MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 4 — 1958

O OPERÁTOROVEJ METÓDE RIEŠENIA DIFERENČNÝCH ROVNÍC

JOZEF ELIÁŠ, Bratislava

Úvod

Na riešenie diferenčných rovníc boli vypracované rôzne metódy. Predovšetkým to boli klasické metódy spojené s menami L. Eulera, J. L. Lagrangea a iných. Po objavení Laplaceovej transformácie pribudla ďalšia metóda. I keď bola táto metóda účinná, svojou povahou sa obmedzovala na triedu prípustných funkcií. Podobná situácia bola i pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie. V práci [1] a [2] vyložil J. Mikusiński nové, algebrické zdôvodnenie operátorového počtu. Tým rozšíril triedu funkcií a rovníc, na ktoré možno použiť operátorovú metódu. Cieľom tejto práce je ukázať, že podobnú operátorovú metódu možno vybudovať aj na riešenie diferenčných rovníc. V § 1—5 je vybudovaná algebra operátorov. V § 6 sa používajú predchádzajúce výsledky na riešenie diferenčných rovníc.

§ 1. Operátory

Označme znakom K množinu všetkých komplexných funkcií definovaných na množine celých nezáporných čísel. Funkciu z K budeme označovať $\{a(n)\}$. Znakom $a(n)$ budeme rozumieť hodnotu funkcie v čísle n. Miesto $\{a(n)\}$ budeme často písať krátko iba a. Znak $\{a\}$ bude znamenať funkciu, ktorá pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ nadobúda konštantnú hodnotu rovnú číslu a. V množine K definujme dve operácie: sčítanie $+$ a násobenie $\ast$.

Definícia 1.1. *Nech a, b sú funkcie z K. Potom:*

$$a + b = \{a(n)\} + \{b(n)\} = \{a(n) + b(n)\}, \tag{1}$$

$$a \ast b = \{a(n)\} \ast \{b(n)\} = \{c(n)\}, \tag{2}$$

pričom

$$c(n) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1), & \text{pre } n > 0 \\ 0 & \text{pre } n = 0 \end{cases}$$

Poznámka 1. V algebre se zavádza prázdny súčet — súčet o nula sčítancoch — ktorý sa definuje takto: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$. Aby vyjadrenie súčinu $a \ast b$ bolo jednoduchšie, priraďme symbolu $\sum_{i=1}^{0} a(-i)\, b(i-1)$ číslo nula.

Na základe toho možno písať:

$$a \ast b = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1) \right\}. \tag{2a}$$

Vidieť, že súčet $a + b$ a súčin $a \ast b$ je opäť funkcia z množiny K. Ďalej je zrejmé, že pre takto definované sčítanie platí zákon komutatívny, asociatívny a rovnica $a + x = b$ má v K riešenie pre každé a, b z K.

Dokážeme, že aj násobenie splňuje zákon komutatívny a asociatívny. Skutočne je:

$$a \ast b = \{a(n)\} \ast \{b(n)\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1) \right\}.$$

Ale

$$\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1) = a(n-1)\, b(0) + a(n-2)\, b(1) + \ldots +$$
$$+ a(2)\, b(n-3) + a(1)\, b(n-2) + a(0)\, b(n-1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b(n-j)\, a(j-1),$$

pre $n > 0$. Rovnosť oboch súčtov platí aj pre $n = 0$. Preto je teda:

$$a \ast b = \left\{ \sum_{j=1}^{n} b(n-j)\, a(j-1) \right\} = b \ast a.$$

Ďalej

$$(a \ast b) \ast c = (b \ast a) \ast c = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b(n-i)\, a(i-1) \right\} \ast \{c(n)\} =$$
$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} b(n-i-j)\, a(i-1)\, c(j-1) \right\} =$$
$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} d(i, j) \right\},$$

pričom

$$d(i, j) = \begin{cases} a(i-1)\, b(u-i-j)\, c(j-1), & \text{pre } i + j \le n \\ 0 & \text{pre } i + j > n \end{cases}.$$

Potom

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-j} d(i, j) \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} d(i, j) \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d(i, j) \right\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i} d(i, j) \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-i} b(n-i-j)\, c(j-1) \right) a(i-1) \right\} =$$
$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} b(n-j)\, c(j-1) \right\} \ast \{a(n)\} = (b \ast c) \ast a = a \ast (b \ast c),$$

teda

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c).$$

Nakoniec dokážeme platnosť distributívneho zákona.

$$(a + b) \ast c = [\{a(n)\} + \{b(n)\}] \ast \{c(n)\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a(n-i) + b(n-i)]\, c(i-1) \right\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, c(i-1) + \sum_{i=1}^{n} b(n-i)\, c(i-1) \right\} =$$
$$= \{a(n)\} \ast \{c(n)\} + \{b(n)\} \ast \{c(n)\} = a \ast c + b \ast c.$$

Z dokázaných vzťahov a axiomatiky teórie okruhov vyplýva

Veta 1.1. *Množina K vzhľadom na operácie (1), (2) tvorí komutatívny kruh.*

Nulovým elementom okruhu K je zrejme funkcia $\{0\}$.

Veta 1.2. *Ak* $\{a(n)\} \ast \{b(n)\} = \{0\}$, *potom buď* $\{a(n)\} = \{0\}$, *alebo* $\{b(n)\} = \{0\}$, *alebo oboje.*

Dôkaz. Uvažujme funkcie, pre ktoré platí: $\{a(n)\} \ast \{b(n)\} = \{0\}$ pre ľubovoľné prirodzené číslo. Predpokladajme nepriamo, že existujú aspoň dve prirodzené čísla m_0, l_0, také, že $a(m_0) \neq 0$; $b(l_0) \neq 0$, ale $\{a(n)\} \ast \{b(n)\} = 0$. Nech M je množina tých celých nezáporných čísel, pre ktoré $a(n) \neq 0$ a N množina tých celých nezáporných čísel, pre ktoré $b(n) \neq 0$. Podľa predpokladu sú množiny M, N neprázdne. Označme $m = \inf M \in M$ a $l = \inf N \in N$. Pre každé $n = 0, 1, \ldots$, pre ktoré platí $n < m$, je $a(n) = 0$, podobne pre každé $n < l$ je $b(n) = 0$. Počítajme hodnotu funkcie $\{c(n)\} = \{a(n)\} \ast \{b(n)\}$ v bode $n = l + m + 1$. Máme:

$$c(l + m + 1) = \sum_{i=1}^{l+m+1} a(l + m + 1 - i) = \sum_{i=1}^{l} a(l + m + 1 - i)\, b(i-1) +$$
$$+ a(m)\, b(l) + \sum_{i=l+2}^{l+m+1} a(l + m + 1 - i)\, b(i-1) = a(m)\, b(l) \neq 0.$$

To je spor.

Veta 1.2. hovorí, že okruh K nemá deliteľov nuly. Komutatívny okruh bez deliteľov nuly sa nazýva obor integrity. Z vety 1.1 a vety 1.2 vyplýva teda tento dôsledok.

Dôsledok. *Množina K vzhľadom na operácie* (1), (2) *tvorí obor integrity.*

Podľa známej vety (pozri [3]) každý obor integrity možno vnoriť do telesa, t. j. ku každému oboru integrity I existuje také teleso T, ktoré obsahuje podmnožinu izomorfnú s I. Najmenšie takéto teleso (t. j. prienik všetkých takýchto telies) sa nazýva podielovým telesom oboru integrity I.

Definícia 1.2. *Podielové teleso oboru integrity K budeme nazývať telesom operátorov a budeme ho značiť $T(K)$. Prvky telesa $T(K)$ nazveme operátormi.*

Elementmi $T(K)$ sú dvojice, ktoré budeme písať v tvare zlomku $\frac{a}{b}$, (kde a, b sú funkcie), $b \neq \{0\}$. Rovnosť, sčítanie, násobenie a delenie operátorov definujeme takto:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \ast d = b \ast c; \quad b \neq \{0\}, \quad d \neq \{0\},$$

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a \ast d + b \ast c}{b \ast d}; \quad b \neq \{0\}, \quad d \neq \{0\},$$

$$\frac{a}{b} \odot \frac{c}{d} = \frac{a \ast c}{b \ast d}; \quad b \neq \{0\}, \quad d \neq \{0\}.$$

Je zrejmé, že nulovým prvkom telesa $T(K)$ (t. j. nulovým operátorom) je operátor $\frac{\{0\}}{b}$ (pre ľubovoľné $b \neq \{0\}$). Ďalej jednotkovým elementom telesa $T(K)$ (t. j. jednotkovým operátorom) je operátor $\frac{\{a(n)\}}{\{a(n)\}}$, pre ľubovoľné $\{a(n)\} \neq \{0\}$.

Poznámka 1a. Keďže $T(K)$ je teleso, je v $T(K)$ definované aj odčítanie a delenie. Ľahko možno verifikovať, že napríklad:

$$\frac{a}{b} \ominus \frac{c}{d} = \frac{a \ast d - b \ast c}{b \ast d}, \quad b \neq \{0\}, \quad d \neq \{0\},$$

$$\frac{a}{b} \oslash \frac{c}{d} = \frac{a \ast d}{b \ast c}, \quad b \neq \{0\}, \quad c \neq \{0\}, \quad d \neq \{0\}.$$

Z definície rovnosti vyplýva, že $\frac{a \ast k}{k} = \frac{a \ast k'}{k'}$, pre každé $k \neq k'$, kde $k \neq \{0\}$. Špeciálne je tento operátor rovný operátoru $\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}}$.

S operátormi typu $\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}}$ sa počíta podľa týchto pravidiel:

$$\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}} \oplus \frac{b \ast \{1\}}{\{1\}} = \frac{a \ast \{1\} \ast \{1\} + b \ast \{1\} \ast \{1\}}{\{1\} \ast \{1\}} = \frac{(a+b] \{1\} \ast \{1\}}{\{1\} \ast \{1\}} = \frac{(a+b) \ast \{1\}}{\{1\}},$$

$$\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}} \odot \frac{b \ast \{1\}}{\{1\}} = \frac{a \ast b \ast \{1\} \ast \{1\}}{\{1\} \ast \{1\}} = \frac{a \ast b \ast \{1\}}{\{1\}}.$$

Posledné vzorce možno čítať takto:

$$\text{Ak } a+b=c, \quad \text{je } \frac{a \ast \{1\}}{\{1\}} \oplus \frac{b \ast \{1\}}{\{1\}} = \frac{c \ast \{1\}}{\{1\}} \text{ a naopak.} \tag{3}$$

$$\text{Ak } a \ast b=c, \quad \text{je } \frac{a \ast \{1\}}{\{1\}} \odot \frac{b \ast \{1\}}{\{1\}} = \frac{c \ast \{1\}}{\{1\}} \text{ a naopak.} \tag{4}$$

Teda množina N operátorov typu $\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}}$ je izomorfná s množinou K.

Stotožnime preto operátory tvaru $\frac{a \ast \{1\}}{\{1\}}$ s funkciami $\{a(n)\}$. T. j. každú funkciu $\{a(n)\}$ budeme v ďalšom považovať za operátor tvaru $\frac{\{a(n)\} \ast \{1\}}{\{1\}}$, alebo, čo je to isté, aj za operátor $\frac{\{a(n)\} \ast \{k(n)\}}{\{k(n)\}}$, $\{k(n)\} \neq \{0\}$.

Poznámka 2. Pretože práve urobenou dohodou sme množinu všetkých funkcií vnorili do množiny operátorov, nebudeme (vzhľadom na vzťahy (3), (4)) robiť ďalej rozdiel medzi operáciami $+$ a $\oplus$, $\ast$ a $\odot$ a budeme namiesto $\ast$ písať $\odot$. Pretože už nemôže vzniknúť nedorozumenie, budeme krúžok vynechávať a namiesto $a \odot b$ písať ab.

Poznámka 3. Ukážeme ešte, že množina $T(K)$ je širšia ako množina všetkých funkcií, t. j. operátorov tvaru $\frac{\{a(n)\}}{\{1\}}$. Pre to stačí dokázať napr., že operátor $\frac{\{1\}}{\{1\}}$ sa nedá písať v tvare $\frac{\{a(n)\}}{\{1\}}$. Teda, že v zmysle práve zavedenej novej rovnosti medzi operátormi a funkciami operátor $\frac{\{1\}}{\{1\}}$ nie je funkciou. Keby existovala funkcia $\{a(n)\}$ taká, že $\frac{\{a(n)\}\{1\}}{\{1\}} = \frac{\{1\}}{\{1\}}$, platilo by podľa definície rovnosti:

$$\{a(n)\} \,.\, \{1\}\{1\} = \{1\}\{1\}, \quad \text{t. j.} \quad \{1\}[\{a(n)\}\{1\} - \{1\}] = \{0\},$$

teda $\{a(n)\}\{1\} = \{1\}$. To nie je možné, lebo v bode $n = 0$ má ľavá strana hodnotu rovnú nule, kdežto pravá strana má hodnotu rovnú jednej.

§ 2. Číselné operátory

Vyšetrime teraz operátory tvaru $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$, kde $\{\alpha\}$ je konštantná funkcia rovná α (aj pre $n = 0$). Budeme ich zatiaľ označovať znakom $[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$.

Pre tieto operátory platia nasledujúce rovnosti:

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} + \frac{\{\beta\}}{\{1\}} = \frac{\{\alpha\} + \{\beta\}}{\{1\}} = \frac{\{\alpha + \beta\}}{\{1\}} = [\alpha + \beta].$$

$$[\alpha]\cdot[\beta]=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}\cdot\frac{\{\beta\}}{\{1\}}=\frac{\{\alpha\beta\}}{\{1\}}=[\alpha\beta].$$

Ďalej pre $\{\beta\} \neq \{0\}$

$$[\alpha]:[\beta]=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}:\frac{\{\beta\}}{\{1\}}=\frac{\{\alpha\}\{1\}}{\{\beta\}\{1\}}=\frac{\dfrac{\{\alpha\}\{1\}}{\{1\}^2}}{\dfrac{\{\beta\}\{1\}}{\{1\}^2}}=\frac{\dfrac{\{\alpha\}}{\{1\}}}{\dfrac{\{\beta\}}{\{1\}}}=\frac{[\alpha]}{[\beta]},$$

Pre operátor $[0]=\frac{\{0\}}{\{1\}}$ a ľubovoľný operátor $[\alpha]=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$ platí:

$$[0]+[\alpha]=\frac{\{0\}}{\{1\}}+\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=[\alpha].$$

$$[0]\cdot[\alpha]=\frac{\{0\}}{\{1\}}\cdot\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=\frac{\{0\}}{\{1\}^2}=\frac{\{0\}}{\{1\}}=[0].$$

Pre operátor $[1]=\frac{\{1\}}{\{1\}}$ a ľubovoľný operátor $[\alpha]=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$ platí:

$$[\alpha]\cdot[1]=\frac{\{1\}}{\{1\}}\cdot\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=\frac{\{\alpha\}\{1\}}{\{1\}^2}=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=[\alpha].$$

Ďalej platí:

$$[\alpha]\cdot\left[\frac{1}{\alpha}\right]=\left[\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right]=[1].$$

Teda s operátormi typu $[\alpha]$ počítame ako s komplexnými číslami α. Pritom, ako sme ukázali, operátory $[1]$ a $[0]$ sa chovajú ako čísla 0 a 1. Je zrejmé, že zobrazenie $\alpha \to [\alpha]$ je izomorfizmus. Preto môžeme vysloviť vetu.

Veta 2.1. *Množina M všetkých operátorov typu $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$, tvorí podteleso telesa všetkých operátorov. Táto množina M je izomorfná s telesom komplexných čísel.*

Môžeme preto stotožniť operátory typu $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$ s komplexnými číslami α, t. j. každé komplexné číslo α môžeme považovať za operátor tvaru $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$. To budeme v ďalšom robiť.

Poznámka 1. V telese $T(K)$ sme zatiaľ našli dve význačné podmnožiny. Po prvé, množinu N operátorov typu $\frac{\{a(n)\}}{\{1\}}$, ktorá je izomorfná s oborom integrity K. Po druhé, množinu M, všetkých operátorov tvaru $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$, ktorá je izomorfná s telesom komplexných čísel. Množiny M a N sú rôzne, lebo vieme, že operátor $\frac{\{1\}}{\{1\}} \in M$ neleží v N.

Zrejme je $\frac{\{0\}}{\{1\}}=\frac{\{0\}\{1\}}{\{1\}}$. Tento operátor patrí do $N \cap M$. Ukážme, že prenik $M \cap N$ neobsahuje žiadny ďalší element. Predpokladajme, že $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}=\frac{\{b(n)\}\{1\}}{\{1\}}$, t. j. $\{\alpha\}\{1\}=\{b(n)\}\cdot\{1\}^2$. Z toho máme $\{\alpha\}=\{b(n)\}\{1\}$. Z tejto rovnosti vyplýva, že funkcia $\{b(n)\}\{1\}$ je konštantná. V bode $n=0$ nadobúda hodnotu 0. Ak majú byť obidva operátory rovnaké, musí byť α identicky rovné nule. Potom je však aj $\{b(n)\}=\{0\}$. Teda funkcia $\{0\}$ je jedinou funkciou, ktorá sa rovná číselnému operátoru $[0]$. Pretože sme čísla vnorili do telesa operátorov, je už definované sčítanie, násobenie čísel a operátorov (obzvlášť aj násobenie čísel a funkcií). Bez obavy z nedorozumenia budeme v ďalšom miesto číselného operátora $[\alpha]$ hovoriť o čísle α a vynechávať hranatú zátvorku. Pritom treba dávať pozor, lebo α a $[\alpha]$ je niečo celkom iné.

Je osožné všimnúť si pritom niektoré špeciálne prípady, ktoré budeme v ďalšom bežne používať.

a) Ak α je číslo a $\{a(n)\}$ funkcia, máme:

$$\alpha\{a(n)\}=[\alpha]\{a(n)\}=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}\{a(n)\}=$$

$$=\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha a(i-1)\right\}}{\{1\}}=\frac{\{1\}\{\alpha a(n)\}}{\{1\}}=\{\alpha a(n)\}.$$

b) Ak za $\{a(n)\}$ kladieme konštantnú funkciu $\{\beta\}$, je $\alpha\{\beta\}=\{\alpha\beta\}$.

c) Ak za $\{a(n)\}$ kladieme konštantnú funkciu $\{1\}$, je $\alpha\{1\}=\{\alpha\}$. Slovami: každá konštantná funkcia $\{\alpha\}$ sa dá písať ako súčin čísla α a operátoru $\{1\}$. $\left(\text{To je vlastne zrejmé aj z toho, že } \frac{\{\alpha\}\{1\}}{\{1\}}=\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}\{1\}.\right)$

d) Ak $\frac{a}{b}$ je ľubovoľný operátor, $b \neq \{0\}$, je

$$1\,\frac{a}{b}=[1]\frac{a}{b}=\frac{\{1\}}{\{1\}}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

$$0\cdot\frac{a}{b}=[0]\frac{a}{b}=\frac{\{0\}}{\{1\}}\cdot\frac{a}{b}=\frac{\{0\}}{\{1\}b}=\frac{\{0\}\cdot\{b\}}{\{1\}\cdot\{b\}}=\frac{0}{\{1\}}=0.$$

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}+\frac{\{0\}}{\{1\}}=\frac{a\{1\}+\{0\}b}{b\{1\}}=\frac{a\{1\}}{b\{1\}}=\frac{a}{b}.$$

Poznámka 2. Poznamenajme, že na rozdiel od vlastnosti uvedenej sub a) súčet čísla α a funkcie $\{a(n)\}$ sa nedá písať v tvare $\{\alpha+a(n)\}$. Operátor $\alpha+\{a(n)\}$ sa dá písať iba ako $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}+\frac{\{1\}\{a(n)\}}{\{1\}}=\frac{\left\{\alpha+\sum\limits_{i=1}^{n}a(i-1)\right\}}{\{1\}}$.

Pretože operátor $\{1\}$ sa veľmi často vyskytuje, označme ho znakom l, t. j. položme $l = \{1\}$. Nech $\{a(n)\}$ je funkcia z K. Potom podľa definície súčinu platí: $l\{a(n)\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} a(i-1)\right\}$. Násobenie funkcie $\{a(n)\}$ s operátorom l je teda súčet hodnôt funkcie $\{a(n)\}$ v bodoch $0, 1, \ldots, n-1$.

Definícia 3.1. *Operátor l budeme volať operátorom sumácie.*

Ľahko možno vypočítať kladné celočíselné mocniny operátora l.

Veta 3.1. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo $k \geqq 2$ a operátor l platí:*

$$l^k = \{C_n^{k-1}\}\ [1]$$

Dôkaz. Urobíme ho metódou úplnej indukcie. Pre $k = 2$ je $l^2 = l \cdot l = \{1\}\{1\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} 1\right\} = \{C_n^1\}$. Teda naše tvrdenie je správne pre $k = 2$. Predpokladajme, že naše tvrdenie platí pre $k = 1, 2, \ldots, m$. Potom

$$l^{m+1} = l \cdot l^m = \{1\}\{C_n^{m-1}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}^{m-1}\right\} = \{C_0^{m-1} + C_1^{m-1} + \ldots +$$
$$+ C_{m-1}^{m-1} + C_m^{m-1} + \ldots + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}\} = \{C_n^m\}.$$

Tým je dôkaz urobený.

§ 4. Operátor tvorby diferencií

V operátorovom počte má hlavnú úlohu operátor inverzný k operátoru sčitovania.

Definícia 4.1. *Operátor $\frac{1}{l}$ nazveme operátorom tvorby diferencií a označíme ho znakom s.*

Z definície vyplýva, že $ls = sl = 1$ (kde 1 je číselný operátor). Poznamenajme: Zatiaľ čo operátor l je funkcia, t. j. padne do zavedenej množiny N, operátor s nie je funkcia, t. j. nepadne do množiny N. Z definície operátora s vyplýva, že $\frac{1}{s}$ patrí do N. Neskôr ukážeme, že i operátory $\frac{1}{s+1}, \frac{1}{(s+1)^2}$ a podobné sú funkciami, t. j. patria do N.

V ďalšom budeme potrebovať pojem diferencie funkcie. Nech $\{a(n)\}$ je funkcia, prvou diferenciou (alebo diferenciou prvého rádu) funkcie $\{a(n)\}$ budeme volať funkciu $\{\Delta a(n)\}$, ktorá je definovaná takto:

$$\{\Delta a(n)\} = \{a(n+1)\} - \{a(n)\}.$$

[1] Kombinačné číslu budeme označovať znakom C_p^q, pričom platí: $C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$, pre $0 \leqq q \leqq p$, kde p a q sú prirodzené čísla. Pritom definujeme $0! = 1$ a pre $p < q$, $C_p^q = 0$.

Diferenciu prvých diferencií označíme $\{\Delta^2 a(n)\}$ a nazveme druhou diferenciou funkcie $\{a(n)\}$ a budeme ju definovať takto:

$$\{\Delta^2 a(n)\} = \{\Delta a(n+1)\} - \{\Delta a(n)\}.$$

Všeobecne diferenciu k-teho rádu funkcie $\{a(n)\}$ budeme označovať $\{\Delta^k a(n)\}$ a definovať takto:

$$\{\Delta^k a(n)\} = \{\Delta^{k-1} a(n+1)\} - \{\Delta^{k-1} a(n)\}.$$

Funkcie $\{\Delta a(n)\}, \{\Delta^2 a(n)\}, \ldots, \{\Delta^k a(n)\}$ sú funkcie z K.

Veta 4.1. *Nech $\{a(n)\}$ je funkcia, potom pre $n \geqq 0$ platí:*

$$s\{a(n)\} = \{\Delta a(n)\} + a(0).$$

Dôkaz. Funkciu $\{a(n)\}$, pre $n \geq 0$ možno napísať takto:

$$\{a(n)\} = \{a(0)\} + \{a(1)\} - \{a(0)\} + \ldots + \{a(n-2)\} -$$
$$- \{a(n-1)\} + \{a(n)\} - \{a(n-1)\} = \{a(0)\} + \{\Delta a(0)\} +$$
$$+ \{\Delta a(1)\} + \ldots + \{\Delta a(n-1)\} = \{a(0)\} + \left\{\sum_{i=1}^{n} \Delta a(i-1)\right\}.$$

Čiže $\{a(n)\} = la(0) + l\{\Delta a(n)\}$. Vynásobme obe strany operátorom s, dostaneme $s\{a(n)\} = \{\Delta a(n)\} + a(0)$, čo sme mali dokázať.

Ak vo vete 4.1 je $a(0) = 0$, dostaneme $s\{a(n)\} = \{\Delta a(n)\}$. V tomto prípade násobenie funkcie s operátorom s dáva diferenciu funkcie. Preto sme nazvali operátor s operátorom tvorby diferencií.

Veta 4.2. *Nech $\{\Delta^k a(n)\}$ je k-ta diferencia funkcie $\{a(n)\}$ a $\Delta^i a(0)$, pre $i = 1, 2, \ldots, k$ sú hodnoty i-tych diferencií funkcie $\{a(n)\}$ v bode $n = 0$. Potom platí:*

$$s^k\{a(n)\} = \{\Delta^k a(n)\} + \Delta^{k-1}a(0) + s\Delta^{k-2}a(0) + \ldots + s^{k-1}a(0). \tag{5}$$

Dôkaz. Pre $k = 1$ vzorec platí (veta 4.1). Predpokladajme, že platí pre $k = l - 1$, dokážeme, že platí pre $k = l$. Počítajme:

$$s^l\{a(n)\} = s \cdot s^{l-1}\{a(n)\} = s[\{\Delta^{l-1}a(n)\} + \Delta^{l-2}a(0) + \ldots + s^{l-2}a(0)] =$$
$$= s\{\Delta^{l-1}a(n)\} + s\Delta^{l-2}a(0) + \ldots + s^{l-2}\Delta a(0) + s^{l-1}a(0) =$$
$$= \{\Delta\Delta^{l-1}a(n)\} + \Delta^{l-1}a(0) + s\Delta^{l-2}a(0) + \ldots + s^{l-1}a(0) =$$
$$= \{\Delta^l a(n)\} + \Delta^{l-1}a(0) + s\Delta^{l-2}a(0) + \ldots + s^{l-1}a(0).$$

Pre použitie vzťahu (5) na riešenie diferenčných rovníc je vhodné písať (5) v tvare:

$$\{\Delta^k a(n)\} = s^k\{a(n)\} - s^{k-1}a(0) - \ldots - \Delta^{k-1}a(0). \tag{6}$$

Vzťah (6) nám ukazuje, ako sa počítajú diferencie pomocou operátora s.

§ 5. Racionálne funkcie operátora s

Definícia 5.1. *Operátor $\alpha_k s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$, kde $\alpha_0, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}$ sú ľubovoľné čísla a $\alpha_k \neq 0$ budeme volať polynómom k-teho stupňa operátora s.*

Vzhľadom na platnosť asociatívneho, komutatívneho a distributívneho zákona sčítanie a násobenie takýchto polynómov v s robíme práve tak, ako príslušné operácie s polynómami v algebre. Napríklad: $s^4 - 1 = (s-1)(s^3 + s^2 + s + 1)$ atď. Špeciálne platí táto veta:

Veta 5.1. *Dva polynómy operátora s sú rovné vtedy a len vtedy, ak koeficienty pri rovnakých mocninách sú rovnaké. T. j.:*

$$\alpha_k s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \alpha_0 = \beta_k s^k + \beta_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0 \tag{7}$$

platí vtedy a len vtedy, ak:

$$\alpha_k = \beta_k; \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \ldots, \alpha_0 = \beta_0. \tag{8}$$

Dôkaz. Nech platí (7). Vynásobením (7) s l^{k+1} dostávame:

$$\alpha_k l + \alpha_{k-1}l^2 + \ldots + \alpha_0 l^{k+1} = \beta_k l + \beta_{k-1}l^2 + \ldots + \beta_0 l^{k+1},$$

$$\alpha_k + \alpha_{k-1}\{C_n^1\} + \ldots + \alpha_0\{C_n^k\} = \beta_k + \beta_{k-1}\{C_n^1\} + \ldots + \beta_0\{C_n^k\}.$$

Z tejto rovnosti vyplývajú vzhľadom na známu vetu z algebry vzťahy (8). Obrátený výrok je triviálny.

Definícia 5.2. *Operátor $\dfrac{\alpha_k s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \beta_0}$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ sú ľubovoľné čísla a $\beta_m s^m + \ldots + \beta_0 \neq 0$ budeme volať racionálnou funkciou operátora s.*

Dokážeme si ešte nasledujúcu vetu.

Veta 5.2. *Ak*

$$\frac{\alpha_k s^k + \ldots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \ldots + \beta_0} = \frac{\gamma_p s^p + \ldots + \gamma_0}{\delta_r s^r + \ldots + \delta_0}, \tag{9}$$

potom pre každé číslo ξ (reálne alebo komplexné), pri ktorom

$$\beta_m \xi^m + \ldots + \beta_0 \neq 0, \quad \delta_r \xi^r + \ldots + \delta_0 \neq 0, \tag{10}$$

platí rovnosť:

$$\frac{\alpha_k \xi^k + \ldots + \alpha_0}{\beta_m \xi^m + \ldots + \beta_0} = \frac{\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_0}{\delta_r \xi^r + \ldots + \delta_0}. \tag{11}$$

Dôkaz. Z rovnosti (9) vyplýva:

$$(\alpha_k s^k + \ldots + \alpha_0) \cdot (\delta_r s^r + \ldots + \delta_0) = (\gamma_p s^p + \ldots + \gamma_0) \cdot (\beta_m s^m + \ldots + \beta_0).$$

Ak roznásobíme, dostaneme na ľavej a pravej strane polynómy operátora s. Podľa predchádzajúcej vety majú pri rovnakých mocninách operátora s rovnaké koeficienty. Z toho vyplýva rovnosť:

$$(\alpha_k \xi^k + \ldots + \alpha_0) \cdot (\delta_r \xi^r + \ldots + \delta_0) = (\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_0) \cdot (\beta_m \xi^m + \ldots + \beta_0).$$

Vzhľadom na (10) môžeme obe strany vydeliť výrazom $(\delta_r \xi^r + \ldots + \delta_0)$. $(\beta_m \xi^m + \beta_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots + \beta_0) \neq 0$ a máme rovnosť (11), ktorú sme mali dokázať.

Každý racionálny výraz operátoru s $\dfrac{\alpha_k s^k + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_m s^m + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}$, $k < m$, kde $\alpha_k \neq 0$, $\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$; $\beta_m \neq 0$, $\beta_{m-1}, \ldots, \beta_1, \beta_0$ sú reálne čísla, dá sa rozložiť na čiastočné zlomky nasledujúcich typov:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}, \quad \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^p}, \quad \frac{s}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^p},$$

kde $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ sú reálne čísla a p prirodzené číslo.

Naším najbližším cieľom je ukázať, ktoré funkcie sú v zmysle našich definícií totožné s práve napísanými operátormi.

Prvý zásadný výsledok bude, že tieto operátory sú vôbec funkcie, t. j. padnú do množiny N. Pre praktické aplikácie (pri riešení diferenčných rovníc) je dôležité tieto funkcie nájsť.

Veta 5.3. *Nech a je komplexné číslo rôzne od -1 a k ľubovoľné prirodzené číslo. Potom platí:*

$$\frac{1}{(s-a)^k} = \{C_n^{k-1}(a+1)^{n-k+1}\}.$$

Dôkaz. Urobíme ho metódou úplnej indukcie. Dokážeme najprv, že veta platí pre $k = 1$.

Počítajme:

$$(s-a)\{(a+1)^n\} = s\{(a+1)^n\} - \{a(a+1)^n\} = 1 + \{(a+1)^{n+1}\} -$$
$$- \{a+1)^n\} - \{a(a+1)^n\} = 1 + \{(a+1)^n a\} - \{a(a+1)^n\} = 1.$$

Z toho vyplýva $\dfrac{1}{s-a} = \{(a+1)^n\}$. Teda veta platí pre $k = 1$. Predpokladajme, že veta platí pre prirodzené číslo $k = r$, t. j. je splnený vzťah:

$$\frac{1}{(s-a)^r} = \{C_n^{r-1}(a+1)^{n-r-1}\}.$$

Potom máme:

$$\frac{1}{(s-a)^{r+1}} = \frac{1}{(s-a)}\frac{1}{(s-a)^r} = \{(a+1)^n\}\{C_n^{r-1}(a+1)^{n-r+1}\} =$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}(a+1)^{n-i} \cdot C_{i-1}^{r-1}(a+1)^{i-r}\right\} = \left\{(a+1)^{n-r}\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}^{r-1}\right\} =$$
$$= \{(a+1)^{n-r}[0 + \ldots + C_{r-1}^{r-1} + C_r^{r-1} + \ldots + \tbinom{r-1}{n-1}]\} = \{(a+1)^{n-r}C_n^r\}.$$

Teda veta platí pre $k = r + 1$. Indukciou vyplýva, že veta platí pre každé prirodzené číslo k.

Doplnkom predošlej vety je

Veta 5.4. *Pre každé prirodzené číslo platí:*

$$\frac{1}{(s+1)^k} = \{I_{k-1}(n)\},$$

kde $\{I_{k-1}(n)\}$ *je funkcia definovaná takto:*

$$I_{k-1}(n) = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \neq k-1 \\ 1, & \text{pre } n = k-1. \end{cases}$$

Dôkaz. Urobíme ho metódou úplnej indukcie. Dokážme najprv, že platí pre $k = 1$. Počítajme $(s+1)\{I_0(n)\}$, kde $I_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

Máme: $(s+1)\{I_0(n)\} = s\{I_0(n)\} + \{I_0(n)\} = I_0(0) + \{I_0(n+1) - I_0(n)\} + I_0(n)\} = I_0(0) + \{I_0(n+1)\} = 1 + \{0\} = 1$. Teda pre $k = 1$ naša veta je správna. Predpokladajme, že platí pre prirodzené číslo $k = r$: $\frac{1}{(s+1)^r} = \{I_{r-1}(n)\}$. Dokážeme, že za tohto predpokladu platí aj pre prirodzené číslo $r + 1$. Skutočne:

$$\frac{1}{(s+1)^{r+1}} = \frac{1}{(s+1)^r} \cdot \frac{1}{(s+1)} = \{I_{r-1}(n)\}\{I_0(n)\} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n} I_{r-1}(n-i)\, I_0(i-1)\right\} = \{I_r(n)\},$$

pričom $I_r(n) = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \neq r \\ 1, & \text{pre } n = r \end{cases}$. Tým je veta dokázaná.

V ďalšom budeme potrebovať vyjadrenie tejto racionálnej funkcie operátora s:

$$K_\nu(\alpha, \beta, s) = \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

kde α, $\beta \neq 0$ sú reálná čísla.

Pomocná veta 1. *Pre rozklad na parciálne zlomky racionálnej lomenej funkcie* $K_\nu(\alpha, \beta, s)$ *platí:*

$$K_\nu(\alpha, \beta, s) = \frac{1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^\nu} = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{\bar{A}_k}{(x-\bar{a})^k}\right], \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

pričom $A_k = C_{2\nu-k-1}^{\nu-1} \frac{\mathrm{i}^{-k}}{(2\beta)^{2\nu-k}}$, $1 \leq k \leq \nu$, $\bar{A}_k$ *je komplexne združené k* A_k, $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\bar{a} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Dôkaz. Na základe známych vzťahov dostaneme pre $\nu = k$

$$A_k = \lim_{x=a}\left[\frac{(x-a)^\nu}{(x-a)^\nu (x-\bar{a})^\nu}\right] = \lim_{x=a}\frac{1}{(x-\bar{a})^\nu} = \frac{1}{(a-\bar{a})^\nu} = \frac{1}{(2\beta\mathrm{i})^\nu}.$$

Podobne pre $k < \nu$

$$A_k = \frac{1}{(\nu-k)!}\lim_{x=a}\frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}}\left[\frac{(x-a)^\nu}{(x-a)^\nu(x-\bar{a})^\nu}\right].$$

Po úprave dostaneme:

$$A_k = C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}\frac{\mathrm{i}^{-k}}{(2\beta)^{2\nu-k}}. \tag{12}$$

Vzťah (12) bol odvodený pre $k < \nu$, ale ako vidieť, platí aj pre $k = \nu$. Porovnaj s prvou časťou dôkazu. Tým je pomocná veta dokázaná.

Veta 5.5. *Nech* $K_\nu(\alpha, \beta, s) = \frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *kde* α, $\beta \neq 0$ *sú reálne čísla. Potom platí:*

$$K_\nu(\alpha, \beta, s) = \left\{2\sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1}\,\mathrm{Re}\,[A_k \,.\, (a+1)^{n-k+1}]\right\}.$$

Dôkaz. Z pomocnej vety 1 a z vety 5.3 vyplýva:

$$K_\nu(\alpha, \beta, s) = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{A_k}{(s-a)^k} + \frac{\bar{A}_k}{(s-\bar{a})^k}\right] =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1}[A_k \,.\, (a+1)^{n-k+1} + \bar{A}_k(\bar{a}+1)^{n-k+1}]\right\}.$$

Pritom sme použili ešte okolnosť, že $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \neq -1$. Pretože $\bar{A}_k(\bar{a}+1)^{n-k+1} = \overline{A_k(a+1)^{n-k+1}}$ a $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,[z]$ dostaneme ďalej:

$$K_\nu(\alpha, \beta, s) = \left\{\sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1}\, 2\,\mathrm{Re}\,[A_k(a+1)^{n-k+1}]\right\}.$$

Pre praktické účely je výhodné určiť reálnu časť súčinu $A_k \,.\, (a+1)^{n-k+1}$

$$\mathrm{Re}\,[A_k \,.\, (a+1)^{n-k+1}] = \mathrm{Re}\left[C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}\frac{1}{(2\beta)^{2\nu-k}}\mathrm{i}^{-k}\left(\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2}\right)^{n-k+1} . \right.$$
$$\left. .\cos[(n-k+1)\arg(a+1)] + \mathrm{i}\sin[(n-k+1)\arg(a+1)]\right].$$

Z toho vyplýva

$$\mathrm{Re}\,[A_k(a+1)^{n-k+1}] =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}}{(2\beta)^{2\nu-k}} \,.\, |a+1|^{n-k+1}\cos[(n-k+1)\arg(a+1)], & \text{pre } k \text{ párne} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}}{(2\beta)^{2\nu-k}}|a+1|^{n-k+1}\sin[(u-k+1)\arg(a+1)], & \text{pre } k \text{ nepárne,} \end{cases}$$

kde $|a+1| = \sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}$.

Špeciálne prípady, ktoré sa vyskytujú pri praktickom počítaní.

1. Ak $\alpha + 1 > 0$, $\beta > 0$, pre $\nu = 1, 2, 3, 4$ dostaneme:

$$K_1(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{1}{\beta} \mid a + 1 \mid^n \sin n\varphi\right\}.$$

$$K_2(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2\beta^3} \mid a + 1 \mid^n \sin n\varphi - \frac{1}{2\beta^2} n \mid a + 1 \mid^{n-1} \cos (n - 1)\varphi\right\}.$$

$$K_3(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{3}{8\beta^5} \mid a + 1 \mid^n \sin n\varphi - \frac{3}{8\beta^4} n \mid a + 1 \mid^{n-1} \cos (n - 1)\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8\beta^3} n(n - 1) \mid a + 1 \mid^{n-2} \sin (n - 2)\varphi\right\}.$$

$$K_4(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{5}{16\beta^7} \mid a + 1 \mid^n \sin n\varphi - \frac{5}{16\beta^6} n \mid a + 1 \mid^{n-1} \cos (n - 1)\varphi - \right.$$
$$- \frac{1}{4\beta^5} n(n - 1) \mid a + 1 \mid^{n-2} \sin (n - 2)\varphi +$$
$$\left. + \frac{1}{8\beta^4} n(n - 1)(n - 2 \mid a + 1 \mid^{n-3} \cos (n - 3)\varphi\right\},$$

kde $\mid a + 1 \mid = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}$ a $\varphi = \arg (a + 1)$.

2. Ak $\alpha = 0$ a $\beta > 0$, potom $a + 1 = 1 + \beta i$. Označme $1 + \beta i = c$. Pre $\nu = 1, 2, 3, 4$ sú vzorce ako v 1, len miesto $\mid a + 1 \mid$ píšeme $\mid c \mid$ a miesto φ budeme písať ψ, pričom $\psi = \arg c$.

3. Ak $\alpha = -1$ a $\beta > 0$, potom $a + 1 = \beta i$, $\mid a + 1 \mid = \beta$, a $\arg (a + 1) = \frac{\pi}{2}$; pre $\nu = 1, 2, 3, 4$ dostávame:

$$K_1(-1, \beta, s) = \left\{\beta^{n-1} \sin n\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$K_2(-1, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2}\beta^{n-3}(1 - n) \sin n\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$K_3(-1, \beta, s) = \left\{\frac{1}{8}\beta^{n-5}(n^2 - 4n + 3) \sin n\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$K_4(-1, \beta, s) = \left\{\frac{1}{8}\beta^{n-7}\left(\frac{5}{2} - \frac{23}{6}n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{n^3}{6}\right) \sin n\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Poznámka 1. Keď chceme nahradiť súčty a rozdiely argumentov násobkami argumentov sínusu a kosínusu, môžeme použiť známe vzorce z trigonometrie pre viacnásobné uhly. Uvedieme vzorce aspoň pre prípad, keď $\alpha = 0$.

Položme $\cos (\operatorname{arctg} \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \lambda$ a $\sin (\operatorname{arctg} \beta) = \beta\lambda$, potom dostaneme:

$$\sin [(k - 1) \operatorname{arctg} \beta] = \lambda^{k-1} \sum_{j=0}^{l} C_{k-1}^{2j+1} \beta^{2j+1} (-1)^j = \lambda^{k-1} P_{k-1}(\beta),$$

pričom $l = \frac{k-2}{2}$, pre k párne; $l = \frac{k-3}{2}$, pre k nepárne.

$$\cos [(k - 1) \operatorname{arctg} \beta] = \lambda^{k-1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j C_{k-1}^{2j} \beta^{2j} = \lambda^{k-1} Q_{k-1}(\beta),$$

kde $l = \frac{k-2}{2}$ pre k párne; $l = \frac{k-1}{2}$ pre k nepárne.

Vyšetrime teraz túto racionálnu funkciu:

$$Q_\nu(\alpha, \beta, s) = \frac{s}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{kde } \alpha, \beta \neq 0$$

sú reálne čísla. Za tým účelom uveďme nasledujúcu pomocnú vetu.

Pomocná veta 2. *Pre rozklad na parciálne zlomky racionálnej lomenej funkcie* $Q_\nu(\alpha, \beta, s)$ *platí:*

$$Q_\nu(\alpha, \beta, s) = \sum_{k=1}^{\nu} \left[\frac{M_k}{(x - a)^k} + \frac{\overline{M}_k}{(x - \overline{a})^k}\right], \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$M_k = C_{2\nu-k-1}^{\nu-1} \frac{i^{-k}}{(2\beta)^{2\nu-k}} (\alpha + \delta i), \quad \text{pre } 1 \leq k \leq \nu,$$

kde

$$\delta = \begin{cases} \frac{k-1}{2\nu - k - 1}\beta, & \text{pre } 1 \leq k < \nu; \quad \nu = 2, 3, \ldots \\ \beta, & \text{pre } k = \nu; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

a $\overline{M}_k$ *je združené komplexné číslo k* M_k, $a = \alpha + i\beta$, $\overline{a} = \alpha - i\beta$.

Dôkaz. Na základe známych vzťahov dostaneme pre $\nu = k$:

$$M_k = \lim_{x=a} \left[\frac{(x - a)^\nu x}{(x - a)^\nu (x - \overline{a})^\nu}\right] = \lim_{x=a} \frac{x}{(x - \overline{a})^\nu} =$$
$$= \frac{a}{(a - \overline{a})^\nu} = \frac{\alpha + \beta i}{(2\beta i)^\nu}. \tag{13}$$

Podobne pre $k < \nu$

$$M_k = \frac{1}{(\nu - k)!} \lim_{x=a} \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \left[\frac{(x - a)^\nu x}{(x - a)(x - \overline{a})^\nu}\right].$$

Po úprave dostaneme

$$M_k = C_{2\nu-k-1}^{\nu-1} \frac{i^{-k}}{(2\beta)^{2\nu-k}} \left[\alpha + \frac{(k - 1)}{2\nu - k - 1}\beta i\right]. \tag{14}$$

Ako vidieť, (13) a (14) možno spojiť v jediný vzťah

$$M_k = C_{2\nu-k-1}^{\nu-1} \frac{i^{-k}}{(2\beta)^{2\nu-k}} [\alpha + \delta i], \quad \text{pre } 1 \leq k \leq \nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

pričom

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{(k-1)}{2\nu - k - 1}\beta, & \text{pre } 1 \le k < \nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots \\ \beta, & \text{pre } k = \nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Označme $b_{\nu,k} = \alpha + \delta i$. Potom môžeme vysloviť túto vetu

Veta 5.6. *Nech* $Q_\nu(\alpha, \beta, s) = \dfrac{s}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *a* $\alpha, \beta \neq 0$ *sú reálne čísla, potom platí:*

$$Q_\nu(\alpha, \beta, s) = \left\{2 \sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1} \operatorname{Re}[M_k(a+1)^{n-k+1}\right\}.$$

Dôkaz. Z pomocnej vety 2. a vety 5.3 vyplýva:

$$Q_\nu(\alpha, \beta, s) = \sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{M_k}{(s-a)^k} + \frac{\overline{M}_k}{(s-\overline{a})^k}\right] = \left\{\sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1}[M_k(a+1)^{n-k+1} + \right.$$

$$\left. + \overline{M}_k(\overline{a}+1)^{n-k+1}]\right\} = \left\{2\sum_{k=1}^{\nu} C_n^{k-1} \operatorname{Re}[M_k \cdot (a+1)^{n-k+1}]\right\}.$$

Tým je veta dokázaná.

Počítajme ešte, čomu sa rovná:

$$\operatorname{Re}[M_k(a+1)^{n-k+1}] = \operatorname{Re}\left[C_{2\nu-k-1}^{\nu-1} \cdot \frac{1}{(2\beta)^{2\nu-k}} \cdot i^{-k} \cdot b_{\nu,k}(a+1)^{n-k+1}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}\frac{1}{(2\beta)^{2\nu-k}}|b_{\nu,k}| \cdot |a+1|^{n-k+1} i^{-k} \cdot\right.$$

$$\cdot [\cos\arg b_{\nu,k} + i\sin\arg b_{\nu,k}] \cdot [\cos[(n-k+1)\arg(a+1)] +$$

$$\left. + i\sin[(n-k+1)\arg(a+1)]]\right].$$

Z toho vyplýva

$$\operatorname{Re}[M_k(a+1)^{n-k+1}] =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}}{(2\beta)^{2\nu-k}}|b_{\nu,k}| \cdot |a+1|^{n-k+1}\cos[\arg b_{\nu,k} + (n-k+1)\arg(a+1)], & \text{pre } k \text{ párne} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{C_{2\nu-k-1}^{\nu-1}}{(2\beta)^{2\nu-k}}|b_{\nu,k}| \cdot |a+1|^{n-k+1}\sin[\arg b_{\nu,k} + (n-k+1)\arg(a+1)], & \text{pre } k \text{ nepárne} \end{cases}$$

Kde $|b_{\nu,k}| = \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}$. Uveďme si niektoré špeciálne prípady, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

1. Ak $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pre $\nu = 1, 2, 3, 4$ máme:

$$Q_1(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{1}{\beta}\varrho_{1,1}\varrho^n \sin(\psi_{1,1} + n\varphi)\right\},$$

$$Q_2(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{\varrho^{n-1}}{2\beta^2}\left[\varrho_{2,1}\varrho\frac{1}{\beta}\sin(\psi_{2,1} + n\varphi) - n\varrho_{2,2}\cos[\psi_{2,2} + (n-1)\varphi)]\right]\right\},$$

$$Q_3(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2^3\beta^3}\varrho^{n-2}\left[\frac{3}{\beta^2}\varrho_{3,1}\varrho^2\sin(\psi_{3,1} + n\varphi) - \frac{3n}{\beta}\varrho_{3,2}\varrho\cos[\psi_{3,2} + (n-1)\varphi] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - n(n-1)\varrho_{3,3}\sin[\psi_{3,3} + (n-2)\varphi]\right]\right\},$$

$$Q_4(\alpha, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2^4\beta^4}\varrho^{n-3}\left[\frac{5}{\beta^3}\varrho_{4,1}\varrho^3\sin(\psi_{4,1} + n\varphi) - \frac{n5}{\beta^2}\varrho_{4,2}\varrho^2\cos[\psi_{4,2} + (n-1)\varphi] - \right.\right.$$

$$- \frac{2}{3}n(n-1)\varrho_{4,3}\varrho\sin[\psi_{4,3} + (n-2)\varphi] +$$

$$\left.\left. + (n-1)n(n-2)\varrho_{4,4}\sin[\psi_{4,4} + (n-3)\varphi]\right]\right\}.$$

Kde $\varrho_{\nu,k}$ je absolútna hodnota, $\psi_{\nu,k}$ argument komplexného čísla

$$b_{\nu,k} = \begin{cases} \alpha + i\dfrac{(k-1)\beta}{2\nu - k - 1}, & \text{pre } 1 \le k < \nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots \\ \alpha + i\beta, & \text{pre } \nu = k, \quad \nu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

a ϱ absolútna hodnota, φ argument komplexného čísla $a + 1$, pričom

$$a = \alpha + \beta i.$$

2. Ak $\alpha = -1$ a $\beta > 0$, potom $a + 1 = \beta i$ a $|a + 1| = \beta$ a $\arg(a + 1) = \dfrac{\pi}{2}$. Ďalej $b_{\nu,k} = C_{\nu,k}$, ktoré je definované takto:

$$C_{\nu,k} = \begin{cases} -1 + i\dfrac{(k-1)}{2\nu - k - 1}\beta, & \text{pre } 1 \le k < \nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots \\ -1 + i\beta, & \text{pre } \nu = k, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Označme absolútnu hodnotu $C_{\nu,k}$ znakom $\lambda_{\nu,k}$ a argument $C_{\nu,k}$ znakom $\gamma_{\nu,k}$. Potom pre $\nu = 1, 2, 3, 4$ dostávame vzorce ako v 1, len miesto $\varrho_{\nu,k}$, ϱ, $\psi_{\nu,k}$ a miesto φ kladieme po poradí $\lambda_{\nu,k}$, β, $\gamma_{\nu,k}$ a $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Ak $\alpha = 0$, $\beta > 0$, potom pre $\nu = 1, 2, 3, 4$, dostaneme:

$$Q_1(0, \beta, s) = \{\mu^n \sin n\vartheta\}.$$

$$Q_2(0, \beta, s) = \left\{-n\frac{1}{4\beta^3}\mu^{n-1}\sin(n-1)\vartheta\right\}.$$

$$Q_3(0, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2^3\beta^2}\mu^{n-2}n\left[\frac{1}{\beta}\mu\sin(n-1)\vartheta - (n-1)\cos(n-2)\vartheta\right]\right\},$$

$$Q_4(0, \beta, s) = \left\{\frac{1}{2^4\beta^3}\mu^3 n\left[\frac{1}{\beta^2}\mu^2\sin(n-1)\vartheta - (n-1)\frac{1}{\beta}\mu\cos(n-2)\vartheta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (n-1)(n-2)\frac{1}{3}\sin(n-3)\vartheta\right]\right\}.$$

kde ϑ je argument a μ absolútna hodnota komplexného čísla $1 + \beta i$.

§ 6. Riešenie lineárnych diferenčných rovníc

Operátorový počet dáva pohodlné spôsoby riešenia lineárnych diferenčných rovníc. V prípade obyčajných diferenčných rovníc použitie operátorového počtu má niektoré prednosti v porovnaní s klasickými metódami: netreba špeciálne teórie, prevedú sa na obyčajné algebrické rovnice v homogénnom i v nehomogénnom prípade.

Nech

$$\alpha_k \Delta^k x + \alpha_{k-1} \Delta^{k-1} x + \ldots + \alpha_0 x = f \tag{15}$$

je lineárna diferenčná rovnica k-teho rádu s konštantnými koeficientmi; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0$ sú dané čísla a f je daná funkcia. Je známa táto veta (tzv. existenčná teréma):

Veta 6.1. *Nech $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{k-1}$ je k daných reálnych čísel. Potom existuje jedna jediná reálna funkcia $\{x(n)\}$, ktorá splňuje rovnicu (15) a týchto k podmienok:* $x(0) = \gamma_0$, $\Delta x(0) = \gamma_1, \ldots, \Delta^{k-1} x(0) = \gamma_{k-1}$.

Podrobný dôkaz vety čitateľ môže nájsť v [4].

Hľadajme riešenie rovnice (15), ktoré vyhovuje podmienkam uvedeným v citovanej vete. Ak použijeme vzťahu (6) z § 4, t. j. $\Delta^k x = s^k x - s^{k-1} x(0) - s^{k-2} \Delta x(0) - \ldots - \Delta^{k-1} x(0)$, potom (15) sa dá písať takto: $\alpha k s^k x + \alpha_{k-1} s^{k-1} x + \ldots + \alpha_0 x = \beta_{k-1} s^{k-1} + \ldots + \beta_0 + f$, kde

$$\beta_\nu = \alpha_{\nu+1}\gamma_0 + \alpha_{\nu+2}\gamma_1 + \ldots + \alpha_k \gamma_{k-\nu-1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad k-1.$$

Odtiaľ ihneď dostaneme:

$$x = \frac{\beta_{k-1} s^{k-1} + \ldots + \beta_0}{\alpha_k s^k + \ldots + \alpha_0} + \frac{f}{\alpha_k s^k + \ldots + \alpha_0}. \tag{16}$$

Aby sme získali riešenie v obyčajnom tvare, musíme nájsť funkciu $x(n)$, ktorá sa rovná operátoru na pravej strane. Za vhodných predpokladov o funkcii f, najmä ak f je polynóm, alebo racionálna funkcia, vieme to jednoducho urobiť. Ak f je racionálna funkcia, môžeme totiž použiť rozklad na čiastočné zlomky a vzťahy odvodené v predchádzajúcom paragrafe. Vo všeobecnom prípade treba, pravda, použiť definíciu súčinu dvoch operátorov, ktoré sú funkciami.

Úplne analogickým spôsobom možno riešiť systémy lineárnych diferenčných rovníc s konštantnými koeficientmi. Keďže každý lineárny systém možno previesť na systém diferenčných rovníc prvého rádu, stačí nám zaoberať sa týmto systémom:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 + \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1,m} x_m &= f_1 \\
\Delta x_2 + \alpha_{21} x_1 + \ldots + \alpha_{2,m} x_m &= f_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta x_m + \alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{m,m} x_m &= f_m,
\end{aligned} \tag{17}$$

kde α_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots m$, sú konštanty a f_i, $i = 1, 2, \ldots m$ sú dané funkcie. Existenčná teoréma pre takýto systém hovorí, že existuje jedno jediné riešenie sústavy (17), ktoré vyhovuje týmto počiatočným podmienkam:

$$x_1(0) = \gamma_1, \quad x_2(0) = \gamma_2, \ldots, \quad x_m(0) = \gamma_m. \tag{18}$$

Ak použijeme vzťah z vety 4.1 $\Delta x = sx - x(0)$, potom z (17) dostaneme:

$$\begin{aligned}
(\alpha_{11} + s)\, x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1m} x_n &= \gamma_1 + f_1 \\
\alpha_{21} x_1 + (\alpha_{22} + s)\, x_2 + \ldots + \alpha_{2m} x_m &= \gamma_2 + f_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + (\alpha_{m,m} + s)\, x_m &= \gamma_m + f_m.
\end{aligned} \tag{19}$$

Keď rozriešime túto sústavu vzhľadom na x_i, tým dostaneme x_i ako funkciu operátora s. Poznamenajme ešte, že determinant sústavy (19) nemôže byť identicky rovný nule, lebo koeficient pri s^m je v každom prípade rovný jednej. Ďalší postup je zrejmý a objasníme si ho na príkladoch.

Príklad 6.1. Nájdime to riešenie diferenčnej rovnice

$$\Delta^2 x - 5\Delta x + 6x = 0,$$

ktoré splňuje podmienky:

$$x(0) = 1, \quad \Delta x(0) = 0.$$

Poznámka 1. Keby sme dôsledne používali predošlú symboliku, mali by sme písať $\{\Delta^2 x(n)\} - 5\{\Delta x(n)\} + 6\{x(n)\} = \{0\}$, pretože tak pravá, ako aj ľavá strana rovnice sú funkcie. Aby čitateľ správne používal operátorový počet, keď diferenčná rovnica je daná v obyčajnej symbolike, budeme spočiatku úmyselne používať uvedenú symboliku. Neskôršie pri riešení diferenčnej rovnice použijeme hneď operátorovú symboliku.

Riešenie. Vzhľadom na počiatočné podmienky máme: $\Delta^2 x = s^2 x - s$ a $\Delta x = sx - 1$. Daná rovnica prejde do tvaru: $s^2 x - s - 5sx + 5 + 6x = 0$. Odtiaľ pomocou vety 5.3 dostávame:

$$x = \frac{s-5}{(s-2)(s-3)} = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-3} = \{3 \,.\, 3^n - 2 \,.\, 4^n\}.$$

Príklad 6.2. Nájdime riešenie diferenčnej rovnice $\Delta^2 x - \Delta x - 2x = 0$, ktoré splňuje podmienky: $x(0) = \gamma_0$; $\Delta x(0) = \gamma_1$.

Riešenie. Po úpravách vzhľadom na počiatočné podmienky máme: $s^2 x - sx - 2x = s\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_0$. Odtiaľ pomocou vety 5.3 a 5.4 máme:

$$x = \frac{2\gamma_0 - \gamma_1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{\gamma_1 + \gamma_0}{3} \frac{1}{s-2} = \left\{ \frac{2\gamma_0 - \gamma_1}{3} I(n) + \frac{\gamma_1 + \gamma_0}{3} 3^n \right\}.$$

Príklad 6.3. Nájdime riešenie diferenčnej rovnice $\{x(n+1)\} - \{x(n)\} = \{n\}$, ktoré splňuje podmienku $x(0) = 1$.

Riešenie. Ak vezmeme do úvahy podmienku, použijeme vetu 4.1 a urobíme úpravu, dostaneme:

$$\{\Delta x(n)\} = \{n\}, \quad \Delta x = n, \quad sx - 1 = n.$$

Odtiaľ pomocou vety 5.3 máme toto riešenie:

$$x = \frac{1}{s} + \frac{n}{s} = \left\{1 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right\}.$$

Príklad 6.4. Nájdime riešenie diferenčnej rovnice druhého rádu

$$\Delta^2 x - 2\Delta x + 5x = 0,$$

ktoré splňuje podmienky:

$$x(0) = 0, \quad \Delta x(0) = 1.$$

Riešenie. Vzhľadom na počiatočné podmienky a vetu 4.1 máme:

$$s^2 x - 1 - 2sx + 5x = 0.$$

Odtiaľ ineď podľa špeciálneho prípadu 1 za vetou 5.5 máme:

$$x = \frac{1}{(s-1)^2 + 2^2} = \left\{\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Príklad 6.5. Nájdime riešenie rovnice

$$\Delta^2 x - 4\Delta x + 13x = f,$$

kde

$$f = \left\{\frac{1}{3}(3\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}\right\},$$

ktoré splňuje počiatočné podmienky $\Delta x(0) = x(0) = 0$.

Riešenie. Vzhľadom na počiatočné podmienky dostaneme:

$$s^2 x - 4sx + 13x = \frac{1}{(s-2)^2 + 3^2}.$$

Odtiaľ ak použijeme špeciálny prípad za vetou 5.5 pre $\nu = 2$, máme riešenie v nasledujúcom tvare:

$$x = \frac{1}{[(s-2)^2 + 3^2]^2} = \left\{\frac{1}{54}(3\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{18} n (3\sqrt{2})^{n-1} \cos (n-1)\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Príklad 6.6. Nájdime také riešenie diferenčnej rovnice

$$\Delta^2 x - 5\Delta x + 6x = 5^n,$$

ktoré splňuje tieto počiatočné podmienky:

$$\Delta x(0) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Riešenie. Keď použijeme vetu 4.1 a počiatočné podmienky, dostaneme

$$x = \frac{s-5}{(s-2)(s-3)} + \frac{5^n}{(s-3)(s-2)}.$$

Určíme, čomu sa rovná

$$\frac{5^n}{(s-2)(s-3)}.$$

Za tým účelom počítajme

$$\frac{5^n}{(s-3)(s-2)} = \{5^n\} . \{4^n - 3^n\} = \{5^n\}\{4^n\} - \{5^n\} . \{3^n\}.$$

Počítajme ešte

$$\{5^n\} . \{4^n\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} 5^{n-i} 4^{i-1}\right\} = \left\{5^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}\right\} =$$
$$= \left\{5^{n-1} . \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}}\right\} = \{5^n - 4^n\},$$

potom

$$\frac{5^n}{(s-3)(s-2)} = \left\{\frac{5^n}{2} - 4^n + \frac{3^n}{2}\right\}.$$

Podľa známych viet vieme, že

$$\frac{s-5}{(s-2)(s-3)} = \{3 . 3^n - 2 . 4^n\}.$$

Potom hľadané riešenie má tento tvar:

$$x = \left\{\frac{1}{2} 5^n - 3 . 4^n + \frac{7}{2} 3^n\right\}.$$

Poznámka 2. Ak na pravej strane diferenčnej rovnice je exponenciálna funkcia, možno v každom prípade použiť podobný obrat, aký sme robili vyššie, pretože sumácia vedie na konečný geometrický rad.

Príklad 6.7. Nájdime riešenie tejto diferenčnej rovnice:

$$\Delta^2 x - 5\Delta x + 6x = 5\,e^{4n},$$

ktoré vyhovuje podmienkam:

$$\Delta x(0) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Riešenie. Podľa predošlého príkladu môžeme ihneď napísať nasledujúce:

$$x = \frac{s-5}{(s-2)(s-3)} + \frac{5 . e^{4n}}{(s-2)(s-3)}.$$

Ak použijeme rozklad na parciálne zlomky a vetu 5.3, dostanem riešenie v tomto tvare:

$$x = \left\{3^n \frac{3e^4 - 4}{e^4 - 3} - 4^n \frac{2e^4 - 3}{e^4 - 4} + 5e^{4n} \frac{1}{e^8 - 7e^4 + 12}\right\}.$$

Poznámka 3. Na tento tvar sa dajú previesť tie diferenčné rovnice, ktoré majú na pravej strane funkciu tvaru $\sin \alpha n$, $\cos \alpha n$, $P(n) \sin \alpha n$, $Q(n) \cos \alpha n$, kde $P(n)$, $Q(n)$ sú polynómy alebo exponenciálne funkcie.

Príklad 6.8. Nájdime riešenie tohto systému diferenčných rovníc:

$$\begin{aligned} \Delta x &= y - z, \\ \Delta y &= x + y, \\ \Delta z &= x + z, \end{aligned}$$

ktoré splňuje podmienky $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$, $z(0) = \gamma$, kde α, β, γ sú vopred dané konštanty.

Riešenie. Ak použijeme vetu 4.1 a počiatočné podmienky, naša sústava diferenčných rovníc prejde do tvaru:

$$\begin{aligned} sx - y + z &= \alpha, \\ -x + (s - 1)\, y &= \beta, \\ -x + (s - 1)\, z &= \gamma. \end{aligned}$$

Odtiaľto môžeme vypočítať funkcie x, y, z ako funkcie operátora s a počiatočných podmienok takto:

$$x = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{s} + \frac{-\gamma + \beta}{s - 1} = \{(\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - \gamma)\, 2^n\}.$$

$$y = \frac{-\alpha - \gamma + \beta}{s} + \frac{\gamma + \alpha}{s - 1} + \frac{-\gamma + \beta}{(s - 1)^2} =$$

$$= \{(\alpha - \gamma + \beta) + (\gamma + \alpha)\, 2^r + (-\gamma + \beta)\, n 2^{n-1}\}.$$

$$z = \frac{-\alpha - \gamma + \beta}{s} + \frac{2\gamma + \alpha - \beta}{s - 1} + \frac{\beta - \gamma}{(s - 1)^2} =$$

$$= \{(-\alpha - \gamma + \beta) + (2\gamma + \alpha - \beta)\, 2^n + (\beta - \gamma)\, n 2^{n-1}\}.$$

V predchádzajúcich príkladoch sme vždy mali počiatočné podmienky v bode $n = 0$. Pre tento prípad je operátorový počet zvlášť výhodný. Ak hodnota n_0, pre ktorú sú dané počiatočné podmienky, je rôzna od nuly, postupujeme takto: Riešime úlohu spočiatku tak, ako by boli počiatočné podmienky dané pre hodnotu $n_0 = 0$ a potom zavedieme vo výsledku príslušnú transformáciu $m = n - n_0$. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade.

Príklad 6.9. Nájdime to riešenie diferenčnej rovnice:

$$\Delta^3 x - 6\Delta^2 x + 11\Delta x - 6x = f,$$

kde

$$\{f(n)\} = \{5^n\},$$

ktoré splňuje podmienky

$$x(3) = \Delta x(3) = \Delta^2 x(3) = 0.$$

Riešenie. Spravme transformáciu $n = m + 3$ a položme $\{x(m + 3)\} = \{x_1(m)\}$. Napíšme najskôr riešenie rovnice $\Delta^3 x_1 - 6\Delta^2 x_1 + 11\Delta x_1 - 6x_1 = f(m + 3)$ ktoré vyhovuje podmienkam $x_1(0) = \Delta x_1(0) = \Delta^2 x_1(0) = 0$. Potom máme operátorovú rovnicu v nasledujúcom tvare:

$$s^3 x_1 - 6s^2 x_1 + 11 s x_1 - 6x_1 = \{5^{m+3}\}.$$

Odtiaľ (použitím známych viet) hľadaný výsledok má tento tvar:

$$x_1 = \left[\frac{1}{2(s - 1)} - \frac{1}{s - 2} + \frac{1}{2(s - 3)}\right] \cdot \{5^{m+3}\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2} 2^m - 3^m + \frac{1}{2} 4^m\right\} \cdot \{5^{m+3}\} = \left\{\sum_{i=1}^{m} 5^{m+1-i} \left(\frac{1}{2} 2^{i-1} - 3^{i-1} + \frac{1}{2} 4^{i-1}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{5^3}{2}\left[\frac{5^m}{3} - \frac{2^m}{3} + 3^m - 4^m\right]\right\}.$$

Aby sme našli hľadané riešenie pôvodnej diferenčnej rovnice, musíme vykonať transformáciu $m = n - 3$. Potom dostaneme:

$$\{x(n)\} = \left\{\frac{5^3}{2}\left[\frac{5^{n-3}}{3} - \frac{2^{n-3}}{3} + 3^{n-3} - 4^{n-3}\right]\right\},$$

čo je hľadané riešenie.

Videli sme, že riešenie (16) rovnice (15) obsahuje β_ν, $\nu = 0, 1, \ldots n - 1$, ktoré sú funkciami koeficientov rovnice (15), počiatočných podmienok a nadobúdajú určité hodnoty, ak sú dané určité počiatočné podmienky. Ak počiatočné podmienky sú všeobecne dané, potom β_ν, $\nu = 0, 1, \ldots n - 1$ sú všeobecné konštanty.

Našu metódu možno použiť na rôzne krajové podmienky, ak za príslušných podmienok riešenie existuje.

Príklad 6.10. Nájdime to riešenie diferenčnej rovnice

$$\Delta^3 x - 6\Delta^2 x + 11\Delta x - 6x = f, \qquad f = \{5^n\} \tag{20}$$

ktoré splňuje tieto krajové podmienky:

$$x(0) = 4\frac{1}{6}, \qquad x(1) = 11\frac{5}{6}, \qquad x(2) = 37\frac{1}{6}.$$

Riešenie. Za tým účelom riešme najskôr rovnicu (20) s týmito podmienkami: $x(0) = \alpha$, $\Delta x(0) = \beta$, $\Delta^2 x(0) = \gamma$, kde α, β, γ sú konštanty. Riešenie rovnice 20 s týmito podmienkami bude:

$$x = \left\{\frac{1}{6} 5^n + C_1 2^n + C_2 3^n + C_3 4^n\right\},$$

kde

$$C_1 = 3\alpha - \frac{5}{2}\beta + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2},$$

$$C_2 = -3\alpha + 4\beta - \gamma + \frac{1}{2},$$

$$C_3 = -\frac{3}{2}\beta + \alpha + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}.$$

Ak chceme nájsť riešenie (20), ktoré splňuje krajové podmienky, musíme určiť konštanty C_1, C_2, C_3 z nasledujúceho systému rovníc:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 4,$$
$$2C_1 + 3C_2 + 4C_3 = 11,$$
$$4C_1 + 9C_2 + 16C_3 = 33.$$

Riešením tohto systému sú: $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 - 1$. Teda riešenie (20) má tvar

$$x = \left\{\frac{1}{6} 5^n + 2 \,.\, 2^n + 3^n + 4^n\right\}.$$

Poznámka. V niektorých prípadoch sa môže stať, že systém rovníc pre konštanty $C_1, C_2, \ldots$ je neriešiteľný. Potom neexistuje rišenie pri daných krajových podmienkach.

LITERATÚRA

[1] J. G. Mikusiński, Sur les fondaments du calcul opératoire. Studia Mathematica 11 (1950), 41—70.
[2] J. G. Mikusiński, Rachunek operatorów, Warszawa.
[3] Vl. Kořínek, Základy algebry, Praha 1953.
[4] N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin 1924.

Došlo 6. 6. 1958.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

ЙОЗЕФ ЭЛИАШ

Выводы

В работах [1] и [2] дал Й. Микусиньски новое алгебраическое обоснование операторного исчисления. Настоящая работа показивает, что аналогичный метод можно построить и для решения уравнений в конечных разностях. В §-ах 1—5 дано определение

операторов и алгебраических операции над операторами и исследованы некоторые их свойства. Результаты этих §-ов используются в §. 6 для решения уравнений в конечных разностях.

ÜBER EINE OPERATORENMETHODE BEI DEN DIFFERENZENGLEICHUNGEN

JOZEF ELIÁŠ

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] und [2] gibt J. Mikusiński eine neue algebraische Begründung der Operatorenrechnung. Vorliegende Arbeit zeigt, daß man eine ähnliche Operatorenmethode für die Differenzengleichungen benützen kann. In der vorliegenden Arbeit wird eine ähnliche Operatorenmethode für Differenzengleichungen aufgebaut. In den Paragraphen 1—5 werden die Operatoren, einige algebraische Operatorenverknüpfungen definiert und einige ihre Eigenschaften beschrieben. Die Ergebnisse dieser Paragraphen werden im Paragraph 6 bei der Lösung der Differenzengleichungen benüzt.