujúcich, ktoré nemajú spoločné hrany, tvoria spolu kružnicu v G_0 a vzhľadom na to, že sa hrany patriace do L

a nepatriace do L v takejto kružnici striedajú, je takáto kružnica α-kružnicou vzhľadom na L grafu G_0. Je teda $G_0 = \widehat{G}_0$. Graf G_0 je súvislý a z predošlého vyplýva, že v grafe G platí $u_1 \Omega v_1$ — spor s predpokladom, že uzly u_1, v_1 patria do rôznych tried rozkladu U_G^Ω. Teda v grafe $\overline{G}$ existuje najmenej jeden most a vzorom tohto mosta v zobrazení $\overline{\varphi}$ je cesta C_0 v grafe G_0 obsahujúca len hrany z množiny H_0^3. Všetky hrany cesty C_0 sú zrejme mostami v grafe G_0.

IV. Teraz už môžeme dokončiť dôkaz vety. Nech h^* je ľubovoľný most grafu $\overline{G}$, vzorom hrany h^* nech je cesta C_0. Pretože uzly u_1, u_2 (resp. uzly v_1, v_2) sú spojené v grafe G hranou g_0 (resp. hranou h_0) a cesta v G_0 odpovedajúca hrane z $\overline{G}$, ktorá spojuje uzly x_p, y_r (resp. uzly x_q, y_s), nepatrí do L, patria nutne uzly x_p, y_r k jednému a uzlu x_q, y_s k druhému brehu mosta h^* grafu $\overline{G}$. Hrany cesty C_0 patria do H_0^3, preto hrana z C_0 incidentná s koncovým uzlom tejto cesty patrí do L. Označme znakom $\overline{u}$ (resp. $\overline{v}$) ten uzol incidentný s hranou h^* (resp. ten koncový uzol cesty C_0), ktorý leží v tom istom brehu mosta h^* ako uzly x_p, y_r (resp. ako uzly x_p, y_s). Označme znakom $C_{1,u}$, resp. $C_{1,v}$ tú časť cesty C_1, ktorá spojuje uzol u_1 s uzlom $\overline{u}$, resp. uzol $\overline{u}$ s uzlom v_1 a znakom $C_{2,u}$, resp. $C_{2,v}$ tú časť cesty C_2, ktorá spojuje uzol u_2 s uzlom $\overline{u}$, resp. uzol $\overline{u}$ s uzlom v_2. Je zrejmé, že cesty $C_{1,v}$, $C_{2,v}$ sú α-cestami vzhľadom na L. V cestách $C_{1,u}$, $C_{2,u}$ sa síce striedajú hrany patriace a nepatriace do L, avšak uzol $\overline{u}$ a len tento uzol nie je v týchto cestách incidentný s hranou z L. Cesty $C_{1,u}$, $C_{2,v}$ (resp. cesty $C_{2,u}$, $C_{1,v}$) nemajú okrem uzla $\overline{u}$ žiadny prvok spoločný, preto cesta v G_0 pozostávajúca z prvkov oboch týchto ciest je α-cestou vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u_1, v_2 (resp. uzly u_2, v_1). Tým je dôkaz vety vykonaný.

Veta 13. *Nech v grafe G, ktorý obsahuje viac ako dva uzly, existuje lineárny faktor L a nech v množine U_G všetkých uzlov grafu G je relácia Λ tranzitívna, potom (1) rozklad U_G^Ω obsahuje práve jednu triedu uzlov $U_G^\Omega = \{U_G\}$; (2) jadro $\widehat{G}$ obsahuje všetky uzly grafu G; (3) jadro $\widehat{G}$ aj graf G sú súvislé grafy.*

Dôkaz. Predovšetkým: ak Λ je relácia tranzitívna v grafe G, potom G je súvislý graf. Ak by totiž graf G nebol súvislý a U_a, U_b by boli množiny uzlov dvoch jeho komponent, platilo by $U_a \Lambda U_b$ (lebo nemôže existovať cesta a teda ani α-cesta, ktorá spojuje uzly z rôznych komponent grafu). Pretože v množine U_a existuje aspoň jedna dvojica uzlov u, v, ktoré sú spojené hranou lineárneho faktora L, nemôžu byť ľubovoľné dva uzly z U_a v relácii Λ (napr. uzly u, v nie sú v relácii Λ). To je spor s predpokladom, že Λ je relácia tranzitívna. Preto G je súvislý graf.

Predpokladajme oproti tvrdeniu vety, že rozklad U_G^Ω obsahuje aspoň dve triedy uzlov. Pretože G je súvislý graf, vyplýva z toho, že v G existuje hrana h spojujúca isté uzly u_1, u_2 patriace do rôznych tried z U_G^Ω. Hrana h nemôže patriť do žiadneho lineárneho faktora v G, preto h nepatrí do L. Označme znakom v_1 (resp. v_2) uzol, ktorý je spojený hranou lineárneho faktora L s uzlom u_1 (resp. u_2). Je $u_1 \Lambda u_2$ a uzly u_1, v_1 (resp. u_2, v_2) nie sú v relácii Λ. Pretože podľa predpokladu relácia Λ je tranzitívna, nemôžu byť ani uzly v_1, u_2, ani uzly u_1, v_2 v relácii Λ. Existuje preto v G taká α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u_1, v_2 a tiež taká, ktorá spojuje uzly u_2, v_1, z čoho podľa vety 12 vyplýva, že existuje v grafe G α-cesta vzhľadom na L, ktorá spojuje uzly u_1, u_2, resp. uzly v_1, v_2. To je spor, lebo podľa predošlého je $u_1 \Lambda u_2$. Preto rozklad $\overline{U}_G^\Omega$ nemôže obsahovať viac ako jednu triedu uzlov a je $\overline{U}_G^\Omega = \{U_G\}$.

Dokážme teraz platnosť ďalších tvrdení vety. Pretože graf G obsahuje viac ako dva uzly a platí podľa predošlého $u\Omega v$ pre ľubovoľné dva uzly u, v grafu G, nemôže graf G obsahovať takú hranu, ktorá by bola hranou každého lineárneho faktora grafu. Ľubovoľná hrana z L patrí preto do jadra $\widehat{G}$ a pretože ľubovoľný uzol z G je incidentný s hranou z L, patrí každý uzol z G do jadra $\widehat{G}$. Pretože pre ľubovoľné dva uzly $u \neq v$ z G platí $u\Omega v$, existuje v G taká cesta C spojujúca tieto dva uzly, ktorá obsahuje len hrany vyskytujúce sa aspoň v jednom lineárnom faktore grafu G. Pretože v G neexistuje hrana, ktorá by bola hranou každého lineárneho faktora, cesta C je cestou tiež v grafe $\widehat{G}$ a jadro $\widehat{G}$ je súvislý graf. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Vety 11 a 13 poukazujú na zaujímavú vlastnosť relácie Λ v množine U_G uzlov grafu G obsahujúceho lineárny faktor: v ľubovoľnej triede rozkladu $\overline{U}_G^\Omega$ je relácia Λ reláciou ekvivalencie a ak Λ je v množine U_G (s viac než dvoma uzlami) reláciou ekvivalencie, potom rozklad $\overline{U}_G^\Omega$ obsahuje jedinú triedu; $\overline{U}_G^\Omega = \{U_G\}$.

LITERATÚRA

[1] Petersen J., Die Theorie der regulären Graphen, Acta Math. (1891), 193—220.
[2] Kotzig A., Poznámky k Listingovej vete o rozkladoch grafu na ťahy, Časopis pro pěst. mat. 81 (1956), 396—404.
[3] Kotzig A., O rozklade pravidelného grafu nepárneho stupňa na dva faktory, Časopis pro pěst. mat. 83 (1958), 27—32.
[4] König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.
[5] Kotzig A., Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava 1956.
[6] Kotzig A., Z teorie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa, Časopis pro pěst. mat. 82 (1957), 76—92.
[7] Kaluza B., Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen, Math. Ann. (1953), 464—465.
[8] Frink O., A proof of Petersen's theorem, Annals of Mat. (1926), 491—492.
[9] Schönberger T., Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes, Acta Litt. ac Sc. (Sectio Sc. Math.), Szeged 1934, 51—57.

Došlo 14. 9. 1958.

Katedra matematiky Vysokej školy ekonomickej v Bratislave

К ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ С ЛИНЕЙНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ I

АНТОН КОЦИГ

Выводы

В статье изучаются новым методом основные свойства конечных графов содержащих по крайней мере один линейный множитель. Пусть G — такой конечный граф, в котором существует по крайней мере один линейный множитель L. Окружность (путь) графа G называется α-окружностью (α-путем) относительно L, если любая вершина окружности (пути) инцидента ребру окружности (пути), принадлежащей L. Доказывается, что любая окружность K графа G, являющаяся композицией двух различных линейных множителей L_1, L_2 графа G, есть α-окружность относительно L_1 и также α-окружность относительно L_2. Доказывается далее что в том случае, когда K — произвольная α-окружность относительно L, то композиция окружности K и линейного множителя L является линейным множителем графа G. Пусть L_a и L_b — два любые линейные множители графа G и пусть $\widehat{H}_a$ и $\widehat{H}_b$ — множества ребер графа G, принадлежащих по крайней мере одной α-окружности относительно L_a и соответственно α-окружности относительно L_b; тогда имеет место равенство $\widehat{H}_a = \widehat{H}_b$ т. е. множество $\widehat{H}$ ребер графа G, являющихся ребрами по крайней мере одной α-окружности относительно определенно выбранного линейного множителя графа G, не зависит от выбора этого линейного множителя. Это позволяет ввести понятие ядра графа: подграф графа G, содержащий все ребра $\in \widehat{H}$ и кроме того только вершины, инцидентные этим ребрам, называется ядром графа G и обозначается символом $\widehat{G}$. Доказывается, что $\overline{G}$ может быть и нулевым графом.

Доказываются следующие предложения: если $\widehat{G}$ — ненулевой граф, то в $\widehat{G}$ всегда существует линейный множитель. Ядром ненулевого графа $\widehat{G}$ служит сам граф $\widehat{G}$. Любое ребро $\in G$ служит ребром ядра $\widehat{G}$, или принадлежит каждому линейному множителю графа G, или не принадлежит никакому линейному множителю графа G. Если ребро h принадлежит $\widehat{G}$ то в G существует линейный множитель, содержащий ребро h и существует также линейный множитель не содержащий ребра h.

Доказываются следующие свойства α-пути в графе G: пусть L_1, L_2 два произвольные линейные множители графа G; u, v — две произвольные вершины $\in G$. Тогда в графе G существует такой α-путь относительно L_2, который соединяет вершины u, v тогда и только тогда, когда существует в G α-путь относительно L_1, который соединяет вершины u, v.

Предметом дальнейшего исследования служат соотношения Ω, Λ на множестве всех вершин графа G, определяемые следующим образом: вершина u находится в графе G с вершиной v в соотношении Ω тогда и только тогда, когда $u = v$, или когда в G существует путь, соединяющий вершины u, v, каждое ребро которого служит ребром по крайней мере одного линейного множителя графа G; вершина u находится в графе G с вершиной v в соотношении Λ тогда и только тогда, когда $u = v$, или когда в G не существует α-путь относительно L (где L — произвольный линейный множитель графа G), который бы соединял вершины u, v.

Доказывается, что соотношение Ω есть соотношение эквивалентности и поэтому множество U_G всех вершин графа G можно единственным способом разложить на классы вершин $U_1, U_2, \ldots, U_n$ так, чтобы две вершины u, v принадлежали одному

и тому же классу тогда и только тогда, когда они находятся в соотношении Ω. Такое разложение множества обозначено символом $\overline{U}_G^{\Omega}$.

Доказывается слующее свойство соотношения Λ: в любом классе $U_i \in \overline{U}_G^{\Omega}$ соотношение Λ есть соотношение эквивалентности. Отсюда следеут: существует одно и только одно разложение $\overline{U}_G^*$ множества U_G на классы вершин, для которого справедливо предложение: две любые вершины u, v принадлежат одному и тому же классу разложения $\overline{U}_G^*$ тогда и только тогда, когда они находятся одновременно в соотношении Ω и в соотношении Λ. Если соотношение Λ транзитивно в целом множестве U_G и если U_G содержит больше чем две вершины, то: (1) имеет место равенство $\overline{U}_G^{\Omega} = \{U_G\}$; (2) ядро $\widehat{G}$ содержит все вершины $\in U_G$; (3) $\widehat{G}$ есть связный граф и поэтому и G есть граф связный.

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DER ENDLICHEN GRAPHEN MIT LINEAREN FAKTOREN I

ANTON KOTZIG

Zusammenfassung

In der Arbeit werden mittels einer neuen Methode die Grundeigenschaften endlicher Graphen, die mindestens einen linearen Faktor enthalten, behandelt. Es sei G ein solcher endlicher Graph, in welchen wenigstens ein linearer Faktor L existiert. Ein Kreis (resp. Weg) des Graphen G heißt α-Kreis (resp. α-Weg) bezüglich L, wenn folgendes gilt: Ein beliebiger Knotenpunkt des Kreises (resp. des Weges) ist inzident mit der Kante des Kreises (resp. des Weges), die zu L gehört. Folgendes wird bewiesen: Ein beliebiger Kreis K des Graphen, der eine Komposition zweier verschiedener lienearer Faktoren L_1 L_2 ist, ist α-Kreis bezüglich L_1 und ist auch α-Kreis bezüglich L_2 und weiter: Wenn K ein beliebiger α-Kreis bezüglich L ist, dann ist die Komposition des Kreises K und des linearen Faktor L auch ein linearer Faktor des Graphen G. Es seien L_a, L_b zwei beliebige lineare Faktoren des Graphen G und es sei $\widehat{H}_a$, resp. $\widehat{H}_b$ die Menge jener Kanten des Graphen G, die mindestens zu einem α-Kreis bezüglich L_a, resp. bezüglich L_b gehört. Es gilt dann: $\widehat{H}_a = \widehat{H}_b$, oder: die Menge $\widehat{H}$ jener Kanten des Graphen G, des Graphen G, die Kanten wenigstens eines α-Kreises bezüglich eines fest gewählten linearen Faktors des Graphen G sind, ist unabhängig von der Wahl des linearen Faktors. Diese Tatsache ermöglicht es den Begriff des Kernes eines Graphen einzuführen. Ein Untergraph des Graphen G, der sämtliche Kanten von H enthält und außerdem nur noch Knotenpunkte, die dieser Kanten inzident sind, heißt Kern des Graphen G und wird in weiterem mit $\widehat{G}$ bezeichnet.

Es zeigt sich, daß $\widehat{G}$ auch ein Nullgraph sein kann. Folgendes wird bewiesen: Wenn $\widehat{G}$ kein Nullgraph ist, dann existiert in $\widehat{G}$ immer mindestens ein linearer Faktor; jedem linearen Faktor des Graphen G entspricht gerade ein linearer Faktor des Graphen $\widehat{G}$ und umgekehrt. Der Kern des Nichtnull-Kernes $\widehat{G}$ ist selbst der Graph $\widehat{G}$.

Es sei $\mathring{G}$ ein Graph, der aus dem Graphen G (der mindestens einem linearen Faktor enthält) entsteht, wenn alle diejenigen Kanten aus G, die zu keinem linearen Faktor des Graphen G gehören, entfernt werden.

Es wird folgendes bewiesen: eine Kante und nur solche Kante aus $\mathring{G}$ gehört zu jedem linearen Faktor des Graphen G, wenn sie eine einzige Kante einer Komponente des Graphen $\mathring{G}$ ist. Die Komponente des Graphen $\mathring{G}$, die mehr als eine Kante enthält und nur solche Komponente, ist auch Komponente des Graphen $\widehat{G}$. Ein beliebiger linearer Faktor des Graphen G ist auch linearer Faktor des Graphen $\mathring{G}$ und umgekehrt.

Vom α-Wege im Graphen G sind folgende Tatsache bewiesen: Es seien L_1, L_2 zwei beliebige Faktoren des Graphen G; u, v zwei Knotenpunkte im G, dann gilt: Im Graphen G existiert ein solcher α-Weg bezüglich L_2, der die Knotenpunkte u, v verbindet, gerade dann, wenn im Graphen G ein solcher α-Weg bezüglich L_1 existiert, der die Knotenpunkte u, v verbindet.

Gegenstand der weiteren Untersuchungen sind die Relationen Ω, Λ in der Menge aller Knotenpunkte des Graphen G, folgendermaßen definiert: Der Knotenpunkt u ist im Graphen G in der Relation Ω mit dem Knotenpunkte v genau dann, wenn entweder $u = v$, oder wenn im Graphen G ein Weg existiert, der die Knotenpunkte u, v verbindet, dessen jede Kante mindestens zu einem linearen Faktor des Graphen G gehört. Der Knotenpunkt u ist im Graphen G in der Relation Λ mit v genau dann, wenn entweder $u = v$, oder wenn im Graphen G kein α-Weg bezüglich L existiert (L ist ein beliebiger linearer Faktor), der die Knotenpunkte u, v verbindet. Es wird bewiesen, daß die Relation Ω eine Aequivalenzrelation ist und deshalb kann man die Menge U_G aller Knotenpunkte des Graphen G auf eine einzige Art in Knotenpunkteklassen $U_1, \ldots, U_n$ zerlegen, und zwar so, daß zwei Knotenpunkte u, v nur dann in dieselbe Klasse gehören, wenn sie in der Relation Ω sind. Eine solche Zerlegung der Menge U_G bezeichnen wir mit $\overline{U}_G^{\Omega}$. Von der Relation Λ sind folgende Tatsache bewiesen: In einer beliebigen Klasse $U_i \in \overline{U}_G^{\Omega}$ ist die Relation Λ Aequivalenzrelation. Folgendes geht daraus hervor: Es existiert genau eine Zerlegung $\overline{U}_G^*$ der Menge U_G in Knotenpunkteklassen, so daß folgendes gilt: Beliebige zwei Knotenpunkte u, v gehören in dieselbe Klasse aus $\overline{U}_G^*$ genau dann, wenn sie sowohl in Relation Ω, als auch in Relation Λ sind. Wenn die Relation Λ in der ganzen Menge U_G transitiv ist und die Menge U_G mehr als zwei Knotenpunkte enthält, gilt folgendes: (1) $U_G = \{U_G\}$; (2) der Kern $\widehat{G}$ enthält alle Knotenpunkte von U_G; (3) $\widehat{G}$ ist ein zusammenhängender Graph und daher ist auch G zusammenhängend.