VOLBA ČTECÍHO INTERVALU PŘI FYSIKÁLNÍCH MĚŘENÍCH A JEHO VLIV NA SPOLEHLIVOST VÝSLEDKU

VÁCLAV ŠINDELÁŘ, Praha

Věnováno prof. RNDr. Zdeňku Horákovi k jeho 60. narozeninám

Úvod

Při měření nějaké veličiny rozumíme *čtením na stupnici* určení polohy indikačního orgánu měřicího přístroje (ručičky ukazatele, světelné značky apod.) nějakou hodnotou jeho stupnice. V dalším předpokládám, že stupnice, jejíž dělení bylo provedeno co nejpřesněji (pokud se týče rozteče sousedních dělicích čárek, rysek), je v přístroji ustavena *správně*. *Správným ustavením stupnice* rozumím, že libovolné poloze indikačního orgánu odpovídající hodnota stupnice se vždy shoduje s hodnotou veličiny, která výchylku indikačního orgánu (ať již přímo nebo nepřímo) způsobila. *Přesnost čtení* závisí kromě na vlastní osobě pozorovatele a na dělení stupnice také na geometrickém tvaru indikačního orgánu v těsné blízkosti stupnice (na příklad hrotu ručičky, světlé čárky světelné značky apod.).

Kvantový charakter čtení na stupnici

Čtení na stupnici má zřejmě kvantový charakter. Za *čtecí kvantum*, jež ovšem není pro všechny přístroje a stupnice stejné, můžeme pokládat nejmenší okem spolehlivě postižitelný rozdíl polohy indikačního orgánu, vyjádřený v hodnotách stupnice. *Čtecím intervalem* i nazývám nejmenší dílek stupnice nebo v případě odhadování[1] při čtení jeho část, v jehož celistvých násobcích uvádíme

[1] Přesnost čtení závisí zejména na dělení stupnice a na tvaru indikačního orgánu. Vzhledem k tomu, že dělicí rysky stupnice mají nějakou konečnou tloušťku, je příliš husté dělení stupnice právě tak nevhodné, jako dělení příliš řídké. Protože okem postihneme obvykle menší rozdíly polohy indikačního orgánu, než jaká je velikost nejmenšího dílku stupnice, tu zpravidla při čtení ještě odhadováním interpolujeme hodnoty v mezích nejmenšího dílku. Odhadování provádíme obvykle i v tom případě, že k interpolaci nejmenšího dílku stupnice používáme nějakého pomocného zařízení, jehož pomocná stupnice má opět nějakou konečnou šířku nejmenších dílků.

čtení. V krajním případě mohl by se čtecí interval shodovat se čtecím kvantem. Ideálem by bylo, kdyby čtecí interval se shodoval se čtecím kvantem a současně s kvantem měřené veličiny. Pak na příklad na stupnici nějakého coulometru by muselo být čtecí kvantum právě rovno jednomu elementárnímu náboji. Do jisté míry je takovýto předpoklad splněn u částicových počítačů. Nutno ovšem dodat, že pak čtení s intervalem menším, než by bylo kvantum měřené veličiny, by nemělo smyslu.

Velikost čtecího intervalu nebývá však rovna čtecímu kvantu. Bývá většinou větší, než by odpovídalo nejmenšímu okem postižitelnému rozdílu polohy indikačního orgánu. Někdy to ani není žádoucí, jindy je to ovšem na závadu, jíž lze odstranit buď jemnějším čtením, nebo volbou citlivějšího přístroje.

Vliv velikosti čtecího intervalu na výsledek měření

Protože nemůžeme přihlížet k rozdílům měřené veličiny menším než i, je zřejmě (ovšem za dřívějších předpokladů) *toleranční* pole[2] čtené veličiny totožné se čtecím intervalem.

Kdybychom nějakou veličinu změřili pouze *jednou*, bylo by *čtení* x zatíženo maximálně chybou $\pm i/2$. Přihlédneme-li k této chybě, můžeme hodnotu takového čtení označit x'. S hodnotou x by byla vázána vztahem

$$x' = x \pm \frac{i}{2}\,. \tag{1}$$

Konáme-li n opakovaných měření téže veličiny, setkáme se se statistickým rozptylem jednotlivým čtení x_i. Určeme si, jakou chybou je zatíženo každé jednotlivé čtení x_i v tomto případě. Ze všech jednotlivých hodnot x_i vypočteme nejoptimálnější hodnotu výsledku měření. Za takovou v jistém smyslu nejčastěji pokládáme aritmetický průměr A, který vypočteme ze vztahu

$$A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\,. \tag{2}$$

Správněji bychom však měli počítat aritmetický průměr z jednotlivých hodnot x_i' daných vztahem (1). Musíme jej pak označit odlišně od A, třeba

$$A' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \pm i/2)}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \pm i/2 = A \pm \frac{i}{2}\,. \tag{3}$$

Oba aritmetické průměry A a A' jsou vázány vztahem obdobným (1). I zde

[2] Tolerančním polem rozumíme rozdíl dvou extrémních čtení (tj. největšího a nejmenšího) příslušejících témuž postavení indikačního orgánu a téže hodnotě měřené veličiny.

je šířka tolerančního pole (intervalu), t. j. v tomto případě rozdíl extrémních hodnot aritmetického průměru, rovna čtecímu intervalu

$$A'_{\max} - A'_{\min} = \frac{i}{2} - \left(-\frac{i}{2}\right) = i. \tag{4}$$

Vliv čtecího intervalu na chybu měření

Vypočteme si *chybu jednoho měření* ze vztahů odvozených podle zákonů statistických. Statistické rozdělení jednotlivých čtení předpokládejme podle Gaussova zákona. Určíme si *krajní chybu* $\varkappa$, a to z jednoduchého vztahu[3]

$$\varkappa = \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{\sqrt{n(n-1)}}, \tag{5}$$

kde $\Delta_{i+i} = A - x_i$ (pro $x_i < A$) jsou kladné odchylky některých čtených hodnot. Jak je patrno z podmínky uvedené v závorce, je to rozdíl aritmetického průměru a těch čtených hodnot, jež jsou menší než aritmetický průměr. Při nepříliš malém počtu měření je podle elementárních zákonů nahodilých chyb takových hodnot přibližně $n/2$.

Správněji bychom pro chybu jednoho měření měli psát

$$\varkappa' = \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta'_{i+}}{\sqrt{n(n-1)}}, \tag{6}$$

kde obdobně s předchozím $\Delta'_{i+} = A' - x'_i$ (pro $x'_i < A'$). Dosadíme-li sem z (1) a (3), dostaneme

$$\Delta'_{i+} = \left(A \pm \frac{i}{2}\right) - \left(x_i \pm \frac{i}{2}\right) = (A - x_i) \pm \left(\frac{i}{2} \pm \frac{i}{2}\right),$$

a protože pro stanovení krajní chyby bude nás zajímat případ nejnepříznivější, nemá záporný výraz druhého členu v závorce význam a můžeme tedy psát

$$\Delta'_{i+} = (A - x_i) \pm i = \Delta_{i+} \pm i. \tag{7}$$

[3] Vztah (5) platící pro krajní chybu $\varkappa$ je odvozován z chyby průměrné λ, s níž je vázán vztahem

$$\varkappa = 4\lambda.$$

Průměrná chyba je definována relací

$$\lambda = \frac{\Sigma |\varepsilon|}{n}.$$

Viz na příklad Zd. Horák, *Praktická fysika*, oddíl 12, Praha 1954.

Protože jsme v obou předchozích vztazích psali Δ'_{i+i}, musí být splněna ovšem již dříve uvedená podmínka $x'_i < A'$. Dosaďme do (6) z rovnice (7) a dostaneme

$$\bar{\varkappa}' = \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} (\Delta_{i+} \pm i)}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{\sqrt{n(n-1)}} \pm \frac{8 \cdot \frac{n}{2} \cdot i}{\sqrt{n(n-1)}} =$$

$$= \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{\sqrt{n(n-1)}} \pm \frac{4ni}{\sqrt{n(n-1)}} = \varkappa \pm \frac{4ni}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{8}$$

Opět nás bude zajímat největší hodnota $\varkappa'$, budeme tedy z (8) v dalším uvažovat pouze znaménko kladné.

Rovnicí (8) byla definována krajní chyba jednoho měření. Protože je, jak známo aritmetický průměr $\sqrt{n}$-kráte přesnější než jednotlivé měření, bude jeho chyba (v našem případě krajní) $\sqrt{n}$-kráte menší, než chyba jednoho měření:

$$\bar{\varkappa}' = \frac{\varkappa'}{\sqrt{n}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{n}} \pm \frac{4ni}{n\sqrt{n-1}} = \bar{\varkappa} \pm \frac{4i}{\sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{n\sqrt{n-1}} \pm \frac{4i}{\sqrt{n-1}}, \tag{9}$$

kde

$$\bar{\varkappa} = \frac{8 \sum\limits_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{n\sqrt{n-1}}. \tag{9'}$$

Výsledek měření uvádíme zpravidla takto:

$$X = (A \pm \bar{\varkappa}) \quad \text{(v příslušných jednotkách)}, \tag{10}$$

v našem případě, kdy uvažujeme vliv čtecího intervalu, bychom správněji měli psát

$$X' = (A' \pm \bar{\varkappa}') \quad \text{(v příslušných jednotkách)}. \tag{11}$$

Dosaďme sem ze (3) a (9)

$$X' = \left(A \pm \frac{i}{2}\right) \pm \left(\bar{\varkappa} \pm \frac{4i}{\sqrt{n-1}}\right) = (A \pm \bar{\varkappa}) \pm$$

$$\pm \left(\frac{i}{2} \pm \frac{4i}{\sqrt{n-1}}\right) = X \pm \left(\frac{i}{2} \pm \frac{4i}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{12}$$

Je obvyklé počítat aritmetický průměr podle (2). Pak ale k takové výsledné hodnotě musíme připojit příslušnou extrémní chybu s příslušným znaménkem

$$X' = A \pm \left(\bar{\varkappa} + \frac{i}{2} + \frac{4i}{\sqrt{n-1}}\right) = A \pm \bar{\varkappa}''. \tag{13}$$

Zde je $\bar{\varkappa}''$ „maximální" chyba výsledku měření, uvažujeme-li vliv konečnosti čtecího intervalu:

$$\bar{\varkappa}'' = \bar{\varkappa} + \frac{i\,(\sqrt{n-1}+8)}{2\sqrt{n-1}} = \bar{\varkappa} + \bar{K}, \tag{14}$$

kde

$$\bar{K} = \frac{(\sqrt{n-1}+8)}{2\sqrt{n-1}}\,.\,i.$$

Z tohoto vzorce (14) můžeme si odvodit *kriterium hospodárnosti* čtení na stupnici. Můžeme se podle jeho hodnoty také přesvědčit, zda k výsledku obvykle připojovaná chyba (v našem případě chyba krajní) je skutečně správným vodítkem k posouzení jeho spolehlivosti.

Vyjděme z předpokladu,[4] že nebudeme přihlížet asi ke 20 % změně krajní chyby.

Pak můžeme poměru veličin $\bar{\varkappa}$ a $\bar{K}$ ze vztahu (14), který si označme ξ, přiřknout charakter kriteria s mezní hodnotou

$$\xi_m = \frac{\bar{\varkappa}}{\bar{K}} = \frac{16\sum\limits_{i=1}^{\sim n/2}\Delta_{i+}}{(\sqrt{n-1}+8)\,.\,ni} = 5. \tag{15}$$

Bude-li v nějakém případě $\xi < 5$, pak byl čtecí interval i volen příliš veliký, bude-li naopak $\xi > 5$, byl čtecí interval příliš malý. Pro nějaký případ měření můžeme vhodnou velikost čtecího intervalu určit (podle 15) ze vztahu

$$i' = \frac{16\sum\limits_{i=1}^{\sim n/2}\Delta_{i+}}{5n\,(\sqrt{n-1}+8)}\,. \tag{16}$$

Příklady.

Pro názor uvedu dva případy.

1. U desetičlenné řady ($n = 10$) měření (délkového) je $A = 500,205$ mm, $\Sigma\,\Delta_{i+} = 5{,}225$ mm, $i = 0{,}01$ mm. Krajní chyba výsledku $\bar{\varkappa}$ podle (9')

$$\bar{\varkappa} = \frac{8\,.\,5{,}225}{10\,.\,3} = 1{,}39(3) \text{ mm},$$

a poměr

$$\xi = \frac{1{,}39(3)}{1{,}85\,.\,10^{-2}} = 76{,}1(>\xi_m).$$

[4] Podle K. Mader, *Ausgleichrechnung* (*Handbuch der Physik III*, Berlin 1928) jsou „střední meze" průměrné chyby

$$\lambda = \frac{\Sigma\,|\varepsilon|}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}755\,51}{\sqrt{n}}\right).$$

Pro $n = 10$, což je případ nejčastější, činí tato „střední mez" asi 24 %.

Při měření jsme volili tedy příliš malý čtecí interval (s ohledem na statistický rozptyl jednotlivých čtení). Měli jsme volit podle (16)

$$i' = \frac{16\sum\limits_{i=1}^{\sim n/2}\Delta_{i+}}{5n\,(\sqrt{n-1}+8)} = \frac{83{,}60}{550} = 0{,}152 \doteq 0{,}2 \text{ mm}.$$

Vypočtěme si ještě, jaká je hodnota $\bar{\varkappa}''$ definovaná vztahem (14)

$$\bar{\varkappa}'' = \bar{\varkappa} + \bar{K} = 1{,}39(3) + 0{,}001(8) = 1{,}41(1) \text{ mm}.$$

Rozdíl proti $\bar{\varkappa}$ je patrně málo podstatný. Měření není tedy třeba opakovat se změněným čtecím intervalem. Jinak je tomu v případě dalším:

2. U desetičlenné řady měření ($n = 10$) časového je $A = 53{,}70$ sec, $\Sigma\,\Delta_{i+} = 0{,}7$ sec, $i = 0{,}2$ sec. Krajní chyba podle (9') je

$$\bar{\varkappa} = \frac{8\,.\,0{,}7}{10\,.\,3} = 0{,}18(6) \text{ sec},$$

a hodnota

$$K = \frac{11}{6}\,.\,0{,}2 = 0{,}36(6) \text{ sec}.$$

Poměr

$$\xi = \frac{0{,}18(6)}{0{,}36(6)} = 0{,}508 \doteq 0{,}51\ (<\xi_m),$$

je menší než mezní. Podle (16) měl být správně volen interval

$$i' = \frac{0{,}7\,.\,16}{550} = 0{,}0203(6) \doteq 0{,}02\left(\doteq \frac{1}{10}\,i\right).$$

Zde je patrno, že zvolený interval i byl příliš veliký pro přesnější určení statisticky málo kolísající veličiny.

Vypočtěme si podobně jako v příkladě předešlém podle (14) hodnotu

$$\bar{\varkappa}'' = \bar{\varkappa} + \bar{K} = 0{,}18(6) + 0{,}36(6) = 0{,}55(2) \text{ sec}.$$

Vidíme, že rozdíl mezi $\bar{\varkappa}''$ a $\bar{\varkappa}$ je zde podstatný. Zatím co bychom podle běžného způsobu psali

$$X = (53{,}70 \pm 0{,}18(6)) \text{ sec},$$

mělo by správněji být podle (13)

$$X' = (53{,}70 \pm 0{,}55(2)) \text{ sec}.$$

Závěr

Kriterium čtecího intervalu (15) je sice kriterium a posteriori, může nám však velmi dobře posložit jako přibližné kriterium a priori pro podobná měření konaná později. V případě, že $\xi > 5$ jsme četli zbytečně přesně, tedy nehospodárně, ovšem spolehlivost výsledku jsme tím neovlivnili. Je-li naopak

$\xi < 5$ a zejména je-li $\xi \gtrless 5$, musíme měření příslušné veličiny provést znovu, a to se čtecím intervalem i', vypočteným podle (6). Musíme pak případně volit přesnější měřicí přístroj s jemnějším dělením stupnice. Kdybychom měření již znovu neprováděli, vypočteme si krajní chybu výsledku $\bar{\varkappa}''$ podle vztahu (14) a připojíme ji k výsledku.

Tato drobná práce má být malým příspěvkem k širšímu problému hospodárnosti při měření, zejména přesném, fysikálním.

V závěru děkuji prof. Zd. Horákovi za cenné připomínky k tomuto námětu.

LITERATURA

[1] Zd. Horák, Praktická fysika, Praha 1958.
[2] Zd. Horák, Početní zpracování fysikálních měření, Praha 1953.
[3] K. Jakowlew, Mathematische Auswertung von Meßergebnissen, Berlin 1952.
[4] V. Šindelář, Methoda stanovení výsledků měření při nesouměrném rozložení chyb. Stroj. Sborník 8, 1954.
[5] V. Šindelář, O vlivu dělení stupnice na výsledek měření (Věstník 1. věd. konf. ČVUT, Praha 1956).

Došlo 12. 2. 1958.

Katedra fysiky Fakulty strojní Českého vysokého učení technického v Praze

ВЫБОР ИНТЕРВАЛА ОТСЧЕТА ПРИ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА НАДЕЖНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА

ВАЦЛАВ ШИНДЕЛАРЖ

Выводы

При всех измерениях отсчет показаний на шкале измерительного прибора имеет квантитативный характер. Интервал отсчета под которым подразумеваем самое малое деление шкалы или в случае оценки на глаз доля деления шкалы является, как правило, большим, чем квант отсчета, представляющий собою самую малую, глазом еще надежно постижимую разницу в положении индикаторного органа. В статье выводится критериум (апостериори) экономического выбора интервала отсчета с учетом статистического рассеяния значений измеряемой величины. Наиболее пригодная величина интервала отсчета i' определяется здесь следующим выражением:

$$i' = \frac{16 \sum_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{5n(\sqrt{n-1} + 8)},$$

где Δ_{i+} — (положительные) отклонения тех значений отсчета, которые являются меньшими, чем арифметическое среднее значение, полученное из всех n значений отсчета,

ÜBER DIE WAHL DES ABLESEINTERVALLES BEI PHYSIKALISCHEN MESSUNGEN UND ÜBER SEINEN EINFLUSS AUF DIE VERLÄSSLICHKEIT DES RESULTATES

VÁCLAV ŠINDELÁŘ

Zusammenfassung

Bei allen Messungen hat die Ablesung einer Skala einen reinen quantenhaften Charakter. Ein Ableseintervall, d. i. das kleinste Teilchen der Skala oder sein Bruchteil im Falle der Abschätzung (als einer Art der Interpolation), ist in der Regel größer als ein Ablesequantum, d. i. der kleinste visualisch verläßlich begreifbarer Unterschied der Lage eines Indikationsorganes. In dieser Arbeit ist ein Kriterium (a posteriori) der wirtschaftlichen Wahl eines Ableseintervalles mit der Rücksicht auf eine Zerstreuung einzelner Werte der gemessenen Größe abgeleitet. Die günstigste Größe des Ableseintervalles i ist durch die Formel gegeben

$$i' = \frac{16 \sum_{i=1}^{\sim n/2} \Delta_{i+}}{5n(\sqrt{n-1} + 8)},$$

in der Δ_{i+} alle (positive) Abweichungen derjenigen Ablesewerte bezeichnet, die kleiner sind als das arithmetische Mittel aller n einzelnen Ablesewerte.