MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK IX ČÍSLO 1

ABSOLÚTNE KONVERGENTNÉ RADY A DYADICKÉ ROZVOJE

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

V tejto práci nadviažeme bezprostredne na práce [1] a [3]. Pripomenieme označenie: Nech $\sum\limits_1^\infty a_i$ (1) je konvergentný rad s kladnými členmi, nech $a_k > R_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $R_k = \sum\limits_{i=1}^\infty a_{k+i}$. Označme znakom W množinu všetkých tých reálnych čísel x, ktoré možno vyjadriť v tvare: $x = \sum\limits_1^\infty \varepsilon_n a_n$ (2), kde $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. W je merateľná množina a nech $\mu(W) > 0$ (to možno dosiahnuť voľbou radu (1); pozri [1]). Jednoznačné vyjadrenie (2) (pozri [1]) čísla x nazývame znamienkovým rozvojom čísla x vzhľadom na rad (1). Označme ďalej znakom $f(n, x)$ počet čísel 1 v postupnosti (konečnej) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, znakom $g(n, x)$ počet čísel -1 v tej istej postupnosti. Položme:

$$\underline{D}^*(f, x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}, \qquad \overline{D}^*(f, x) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n},$$

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n}$$

(ak limita vpravo existuje).

Podobne definujeme čísla $\underline{D}^*(g, x)$, $\overline{D}^*(g, x)$, $D^*(g, x)$. Všetky tieto čísla sú zrejme z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

V tejto práci budeme študovať rozdelenie faktorov 1, -1 v znamienkových rozvojoch čísel $x \in W$ z hľadiska Lebesguovej miery.

V práci [1] sa dokazuje (veta 4), že pre skoro všetky $x \in W$ (v zmysle Lebesguovej miery) platí:

$$\underline{D}^*(f, x) \leq \frac{1}{2} \leq \overline{D}^*(f, x).$$

Akademikovi V. Jarníkovi vďačím za upozornenie, že výsledok tejto vety možno značne zlepšiť, ak si všimneme nasledujúce:

Z dôkazu vety 4 vyplýva, že pre mieru $\mu[W'(\tau, N)]$, $0 < \tau < \frac{1}{2}$ množiny

$W'(\tau, N)$ všetkých tých $x \in W$, pre ktoré platí: $\frac{f(N, x)}{N} \leq \tau$, dostávame: $\mu[W'(\tau, N)] = O(N^{3/2} e^{-N\delta_1})$, kde $\delta_1 > 0$, δ_1 nezávisí od N. Zvoľme teraz rastúcu postupnosť $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \tau_k < \frac{1}{2}$, $\tau_k \to \frac{1}{2}$ a označme znakom W'_1 množinu všetkých tých $x \in W$, pre ktoré $\underline{D}^*(f, x) < \frac{1}{2}$. Nech $x \in W'_1$. Potom existuje k také, že pre nekonečne mnoho n platí:

$$\frac{f(n, x)}{n} \leq \tau_k \Rightarrow x \in B_k = \limsup_{n\to\infty} W'(\tau_k, n).$$

Uvážme, že pre každé prirodzené N platí:

$$B_k \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} W'(\tau_k, n) \Rightarrow \mu(B_k) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu[W'(\tau_k, n)] = o(1),$$

keďže $\sum_1^{\infty} n^{3/2} e^{-n\delta_1} < +\infty$. Teda $\mu(B_k) = 0$. Ďalej z $W'_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ vyplýva: $\mu(W'_1) = 0$.

Symetricky sa dá ukázať, že je nulová aj množina W'_2 všetkých tých $x \in W$, pre ktoré platí: $\overline{D}^*(f, x) > \frac{1}{2}$.

Keď tieto výsledky spojíme a vezmeme do ohľadu výsledok vety 4 z [1], dostaneme vetu:

Veta 1. *Nech $\mu(W) > 0$. Potom pre skoro všetky (v zmysle Lebesguovej miery) $x \in W$ platí:*

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka: V tomto znení je veta 1 analogon známej Borelovej vety o rozdelení cifier v dyadických rozvojoch (pozri [2]).

Poznámka: Výsledok vety 1 možno formulovať aj takto: *Pre skoro všetky $x \in W$ platí: $f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n)$.*

Naskytá sa prirodzená otázka, či možno naposledy uvedený výsledok zlepšiť v tom zmysle, že člena $o(n)$ na pravej strane nahradíme členom menšieho rádu. Je známe, že pre dyadické rozvoje to urobili viacerí autori (Hausdorff, Hardy—Littlewood, Chinčin). Ukážeme, že je možné výsledky platné pre dyadické rozvoje preniesť aj na naše rady.

Predovšetkým metódou Hausdorffovou, naznačenou v jeho knihe (pozri [4], str. 421), ukážeme platnosť nasledujúcej vety:

Veta 2. *Nech α je reálne číslo, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Nech $\mu(W) > 0$. Potom pre skoro všetky $x \in W$ platí:*

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n^{\alpha}).$$

Dôkaz: Položme $\alpha = 1 - \vartheta$, $0 \leq \vartheta < \frac{1}{2}$.

Nech $\varepsilon > 0$. Znakom $A(n, \varepsilon)$ označme množinu všetkých tých $x \in W$, pre ktoré platí:

$$\left| \frac{f(n, x)}{n} - \frac{1}{2} \right| n^{\vartheta} \geq \varepsilon \tag{3}$$

Pre skrátenie položme: $f(n, x) = f$, potom

$$\mu[A(n, \varepsilon)] = \frac{1}{2^n} \mu(W) \cdot \sum_f{}' \binom{n}{f}, \tag{4}$$

kde čiarka za znakom sčítania značí, že sa sčituje cez práve tie f, pre ktoré platí (3). Vzťah (4) vyplýva z toho, že pri pevnom f existuje $\binom{n}{f}$ rôznych (konečných) postupností $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, obsahujúcich práve f členov rovných 1, a z výsledku vety 2 práce [1]. Aby sme odhadli pravú stranu v (4), vyjdeme z identity:

$$\sum_{f=0}^{n} \binom{n}{f} x^f y^g = u^n, \tag{5}$$

kde $g = n - f$, $u = x + y$.

Položme $v = x - y$ a na identitu (5) uskutočníme postupne operáciu zapísanú symbolicky: $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Indukciou zistíme, že pre každé prirodzené l platí:

$$\sum_{f=0}^{n} \binom{n}{f} (f - g)^{2l} x^f y^g = f_l(n)\, u^n + a_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + a_{2l} u^{n-2l} v^{2l}, \tag{6}$$

kde $a_2, a_4, \ldots a_{2l}$ sú reálne čísla, $f_l(n)$ je polynóm stupňa l s kladným koeficientom pri n^l. K číslu ϑ zvoľme l také veľké, aby $l(1 - 2\vartheta) = 1 + \eta$, $\eta > 0$. Podržme toto l v nasledujúcom pevne a nech už $n \geq 2l$. V (6) položme $x = y = 1 \Rightarrow u = 2$, $v = 0$. Pre dosť veľké n budeme mať:

$$\sum_{=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{f} (f - g)^{2l} < c_1 n^l, \quad c_1 > 0.$$

Deľme túto nerovnosť n^{2l} a násobme $n^{2l\vartheta}$, dostaneme:

$$\sum_{f=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{f}\left(\frac{f}{n} - \frac{g}{n}\right)^{2l} n^{2l\vartheta} < \frac{c_1}{n^{l(1-2\vartheta)}} = \frac{c_1}{n^{1+\eta}}.$$

Pomocou rovnosti $f + g = n$ upravíme ľavú stranu a dostaneme:

$$\sum_{f=0}^{n} \frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{f(n, x)}{n} - \frac{1}{2}\right) n^{\vartheta}\right]^{2l} < \frac{1}{2^{2l}}\frac{c_1}{n^{1+\eta}} = \frac{c_2}{n^{1+\eta}}, \qquad c_2 > 0,$$

odtiaľ:

$$\frac{c_2}{n^{1+\eta}} > \sum_{f}{}' \frac{1}{2^n}\binom{n}{f}\left[\left(\frac{f(n, x)}{n} - \frac{1}{2}\right) n^{\vartheta}\right]^{2l} \geq$$

$$\geq \varepsilon^{2l} \sum_{f}{}' \frac{1}{2^n}\binom{n}{f} \Rightarrow \mu[A(n, \varepsilon)] < \frac{\varepsilon^{-2l}c_2}{n^{1+\eta}}\mu(W).$$

Keďže $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\eta}} < +\infty$ vyplýva z poslednej nerovnosti už známym spôsobom (pozri dôkaz vety 1): $\mu[A(\varepsilon)] = 0$, kde $A(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} A(n, \varepsilon)$. Položme $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{k}\right)$, A je zrejme množina všetkých tých $x \in W$, pre ktoré $\left\{\left(\frac{f(n, x)}{n} - \frac{1}{2}\right) n^{\vartheta}\right\}_1^{\infty}$ nekonverguje k 0. Teda pre skoro všetky $x \in W$ je $\left[\frac{f(n, x)}{n} - \frac{1}{2}\right] n^{\vartheta} = o(1) \Rightarrow f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n^{\alpha})$.

Aj Chinčinov výsledok obsiahnutý v práci [3] možno preniesť na naše rady. Chinčin, ako je známe, ukázal (pozri [3]), že ak $p(n, x)$ značí počet núl na prvých n miestach v dyadickom rozvoji čísla $x \in (0, 1)$, t. j. $p(n, x)$ je počet núl v konečnej postupnosti $c_1, c_2, \dots c_n$, pričom $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ ($c_n = 1$ alebo 0 pre $n = 1, 2, 3, \dots$), potom pre skoro všetky $x \in (0, 1)$ platí:

$$p(n, x) = \frac{n}{2} + O\left(\sqrt{n \log\log n}\right).$$

Najprv si bližšie všimneme štruktúru množiny W príslušnej k danému radu $A = \sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $a_n > R_n (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Vynechaním intervalu $\Delta_1^1 = (-a_1 + R_1, a_1 - R_1)$ z intervalu $\langle -A, A\rangle$

dostaneme množinu I_1, pozostávajúcu z dvoch intervalov $i_1^1 = \langle -A, a_1 + R_1\rangle$ a $i_1^2 = \langle a_1 - R_1, A\rangle$, každý z nich má dĺžku $2R_1$.

Vynechaním intervalu $\Delta_2^1 = (-a_1 - a_2 + R_2, -a_1 + a_2 - R_2)$ z intervalu i_1^1 dostaneme dva intervaly i_2^1 a i_2^2 patriace k I_2, a to: $i_2^1 = \langle -A, -a_1 - a_2 + R_2\rangle$ a $i_2^2 = \langle -a_1 + a_2 - R_2, -a_1 + R_1\rangle$. Podobne vynechaním intervalu $\Delta_2^2 = (a_1 - a_2 + R_2, a_1 + a_2 - R_2)$ z intervalu i_1^2 dostaneme dva intervaly i_2^3, i_2^4 množiny I_2, a to: $i_2^3 = \langle a_1 - R_1, a_1 - a_2 + R_2\rangle$, $i_2^4 = \langle a_1 + a_2 - R_2, A\rangle$. Teda I_2 pozostáva zo štyroch intervalov $i_2^1, i_2^2, i_2^3, i_2^4$. Každý z intervalov $i_2^m (m = 1, 2, 3, 4)$ má dĺžku $2R_2$. Interval Δ_1^1 nazývame styčným intervalom (množiny W) prvého poradia, $\Delta_2^k (k = 1, 2)$ nazývame styčnými intervalmi druhého poradia.

V konštrukcii možno pokračovať ďalej. Nech už sme zostrojili množinu I_n pozostávajúcu z 2^n intervalov $i_n^m (m = 1, 2, \dots 2^n)$ (každý z nich má dĺžku $2R_n$). Teda $i_n^1 = \langle -A, -a_1 - a_2 - \dots - a_n + R_n\rangle$, $i_n^2 = \langle -a_1 - \dots - a_{n-1} + a_n - R_n, -a_1 - \dots - a_{n-1} + a_n + R_n\rangle$ atď., $i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle$.

Pre každý interval i_n^m je charakteristické, že všetky čísla $x \in W$, ktoré patria do i_n^m, majú vo svojich znamienkových rozvojoch na prvých n miestach tie isté faktory ε_k ako ľavý (a tiež pravý) koncový bod intervalu i_n^m. Budeme hovoriť, že postupnosť: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n$ patrí k intervalu i_n^m, kde $i_n^m = \langle \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n - R_n, \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + R_n\rangle$, a tiež naopak. Vynechaním styčných intervalov Δ_{n+1}^k v počte 2^n (z i_n^m vynecháme $\Delta_{n+1}^m = (\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1} + R_{n+1}, \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1} - R_{n+1})$), dostaneme 2^{n+1} intervalov tvoriacich množinu I_{n+1}. Pritom $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ a pre stručnosť označujeme znakom I_n množinu $\{i_n^1, i_n^2, \dots i_n^{2^n}\}$, ako aj množinu $\bigcup_{m=1}^{2^n} i_n^m$ (nemôže dôjsť k nedorozumeniu). Pre pevné n je teda $\langle -A, A\rangle$ zjednotením 2^n intervalov i_n^m množiny I_n a styčných intervalov Δ_k^l, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq 2^{k-1}$.

Pre pevné n definujme ďalej funkciu $b_n(x)$ takto: Na styčných intervaloch Δ_k^l, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq 2^{k-1}$ kladieme $b_n(x) = 0$ a na intervaloch $i_n^m (m = 1, 2, \dots 2^n)$ kladieme $b_n(x) = -1$ alebo 1 podľa toho, či m je nepárne alebo párne. Teda ak $x = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \in W$, potom $b_n(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_n = 1$.

Položme $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ pre každé $x \in \langle -A, A\rangle$. Pre $x \in W$ je $\varphi_n(x) = f(n, x) - g(n, x)$, a teda $\frac{1}{2}\,|\varphi_n(x)| = \left|f(n, x) - \frac{n}{2}\right|$.

Lemma 1. *Nech $k_1, k_2, \dots k_n$ sú navzájom rôzne prirodzené čísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sú celé nezáporné, nie súčasne rovné nule. Potom integrál*

$$\int_{-A}^{A} [b_{k_1}(x)]^{\alpha_1}[b_{k_2}(x)]^{\alpha_2} \dots [b_{k_n}(x)]^{\alpha_n}\, dx$$

má hodnotu 0, ak aspoň jedno z čísel α_i je nepárne; v opačnom prípade má hodnotu $2^{k_l+1}R_{kl}$, kde k_l je najväčšie z čísel k_i také, že $\alpha_l > 0$.

Dôkaz: Poznamenajme, že kladieme $0^0 = 1$. Nech α_i sú všetky párne a nech (bez ujmy na všeobecnosti) je $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ a k_l je najväčšie spomedzi k_i také, že $\alpha_l > 0$ (teda $\alpha_{l+1} = \ldots = \alpha_n = 0$). Myslime si $\langle -A, A\rangle$ rozložený na intervaly $i^m_{k_l}$ systému I_{k_l} a styčné intervaly Δ^s_r, $1 \leq r \leq k_l$, $1 \leq s \leq 2^{r-1}$. Potom funkcia pod integračným znakom je rovná 1 na každom $i^m_{k_l}(m = 1, 2, \ldots 2^{k_l})$ a rovná nule všade inde. Teda hodnota integrálu je $2^{k_l} \,.\, 2R_{k_l} = 2^{k_l+1} \,.\, R_{k_l}$.

Ak aspoň jedno α_i je nepárne, ľahko môžeme zistiť, že funkcia pod znakom integrála je rovná -1 na 2^{k_l-1} a rovná 1 na 2^{k_l-1} intervaloch systému I_{k_l}, pritom k_l má rovnaký význam ako prv. Všade inde je hodnota tej funkcie 0. Z toho je už tvrdenie zrejmé.

Lemma 2. *Nech n, q sú prirodzené čísla, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $\ldots c_q \geq 0$, $c_i(i = 1, 2, \ldots q)$ celé a nech $c_1 + c_2 + \ldots + c_q = n$. Potom platí:*

$$\frac{c_1!c_2!\ldots c_q!}{(2c_1)!(2c_2)!\ldots(2c_q)!} \leq \frac{1}{2}.$$

Dôkaz: Pozri [3]!

Nech je v ďalšom $\mu(W) > 0$.

Lemma 3. *Nech $p_1, p_2, \ldots p_n$ sú reálne čísla, ktoré nie sú súčasne rovné nule. Nech $E(\delta)$ značí množinu všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, pre ktoré $|p_1b_1(x) + \ldots + p_nb_n(x)| > \delta > 0$. Potom platí:* $\mu(E(\delta)) < c \exp\left(-\dfrac{\delta^2}{2\sum\limits_1^n p_i^2}\right)\mu(W)$,

kde c je absolútna konštanta.

Dôkaz: Položme $m = \left[\dfrac{\delta^2}{2\sum\limits_1^n p_i^2}\right]$. Zrejme sa stačí v dôkaze obmedziť na prípad $m \geq 1$. Podľa lemmy 1 dostávame:

$$\delta^{2m}\mu(E(\delta)) \leq \int\limits_{E(\delta)} [p_1b_1(x) + \ldots + p_nb_n(x)]^{2m}\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int\limits_{-A}^{A} [p_1b_1(x) + \ldots + p_nb_n(x)]^{2m}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m\\ \alpha_i \geq 0}} \frac{(2m)!\,p_1^{2\alpha_1}\ldots p_n^{2\alpha_n}}{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!}\,2^{n(\alpha)+1} \,.\, R_{n(\alpha)},$$

pritom prirodzené číslo $n(\alpha)$ závisí od systému $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (pozri lemmu 1). Ďalej podľa lemmy 2 je:

$$\frac{1}{(2\alpha_1)!\ldots(2\alpha_n)!} \leq \frac{1}{2^m}\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}$$

a $2^{k+1}R_k \to \mu(W)$ (pozri [1]). Z toho máme:

$$\delta^{2m}\mu(E(\delta)) \leq c_1\mu(W)\frac{(2m)!}{2^m m!}\sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m,\\ \alpha_i \geq 0}} \frac{m!\,p_1^{2\alpha_1}\ldots p_n^{2\alpha_n}}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} =$$

$$= c_1\mu(W)\frac{(2m)!}{2^m m!}\left[\sum_1^n p_i^2\right]^m.$$

Pomocou Stirlingovej formuly sa ľahko zistí, že $\dfrac{(2m)!}{2^m m!} < c_2\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^m m^m$, a teda:

$$\mu(E(\delta)) < c_3\mu(W)\left[\frac{2m\sum\limits_1^n p_i^2}{\mathrm{e}\,\delta^2}\right]^m \leq c_3\,\mathrm{e}^{-m}\mu(W) <$$

$$< c_3 \exp\left(1 - \frac{\delta^2}{2\sum\limits_1^n p_i^2}\right)\mu(W) = c\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sum\limits_1^n p_i^2}\right)\mu(W).$$

Všetky ďalšie pomocné vety sa dajú dokázať rovnako ako v citovanej Chinčinovej práci, ale s tým rozdielom, že na pravej strane nerovností vystúpi ešte faktor $\mu(W)$. Preto v ďalšom uvedieme len znenie ostatných pomocných viet.

Nech $E_n(\delta)$ značí množinu všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, pre ktoré $\left|\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n\psi(n)}}\right| > \delta$. Pritom je $\psi(x)$ nejaká spojitá a kladná funkcia pre $x > 0$, ktorá má pre $x > 0$ deriváciu pre $x > 0$ spĺňajúcu podmienku: $0 < \psi'(x) < \dfrac{\psi(x)}{x}$.

Lemma 4. *Platí:*

$$\mu(E_n(\delta)) < c\,\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2}\psi(n)} \,.\, \mu(W),$$

kde c je konštanta z lemmy 3.

Nech $E_{p,q}(\delta)$ je množina všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, pre ktoré:

$$\left|\frac{\varphi_q(x)}{\sqrt{q\psi(q)}} - \frac{\varphi_p(x)}{\sqrt{p\psi(p)}}\right| > \delta.$$

Lemma 5. *Pre $0 < p < q < 2p$ je*

$$\mu(E_{p,q}(\delta)) < c\,\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{4}\frac{p\psi(p)}{q-p}} \,.\, \mu(W).$$

Nech $e_{p,r}(\delta)$ je množina všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, pre ktoré aspoň jedno z nasledujúcich čísel

$$\left| \frac{\varphi_q(x)}{\sqrt{q\psi(q)}} - \frac{\varphi_p(x)}{\sqrt{p\psi(p)}} \right|, \quad q = p+1, \ldots p+r$$

je väčšie ako δ.

Lemma 6. *Pre* $0 < p < p + r < 2p$ *je*

$$\mu(e_{p,r}(\delta)) < cp\, e^{-\frac{\delta^2}{4}\frac{p\psi(p)}{r}} \cdot \mu(W).$$

Veta 3. Nech $\mu(W) > 0$. Potom pre skoro všetky $x \in W$ (v zmysle Lebesguovej miery) platí:

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + O\left(\sqrt{n \log\log n}\right).$$

Dôkaz: Ukážeme dokonca, že pre skoro všetky $x \in \langle -A, A\rangle$ je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \log\log n}} \right| \leq 2.$$

Pre celé $m > 0$ a k celé, $0 \leq k < m$, kladieme $T_{m,k} = \left[2^m + \frac{k}{m} 2^m\right] + 1$. Potom podľa lemmy 4, ak $\psi(n) = \log\log n$, $\delta = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ a namiesto n píšeme $T_{m,k}$, dostaneme:

$$\mu(E_{T_{m,k}}(\delta)) < c \exp\left(-\frac{(2+\varepsilon)^2}{2} \log\log\left\{2^m + \frac{k}{m} 2^m\right\}\right) \mu(W) <$$
$$< c \exp\left(-(2+\varepsilon)\left[\log m + \log\log 2\right]\right) \mu(W) = K(\varepsilon)\, m^{-(2+\varepsilon)}$$

$K(\varepsilon)$ závisí len od ε a od $\mu(W)$ (ale $\mu(W)$ je u nás pevné).

Rad:

$$\sum \mu(E_{T_{m,k}}(\delta)), \quad 0 \leq k < m; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

konverguje, pretože

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu(E_{T_{m,k}}(\delta)) < K(\varepsilon)\, m^{-1-\varepsilon} \quad \text{a} \quad \sum_{1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon} < +\infty \Rightarrow$$

pre skoro všetky $x \in \langle -A, A\rangle$ je (pozri dôkaz vety 1)

$$\overline{\lim_{\substack{m\to\infty \\ 0\leq k<m}}} \left| \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \log\log T_{m,k}}} \right| \leq \delta = 2 + \varepsilon$$

a keďže $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, dostaneme z toho:

$$\overline{\lim_{\substack{m\to\infty \\ 0\leq k<m}}} \left| \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \log\log T_{m,k}}} \right| \leq 2 \tag{7}$$

Po druhé použijeme lemmu 6 pri voľbe $\psi(n) = \log\log n$, $\delta > 0$, $p = T_{m,k}$, $r = T_{m,k+1} - T_{m,k} < \frac{2^n}{m} + 1 < \frac{2^{m+1}}{m}$.

Položme ešte

$$M_{m,k}(\delta) = e_{T_{m,k},\, T_{m,k+1} - T_{m,k}}(\delta),$$

dostaneme:

$$\mu(M_{m,k}(\delta)) < c' 2^m \exp\left(-\frac{\delta^2}{4} \frac{(m2^m + k2^m)(\log m + \log\log 2)}{2^{m+1}}\right) \mu(W) <$$
$$< c' 2^m \cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{4} \frac{m(\log m + \log\log 2)}{2}\right) =$$
$$= c' 2^m \exp\left(-L(\delta)\, m\, (\log m + \log\log 2)\right).$$

$L(\delta) > 0$, $L(\delta)$ závisí len od δ; $c' > 0$, c' nezávisí od m, k.

Pre dosť veľké m je

$$\mu(M_{m,k}(\delta)) < c' \exp\left(-m\left\{L(\delta)(\log m + \log\log 2) - \log 2\right\}\right) < c' e^{-m}.$$

Ďalej sa ľahko zistí, že $\sum_{\substack{m=1 \\ 0\leq k<m}}^{\infty} \mu(M_{m,k}(\delta)) < +\infty$, a teda množina všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, ktoré patria do nekonečne mnoho $M_{m,k}(\delta)$, má mieru 0 (to sa rovnako zistí ako pri dôkaze vety 1). Teda pre skoro všetky $x \in \langle -A, A\rangle$ platí (7) a ďalej existuje podľa naposledy dokázaného M^*, $M^* \subset \langle -A, A\rangle$, $\mu(M^*) = 2A$ s touto vlastnosťou:

Ku každému $x \in M^*$ existuje $n_0 = n_0(x, \delta)$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí:

$$\left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \log\log n}} - \frac{\varphi_{T_{m,k}}(x)}{\sqrt{T_{m,k} \log\log T_{m,k}}} \right| \leq \delta, \tag{8}$$

pričom m, k sú definované nerovnosťami: $T_{m,k} \leq n < T_{m,k+1}$.

Ak označíme znakom M^{**} množinu všetkých tých $x \in \langle -A, A\rangle$, pre ktoré platí (7), pre každé $x \in M^* \cap M^{**}$ je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \log\log n}} \right| \leq 2 + \delta,$$

a keďže δ je ľubovoľné kladné číslo, vyplýva z toho pre každé $x \in M^* \cap M^{**}$ platnosť nerovnosti:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \log\log n}} \right| \leq 2. \tag{9}$$

Zrejme $\mu(M^* \cap M^{**}) = 2A$, teda (9) platí pre skoro všetky $x \in \langle -A, A \rangle$, a tak aj pre skoro všetky $x \in W$. Vcelku pre skoro všetky $x \in W$ je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{f(n, x) - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \log \log n}} \right| \leq 1.$$

Poznámka: Ak $x \notin W$, existuje Δ_k^l také, že $x \in \Delta_k^l \Rightarrow b_i(x) = 0$ pre $i = k, k+1, k+2, \ldots \Rightarrow \varphi_n(x) = O(1) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n \log \log n}} \right| = 0.$

Pre tieto x je teda (9) splnené triviálne.

LITERATÚRA

[1] Šalát T.: O istých priestoroch radov s bairovskou metrikou, Mat.-fyz. čas. SAV, VII, (1957), 193—206.

[2] Ostmann H. H.: Additive Zahlentheorie I, Springer-Verlag, 1956.

[3] Chinčin A.: Über dyadische Brüche, Math. Zeit. 18, (1923), 109—116.

[4] Hausdorff F.: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1949.

Došlo 6. 8. 1958.

Katedra matematiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И ДВОИЧНЫЕ ДРОБИ

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

Эта работа исходит непосредственно из работы [1] и [3]. Автор доказывает в этой работе некоторые теоремы, подобные теоремам о разделении цифр в двоичных дробях действительных чисел.

Пусть W значит множество всех таких действительных чисел, которые можно выразить в следующем виде:

$$x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

причем $A = \sum_1^\infty a_n$ (1) — фиксированный сходящийся ряд с положительными членами, $a_n > R_n = \sum_{k=1}^\infty a_{n+k}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Пусть $\mu(W)$ обозначает меру Лебега для множества W и пусть $\mu(W) > 0$ (этого можно достичь выбором ряда (1)). Обозначим через $f(n, x)$ количество чисел 1 в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, причем $x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \in W$.

Потом (теорема 1) почти все $x \in W$ удовлетворяют равенству:

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(Эта теорема подобна известной теореме Бореля о разделении цифр в двоичных дробях действительных чисел.)

Результат (2) можно писать также в следующем виде: „Почти все $x \in W$ выполняют равенство: $f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n)$".

Дальнейшие теоремы, которые автор доказывает, пользуясь удобным применением метода Гаусдорфа и Хинчина, улучшают результат теоремы 1 в том смысле, что член $o(n)$ будет заменен членом меньшего порядка.

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. *Потом почти все* $x \in W$ *выполняют равенство:*

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n^\alpha).$$

Теорема 3. *Почти все* $x \in W$ *выполняют равенство*

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + O\left(\sqrt{n \log \log n}\right).$$

ABSOLUT KONVERGENTE REIHEN UND DYADISCHE ENTWICKLUNGEN

TIBOR ŠALÁT

Zusammenfassung

Diese Arbeit knüpft unmittelbar an die Arbeiten [1] und [3] an. In der Arbeit beweist man einige Sätze, analogische zu einigen Sätzen, welche für die dyadischen Entwicklungen gelten.

Es sei W die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, welche die Gestalt $x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n$ haben, dabei $\varepsilon_n = 1$ oder -1 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $A = \sum_1^\infty a_n$ (1) ist eine feste konvergente Reihe mit positiven Gliedern, $a_n > R_n = \sum_{k=1}^\infty a_{n+k}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Es bedeute $\mu(W)$ das Lebesguesche Maß der Menge W und es sei $\mu(W) > 0$ (das ist zu erreichen durch die Wahl der Reihe (1)). Es bedeute $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen 1 in der Folge: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, dabei $x = \sum_1^\infty \varepsilon_n a_n \in W$.

Dann gilt (Satz 1) für fast alle $x \in W$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßes)

$$D^*(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(Der analoge Satz zum Satze von Borel über die dyadischen Entwicklungen der reellen Zahlen.)

Das Ergebnis (2) kann man in dieser Form schreiben: „Für fast alle $x \in W$ gilt $f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n)$“.

Die weiteren Sätze, welche der Verfasser mit einer passenden Modifikation der Methoden von Hausdorff und Chinčin beweist, verschärfen das Ergebnis des Satzes 1 im solchen Sinne, daß das Glied $o(n)$ mit einem Glied von kleinerer Ordnung ersetzt wird.

Satz 2. *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

Dann für fast alle $x \in W$ gilt:

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + o(n^\alpha).$$

Satz 3. *Für fast alle* $x \in W$ *gilt:*

$$f(n, x) = \frac{n}{2} + O\left(\sqrt{n \log \log n}\right).$$