MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VIII, 4 — 1958

O REŤAZCOCH V BOOLOVÝCH ALGEBRÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

Pripomeňme najprv niektoré názvy a označenia, ktoré ďalej používame. Nech S je sväz (čiastočné usporiadanie a sväzové operácie v S označujeme $\leq$, $\cap$, $\cup$). Ak $a, b \in S$, $a < b$, označíme znakom $R(a, b)$ (prípadne s indexmi) reťazec vo sväze S, majúci najmenší prvok a a najväčší prvok b. Hovoríme, že reťazec $R(a, b)$ je maximálny, keď platí: ak je prvok $c \in S$ porovnateľný so všetkými prvkami reťazca $R(a, b)$ a ak je $a < c < b$, potom $c \in R(a, b)$.

Budeme vyšetrovať nasledujúcu (tzv. Jordan—Dedekindovu) podmienku pre sväz S:

(JD) *Ak $a, b \in S$, $a < b$ a ak $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ sú maximálne reťazce, sú kardinálne čísla množín $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ rovnaké.*

Je známe, že konečné distributívne sväzy splňujú podmienku (JD) (pozri [1]). R. Croisot a G. Szász dokázali, že podmienka (JD) je splnená aj v semimodulárnych sväzoch, v ktorých každý ohraničený reťazec je konečný ([2], [3]). Ak existujú ohraničené nekonečné reťazce v S, je situácia podstatne odlišná: v práci [4] uviedol G. Szász príklad nekonečného distributívneho sväzu, nesplňujúceho podmienku (JD); v práci [5] sa dokazuje existencia úplne distributívnych úplných sväzov, ktoré nesplňujú podmienku (JD) a v poznámke [6] je dokázané, že žiadna úplne distributívna a úplná Boolova algebra nesplňuje podmienku (JD). Určitá podmienka, blízka podmienke (JD), vyšetruje sa v práci G. Grätzera a E. T. Schmidta [7]; ich podmienka sa týka tiež „medzier" v raťazci R a pritom pojem maximálnosti definujú iným spôsobom, ako bolo uvedené vyššie.

Táto poznámka nadväzuje na článok [5] a jej cieľom je dokázať pre Boolove algebry tvrdenie do istej miery analogické tvrdeniu vety dokázanej v [5] pre distributívne sväzy.

Nech S_1 je sväz, ktorý má najmenší prvok 0 a najväčší prvok 1 ($0 \neq 1$), nech $R = R(0, 1)$ je maximálny reťazec v S_1. Predpokladajme, že reťazec R je v sebe hustý, t. j. že platí: ak $x, y \in R$, $x < y$, existuje prvok $z \in R$ taký, že $x < z < y$. Nech M je ľubovoľná neprázdna množina. Nech $S(M)$ je množina všetkých funkcií definovaných na M, ktorých funkčné hodnoty patria do S_1. Množinu $S(M)$ považujeme za čiastočne usporiadanú reláciou $\leq$ tak, e kladieme $f \leq g(f, g \in S(M))$, ak je pre každé $x \in M$ $f(x) \leq g(x)$. Potom $S(M)$ je sväz.

Nech $x \in S_1$. Funkciu $f \in S(M)$ splňujúcu podmienku

$$i \in m \Rightarrow f(i) = x$$

označme f_x.

Nasledujúce lemmy 1, 2, 3 sú zovšeobecnením lemm 1, 2, 6 článku [5].

Lemma 1. *Nech $R_1 = \{f_x, x \in R\}$. Potom R_1 je maximálny reťazec v $S(M)$ (a má za najmenší, resp. najväčší prvok funkcie f_0, resp. f_1).*

Dôkaz. Zrejme platí $f_0, f_1 \in R_1$ a R_1 je reťazec. Nech $f \in S(M)$, $f \bar{\in} R_1$. Rozlišujeme dva prípady. a) Existuje prvok $i \in M$ taký, že $f(i) \bar{\in} R$. Z maximálnosti reťazca R vyplýva existencia prvku $x \in R$, neporovnateľného s prvkom $f(i)$. Prvky f_x, f sväzu $S(M)$ sú neporovnateľné. b) Predpokladajme, že pre každé $i \in M$ $f(i) \in R$. Keďže $f \bar{\in} R_1$, existujú prvky $i, j \in M$ také, že $f(i) < f(j)$. Reťazec R je v sebe hustý, teda existuje $x \in R$, $f(i) < x < f(j)$. Prvky f, f_x sú potom neporovnateľné. Tým je tvrdenie dokázané.

V ďalšej úvahe považujeme za splnenú axiómu výberu. Predpokladajme, že množina M je dobre usporiadaná a že v tomto usporiadaní M má najväčší prvok. Nech pre každé $i \in M$ R^i je množina všetkých funkcií $f \in S(M)$, pre ktoré platí: ak $j \in M$, potom

$$j < i \Rightarrow f(j) = 1, \quad j > i \Rightarrow f(j) = 0, \quad f(i) \in R. \tag{1}$$

Poznámka. Zrejme každá množina R^i má najmenší a najväčší prvok maximálnym reťazcom. Označme $R_2 = \cup R^i$ $(i \in M)$.

Lemma 2. *R_2 je maximálny reťazec v $S(M)$.*

Dôkaz. Zrejme je $f_0 \in R_2$ a R_2 je reťazec. Keďže M má najväčší prvok, platí tiež $f_1 \in R_2$. Nech prvok $g \in S(M)$ je porovnateľný so všetkými prvkami $f \in R_2$. Dokážeme, že potom $g \in R_2$. a) Predpokladajme, že existuje prvok $i \in M$, taký, že $g(i) \bar{\in} R$. Rovnako ako v lemme 1 sa dokáže existencia prvku $f \in R_2$, neporovnateľného s prvkom g. b) Predpokladajme, že pre každé $i \in M$ platí $g(i) \in R$. Ak existuje prvok $i \in M$ taký, že $g(i) \neq 0$, $g(i) \neq 1$, existujú prvky $f, f' \in R^i$ také, že $f(i) < g(i) < f'(i)$. Keďže prvky f, f', g sú podľa predpokladu porovnateľné, platí $f < g < f'$, teda podľa poznámky za lemmou 1 $g \in R^i$.

Ak je pre všetky $i \in M$ $g(i) = 0$ alebo $g(i) = 1$, nech M_1 je množina všetkých $i \in M$, pre ktoré $g(i) = 0$. Množina M_1 je neprázdna, keďže $g \neq f_1$. Nech i_0 je najmenší prvok množiny M_1. Pre $j > i_0$ existuje $f \in R^j$, $f(i_0) = 1$, $f(j) = 0$. Keďže prvky f, g sú porovnateľné a keďže $g(i_0) = 0$, musí $g(j) = 0$. Platí teda pre každé $j \in M$

$$j < i_0 \Rightarrow g(j) = 1, \quad j \geq i_0 \Rightarrow g(j) = 0,$$

takže podľa (1) $g \in R_2$.

Poznámka. Všimnime si ďalej, že kardinálne číslo reťazca R_1 je rovné

kardinálnemu číslu reťazca R a kardinálne číslo reťazca R_2 je rovné maximu z kardinálnych čísel množín R, M (keďže reťazec R je nekonečný).

Lemma 3. *Nech M_1, M_2 sú množiny, $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$. Potom sväzy $S(M)$ a $S(M_1) \times S(M)_2$ sú izomorfné.*

Dôkaz je zrejmý. (Porov. aj [1], str. 8 (6); tam ide o izotónne funkcie.)

Lemma 4. *Nech A, B, S sú sväzy, ktorých najmenšie, resp. najväčšie prvky sú 0_A, 0_B, 0_S, resp. 1_A, 1_B, 1_S. Nech sväzy S, $A \times B$ sú izomorfné. Nech vo sväze $A(B)$ existuje maximálny reťazec $R_1(0_A, 1_A)(R_2(0_B, 1_B))$ s kardinálnym číslom $k_1(k_2)$, pričom k_1, k_2 sú nekonečné kardinálne čísla. Potom v sväze S existuje reťazec $R(0_S, 1_S)$, ktorého kardinálne číslo je $\max(k_1, k_2)$.*

Dôkaz. Množina $A_1 \subset A \times B$, $A_1 = \{(a, 0_B), a \in A\}$ je izomorfná so sväzom A, teda v nej existuje maximálny reťazec R_1' s najmenším prvkom $(0_A, 0_B)$ a najväčším $(1_A, 0_B)$, ktorého kardinálne číslo je k_1. Analogicky je množina $B_1 \subset A \times B$, $B_1 = \{(1_A, b), b \in B\}$ izomorfná so sväzom B, teda v nej existuje maximálny reťazec R_2' s najmenším prvkom $(1_A, 0_B)$ a najväčším $(1_A, 1_B)$, pričom R_2' má kardinálne číslo k_2. Množina $R_1' \cup R_2'$ je potom maximálny reťazec vo sväze $A \times B$; tento reťazec má najmenší prvok $(0_A, 0_B)$ a najväčší $(1_A, 1_B)$. Reťazcu $R_1' \cup R_2'$ zodpovedá vo vyšetrovanom izomorfizme vo sväze S zrejme maximálny reťazec s najmenším prvkom 0_S a s najväčším 1_S a s kardinálnym číslom $k_1 + k_2 = \max(k_1, k_2)$.

Nech S_0 je Boolova algebra všetkých podmnožín spočítateľnej množiny A, nech J je ideál v S_0, tvorený všetkými konečnými podmnožinami množiny A a nech S_1 je faktorová Boolova algebra, vytvorená ideálom J na S_0. Najmenší, resp. najväčší prvok v S_1 označme 0, resp. 1.

Vo sväze S_1 neexistuje žiaden prvointerval. (Ak je totiž $\bar{a}, \bar{b} \in S_1$, $\bar{a} < \bar{b}$, existujú množiny $a, b \in S_0$, $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $a \subset b$ také, že množina $b - a$ je nekonečná; tedy existuje množina $c \in S_0$, $a \subset c \subset b$, pričom množiny $b - c$, $c - a$ sú nekonečné. Ak $\bar{c}$ je trieda v S_1, obsahujúca množinu c, platí $\bar{a} < \bar{c} < \bar{b}$).

Nech $R = R(0, 1)$ je ľubovoľný (pevne vybraný) maximálny reťazec v S_1. Podľa predošlého reťazec R je v sebe hustý. Nech k je kardinálne číslo reťazca R. (Platí zrejme $k \leq 2^{\aleph_0}$.)

Veta. *Nech α je kardinálne číslo, $\alpha \geq k$. Existuje Boolova algebra B_α (ktorej najmenší, resp. najväčší prvok označíme f_0, resp f_1), pre ktorú platí: ku každému kardinálnemu číslu β, $k \leq \beta \leq \alpha$, existuje v B_α maximálny reťazec $R_\beta(f_0, f_1)$, ktorého kardinálne číslo je β.*

Dôkaz. Nech M je množina, ktorej kardinálne číslo je α. Označme (v terminológii, zavedenej pred lemmou 1, pričom $S_1 = S_0/J$, ako sme uviedli) $S(M) = B_\alpha$. Vyjadrime množinu M v tvare $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pričom kard $M_1 = \beta$, kard $M_2 = \alpha$. Označme $S(M_1) = A$, $S(M_2) = B$; najmenší, resp. najväčší prvok v sväze $A(B)$ označme rovnako ako v lemme 4.

Podľa lemmy 2 v sväze A existuje maximálny reťazec $R_1(0_A, 1_A)$ o kardinálnom čísle β, a podľa lemmy 1 existuje v sväze B maximálny reťazec

$R_2(0_B, 1_B)$ o kardinálnom čísle k. Podľa lemmy 3 a 4 v sväze $S(M)$ existuje reťazec $R_\beta(f_0, f_1)$, ktorého kardinálne číslo je β.

Poznámka. Pri dôkaze lemmy 1 sme predpokladali, že reťazec R je v sebe hustý. Tento predpoklad je podstatný; bez neho by tvrdenie lemmy 1 nemuselo platiť.[1] Presnejšie povedané: ak M obsahuje viac ako jeden prvok a ak reťazec R nie je v sebe hustý (t. j. obsahuje ako podmnožinu prvointerval), reťazec R_1, zostrojený v dôkaze lemmy 1, nie je maximálny. Ak je totiž $a, b \in R$ a ak je prvok a pokrytý prvkom b, rozdelíme množinu M na dve neprázdne navzájom disjunktné podmnožiny M_1, M_2 a utvoríme $g \in S(M)$ tak, že položíme $g(i) = a$ pre $i \in M_1$, $g(i) = b$ pre $i \in M_2$. Potom $f_a < g < f_b$, $g \bar{\in} R_1$ a funkcia g je zrejme porovnateľná s každou funkciou reťazca R_1.

Nasledujúce lemmy môžu prispieť k riešeniu otázky: aké poradové typy maximálnych reťazcov sa vyskytujú v danej Boolovej algebre.

Lemma 5. *Nech je S_2 ľubovoľná Boolova algebra, ktorá obsahuje aspoň dva prvky a v ktorej neexistuje žiadny prvok pokrývajúci prvok 0 (t. j. neexistuje žiadny atóm). Nech $R = R(0, 1)$ je maximálny reťazec v S_2. Reťazec R je v sebe hustý.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $a, b \in R$, $a < b$. Nech a_1 je relatívny komplement prvku a v intervale $\langle 0, b \rangle$. Ak je $a = 0$, podľa predpokladu b nie je atóm v S, teda existuje $c \in S$, $a < c < b$. Ak $a \neq 0$, potom $0 < a_1 < b$. Existuje prvok c_1, $0 < c_1 < a_1$. Označme $a \cup c_1 = c$. Z predošlého vyplýva $a < c < b$. Teda prvok a nie je pokrytý prvkom b.

Z lemmy 5 vyplýva, že vo vyššie dokázanej vete by sme mohli vziať za východisko úvahy namiesto tam použitej Boolovej algebry S_1 ľubovoľnú Boolovu algebru, ktorá neobsahuje žiadny atóm a ktorá má viac ako jeden prvok. (Význam znaku k by sa potom, prirodzene, zmenil.)

Pre úplné Boolove algebry platí tiež obrátenie lemmy 5.

Lemma 5'. *Nech v úplnej Boolovej algebre S existuje atóm. Potom každý maximálny reťazec $R(0, 1)$ v S obsahuje prvointerval.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady lemmy, nech a je atóm v S. Prípad $a = 1$ je triviálny. Označme

$$A = \{x \in R,\ x \cap a = 0\}, \qquad B = \{x \in R,\ x \cap a \neq 0\}.$$

Každá z množín A, B je neprázdna, keďže $0 \in A$, $1 \in B$. Nech a' je komplement prvku a. Pre $x \in A$ platí $x = (x \cap a) \cup (x \cap a') = x \cap a'$, $x \leq a'$, a pre $x \in B$ je $x \geq a$. Označme

$$a_1 = \sup A, \qquad a_2 = \inf B.$$

Keďže R je maximálny reťazec, musí byť $a_1, a_2 \in R$; ďalej je $a_1 \leq a'$, $a \leq a_2$, takže musí byť tiež $a_1 < a_2$. Ak by existoval prvok $c \in S$, $a_1 < c < a_2$, muselo by platiť $c \in R(0, 1)$, $c \bar{\in} A$, $c \bar{\in} B$, čo je spor, a dôkaz je ukončený.

[1] Na túto okolnosť ma upozornil prof. Jerzy Łoś.

Z postupu dôkazu sa ľahko zistí, že prvointervaly $\langle 0, a \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle$ sú projektívne (dokonce transponované). Nech M je množina všetkých atómov úplnej Boolovej algebry S, nech $R(0, 1)$ je maximálny reťazec v S. Každému atómu $m \in M$ je podľa predošlej lemmy priradený prvointerval

$$m \to \langle a_1^m, a_2^m \rangle \subset R(0, 1).$$

Ak by dvom rôznym atómom $m_1, m_2 \in M$ bol týmto spôsobom priradený ten istý prvointerval reťazca $R(0, 1)$, podľa predošlého boli by prvointervaly $\langle 0, m_1 \rangle$, $\langle 0, m_2 \rangle$ navzájom projektívne, čo však nie je možné. Tým sme dokázali nasledujúcu lemmu:

Lemma 5''. *Nech M je množina všetkých atómov úplnej Boolovej algebry S, nech $R(0, 1)$ je maximálny reťazec v S a nech M_1 je množina všetkých prvointervalov reťazca $R(0, 1)$. Potom platí*

$$\operatorname{kard} M \leq \operatorname{kard} M_1.$$

Ak by sme do lemmy 5' namiesto výrazu „v úplnej Boolovej algebre" položili výraz „v úplnom distributívnom sväze", dostali by sme nesprávne tvrdenie. Dokážeme to na nasledujúcom príklade:

Príklad 1. Nech $S_1 = \{0, a\}$, $a > 0$, $S_2 = \langle 0,1 \rangle$ (interval reálnych čísel s obvyklým usporiadaním), $S_3 = S_1 \times S_2$, $S = S_3 \cup \{1\}$ pričom pre prvky $x, y \in S_3$ ostáva v S rovnaké čiastočné usporiadanie ako v S_3 a pre každé $x \in S_3$ kladieme $x < 1$. Zrejme je S úplný distributívny sväz. Vo sväze S existuje prvointerval (tvorený prvkami $(0, 0)$ a $(a, 0)$ a pritom množina

$$R = \{(0, x),\ x \in \langle 0,1)\} \cup \{1\}$$

je maximálny reťazec v S, v ktorom leží najmenší i najväčší prvok sväzu S a ktorý neobsahuje prvointerval.

V lemme 5' nemôžeme vynechať predpoklad o úplnosti Boolovej algebry S:

Príklad 2. Nech S_2 je ľubovoľná Boolova algebra, pre ktorú platí:

a) v S_2 neexistuje atóm,

b) v S_2 existuje maximálny reťazec R_2, obsahujúci najmenší i najväčší prvok sväzu S_2, a reťazec R_2 nie je úplný.[2]

Podľa lemmy 5 reťazec R_2 je v sebe hustý. Podľa predpokladu sa dá reťazec R_2 rozložiť na súčet dvoch neprázdnych disjunktných podmnožín A, B tak, že pre každé $x \in A$, $y \in B$ platí $x < y$, pričom v množine A neexistuje najväčší prvok a v množine B neexistuje najmenší prvok. Nech S_1 má rovnaký význam ako v príklade 1. Označme $S = S_1 \times S_2$; S je Boolova algebra obsahujúca atóm $(a, 0)$. Nech

$$R = \{(0, x),\ x \in A\} \cup \{(a, x),\ x \in B\}.$$

Ľahko sa preverí, že R je maximálny reťazec v S, obsahujúci najmenší i naj-

[2] T. j. R_2 nie je úplný sväz.

väčší prvok sväzu S. Ďalej je reťazec R_2 izomorfný s reťazcom R, teda podľa lemmy 5 v reťazci R neexistuje prvointerval.

Zostáva ešte otázka, či existuje Boolova algebra S, ktorá by mala vlastnosti a), b), uvedené v príklade 2. Dokážeme najprv, že platí:

Lemma 6. *Nech S je sväz, ktorý má najmenší prvok 0 a najväčší 1. Ak sväz S nie je úplný, potom existuje maximálny reťazec $R(0, 1)$ v S, ktorý nie je úplný.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady lemmy, nech sväz S nie je úplný. Potom existujú množiny A, $B \subset S$ také, že $A(B)$ je množina všetkých dolných (horných) ohraničení množiny $B(A)$ a pritom v množine $A(B)$ neexistuje najväčší (najmenší) prvok. Vnorme sväz S do úplného sväzu S' pomocou konštrukcie, opísanej v [1], str. 58—59 („Dedekindove rezy"). V sväze S' existuje prvok x' taký, že platí

$$\sup A = x' = \inf B,$$

$$x \in S, \quad x < x'(x > x') \Rightarrow x \in A(x \in B).$$

Uvažujme čiastočne usporiadanú množinu $P = S \cup \{x'\}$ (s čiastočným usporiadaním ako v S'). Podľa [1], kap. III, § 6 v P existuje maximálny reťazec $\bar{R}$, obsahujúci prvky 0, x', 1. Ľahko sa preverí, že množina $R = \bar{R} - \{x'\}$ je maximálny reťazec v S a že tento reťazec nie je úplný.

Teraz zostrojíme:

Príklad 3. Nech M je množina všetkých dvojíc (x, y) reálnych čísel, pre ktoré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Nech S_1 je systém všetkých podmnožín množiny M, ktoré sú alebo najviac spočítateľné, alebo ktorých komplement je najviac spočítateľný. S_1 je Boolova algebra. Nech J je ideál v S_1, tvorený všetkými konečnými podmnožinami množiny M. Označme $S_2 = S_1/J$. Triedu v S_2, obsahujúcu prvok $z \in S_1$, označíme $\bar{z}$. Ľahko sa zistí, že v S_2 neexistuje atóm.

Ak z_1, $z_2 \in S_1$, potom zrejme platí

$$\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in J. \tag{2}$$

Nech Y je spočítateľná množina, $Y \subset \langle 0,1 \rangle$. Nech pre $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ $a(x) = \{(x, y), y \in Y\}$, $A = \left\{\overline{a(x)}, x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \right\}$.

Predpokladajme, že by S_2 bola úplná Boolova algebra. Potom by množina $A \subset S_2$ mala supremum v S_2:

$$s = \cup \overline{a(x)}. \tag{3}$$

Nech $a \in S_1$, $a \in s$. Podľa (3) a (2) platí pre každé $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

$$a(x) - a \in J,$$

teda $a(x) \cap a \neq \emptyset$. Keďže pre x_1, $x_2 \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, $x_1 \neq x_2$ platí $a(x_1) \cap a(x_2) = \emptyset$,

množina a je nespočítateľná. Z toho vyplýva, že jej komplement a' je najviac spočítateľný. Teda existuje spočítateľná množina $b \subset c = \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ taká, že $b \subset a$,[3] a teda tiež $b \cap a = b$, $0 < \bar{b} < \bar{a}$ (znakom 0 tu označujeme najmenší prvok v S_2).

Pre každé $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ platí $b \cap a(x) = \emptyset$, $\bar{b} \cap \overline{a(x)} = 0$; z nekonečnej distributívnosti (porov. [1], str. 165) dostávame

$$\bar{b} \cap \bar{a} = \bar{b} \cap \left(\cup \overline{a(x)}\right) = \cup \left(\bar{b} \cap \overline{a(x)}\right) = 0.$$

Tým sme došli ku sporu. Teda sväz S_2 nie je úplný.

Podľa lemmy 6 sväz S_2 splňuje podmienku b), uvedenú v príklade 2.

Poznámka. Existencia Boolovej algebry s vlastnosťami a), b) z predošlého príkladu 2 vyplýva tiež z výsledkov práce [10] (porovnaj hlavne pozn.[11]) pri použití lemmy 6.

Poznámka. Nech $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ sú intervaly distributívneho sväzu S, $b \leq c$, $a \neq b$, $c \neq d$. Potom intervaly $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ nemôžu byť projektívne. (Ak by totiž tieto intervaly boli projektívne, existovali by podľa [1], kap. IX, § 13, Ex. 4a prvky u, $v \in S$ také, že by platilo

$$c = (a \cup u) \cap v, \qquad d = (b \cup u) \cap v.$$

Z toho vyplýva $v \geq d$, takže $v \geq a$, $v \geq b$ a z distributívnosti dostávame

$$c = a \cup (u \cap v), \qquad d = b \cup (u \cap v).$$

Podľa prvej z predošlých rovností je $u \cap v \leq c$, teda $b \cup (u \cap v) \leq c$, čím sme došli ku sporu.)

Lemma 7. *Nech $R(0, 1)$ je maximálny reťazec v Boolovej algebre S, nech znaky M_1, M majú rovnaký význam ako v lemme 5". Potom*

$$\text{kard } M_1 \leq \text{kard } M.$$

Dôkaz. Nech $p = \langle a, b \rangle$ je ľubovoľný prvointerval reťazca $R(0, 1)$. Nech a' je komplement prvku a. Potom prvok $c = b \cap a'$ je atóm, keďže intervaly $\langle 0, c \rangle$, $\langle a, b \rangle$ sú transponované. Priradenie

$$p \to c \tag{4}$$

zobrazuje množinu M_1 do množiny M. Ak p, $p' \in M_1$ a ak je v uvažovanom priradení

$$p \to c, \qquad p' \to c,$$

potom sú podľa predošlého prvointervaly p, p' navzájom projektívne, takže podľa predchádzajúcej poznámky $p = p'$. Z toho vyplýva, že zobrazenie je prosté. Tým je tvrdenie dokázané.

[3] Keďže a' je najviac spočítateľná množina, musí byť aj $a' \cap c$ najviac spočítateľná množina, teda $a \cap c$ je nespočítateľná množina.

Z lemmy 5" a 7 vyplýva

Lemma 8. *Nech* $R(0, 1)$ *je maximálny reťazec v úplnej Boolovej algebre* S, *nech znaky* M_1, M *majú rovnaký význam ako v lemme 5". Potom platí*

$$\text{kard } M_1 = \text{kard } M.$$

Nadväzujúc na terminológiu, používanú v [8] a [9] budeme hovoriť, že intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ sväzu S sú zdola priamo podobné, ak existuje interval $\langle u, v\rangle \subset S$ taký, že platí

$$a \cap v = u, \quad a \cup v = b, \quad c \cap v = u, \quad c \cup v = d.$$

Hovoríme, že vo sväze S je splnená veta Jordan—Hölderova s dolnou podobnosťou prvointervalov [stručne: veta (JH)], keď platí:

Ak $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ *sú maximálne reťazce vo sväze* S *a ak* M_1, *resp.* M_2 *je množina všetkých prvointervalov reťazca* $R_1(a, b)$, *resp.* $R_2(a, b)$, *existuje jedno-jednoznačné zobrazenie množiny* M_1 *na* M_2 *také, že intervaly, ktoré si navzájom prislúchajú v tomto zobrazení, sú zdola priamo podobné. (Porov. [9], def. 1.1.)*

Poznámka. Ak 0 je najmenší prvok sväzu S a ak každý z intervalov $\langle a, b\rangle$, $\langle a', b'\rangle$ je transponovaný s intervalom $\langle 0, c\rangle$, potom intervaly $\langle a, b\rangle$, $\langle a', b'\rangle$ sú zrejme zdola priamo podobné.

Lemma 9. *Nech* S *je úplná Boolova algebra. Potom v* S *je splnená veta* (JH).

Dôkaz. Nech $a, b \in S$, $a < b$. Potom sväz $S_1 = \langle a, b\rangle$ je úplnou Boolovou algebrou. Nech $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ sú maximálne reťazce v S_1, nech M je množina všetkých atómov v S_1. Nech M_1, resp. M_2 je množina všetkých prvointervalov reťazca $R_1(a, b)$, resp. $R_2(a, b)$. Podľa dôkazu lemmy 7 existuje prosté zobrazenie množiny M_1 na množinu M

$$\langle a_1, b_1\rangle \to c \tag{5}$$

($\langle a_1, b_1\rangle \in M_1$, $c \in M$) také, že intervaly $\langle a_1, b\rangle$, $\langle 0, c\rangle$ sú transponované. Podľa dôkazu lemmy 5" existuje prosté zobrazenie množiny M na M_2

$$c \to \langle a', b'\rangle \tag{6}$$

($c \in M$, $\langle a', b'\rangle \in M_2$) také, že intervaly $\langle 0, c\rangle$, $\langle a', b'\rangle$ sú transponované. Zobrazenie

$$\langle a_1, b_1\rangle \to \langle a', b'\rangle \tag{7}$$

množiny M_1 na M_2, vzniknuté zložením zobrazení (5), (6), je zrejme prostým zobrazením M_1 na M_2; podľa už dokázaného a podľa poznámky pred lemmou 9 intervaly, ktoré si navzájom prislúchajú v zobrazení (7), sú zdola priamo podobné.

Poznámky.

1. Neúplná Boolova algebra nemusí spĺňovať vetu (JH). (Porovnaj príklad 2.)
2. V práci [9] sa vyšetrovala platnosť vety (JH) pre sväzy, ktoré nemuseli byť Boolovými algebrami. Z výsledkov práce [9] (porov. [9], veta 1.11) nevyplýva lemma 9, keďže úplná Boolova algebra nemusí spĺňovať podmienku označovanú v [9] ako podmienka III (porov. [9], definícia 1.6).

LITERATÚRA

[1] G. Birkhoff, Lattice theory, revised edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. XXV, New York 1948.

[2] R. Croisot, Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infini, Annales Sci. École Normal Sup. 68 (1951), 203—265.

[3] G. Szász, On the structure of semi-modular lattices of infinite length, Acta scientiarum math., 14, (1951/52), 239—245.

[4] G. Szász, Generalization of a theorem of Birkhoff, Acta scientiarum mathem. 16, (1955), 89—91.

[5] J. Jakubík, On the Jordan—Dedekind chain condition, Acta scientiarum mathem. 16 (1955), 266—269.

[6] J. Jakubík, Poznámka o Jordan—Dedekindovej podmienke v Boolových algebrách, Časopis pro pěstování matem., 82 (1957), 44—46.

[7] G. Grätzer—E. T. Schmidt, On the Jordan—Dedekind chain condition, Acta scientiarum mathem., 18 (1957), 52—56.

[8] Vl. Kořínek, Lattices in which the theorem of Jordan—Hölder is generally true. Bulletin int. de l'Acad. tcheque des Sciences No 23 (1949).

[9] V. Vilhelm, Теорема Жордана-Гельдера в структурах без условия конечности цепей. Чехослов. мат. журнал 4 (79), (1954) 29—49.

[10] R. Sikorski, On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras. Colloquium mathem II (1951) 27—29.

Došlo 26. 4. 1958.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysokej školy technickej v Košiciach

О ЦЕПАХ В БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

ЯН ЯКУБИК

Выводы

Пусть S — структура. Цепь $R \subset S$ называется максимальной в S, если для каждой цепи $R' \subset S$ из соотношения $R \subset R'$ вытекает $R = R'$. Если M — множество, обозначим через kard M кардинальное число множества M.

Пусть S_0 — булева алгебра, образованная всеми подмножествами счетного множества A, пусть J — идеал в S_0, образованный всеми конечными подмножествами из A, $S = S_0/J$. Пусть R — максимальная цепь в S, $k = \text{kard } R$.

Теорема. Пусть α — кардинальное число, $\alpha \geq k$. Существует булева алгебра S_α такая, что для каждого кардинального числа β, $k \leq \beta \leq \alpha$, существует максимальная цепь $R_\beta \subset S_\alpha$, для которой kard $R_\beta = \beta$.

Далее доказываются утверждения:

Пусть в булевой алгебре S не существует атом. Тогда в максимальной цепи $R \subset S$ не существует простый интервал.

Пусть R — максимальная цепь в полной булевой алгебре S. Пусть M — множество всех атомов в S и M_1 — множество всех простых интервалов цепи R. Тогда kard $M =$ kard M_1.

Построен пример полной дистрибутивной структуры S с максимальной цепей $R \subset S$ так, что в S существиет атом и в R не существует простый интервал. Далее построен пример не полной булевой алгебры S с максимальной цепей $R \subset S$ так, что в S существует атом и в R не существует простый интервал.

ÜBER KETTEN IN BOOLESCHEN VERBÄNDEN

JÁN JAKUBÍK

Zusammenfassung

S sei ein Verband. Eine Kette $R \subset S$ ist maximal in S, wenn für jede Kette $R_1 \subset S$ aus der Beziehung $R \subset R_1$ die Gleichung $R = R_1$ folgt. Wenn $M \subset S$, bedeutet kard M die Mächtigkeit der Menge M. Wenn $a, b \in S$ benachbarte Elemente sind, $a < b$, sagen wir, daß $\langle a, b \rangle$ ein Primintervall in S ist.

Es sei S_0 ein Boolescher Verband, der von allen Untermengen einer abzählbaren Menge A gebidet ist. J sei der Ideal aller endlichen Untermengen von A, $S = S_0/J$. R sei eine beliebige maximale Kette in S, $k =$ kard R.

Satz. Für jede Mächtigkeit α, $\alpha \geq k$ gibt es ein Boolescher Verband S_α mit dieser Eigenschaft: zu jeder Mächtigkeit β, $k \leq \beta \leq \alpha$, existiert in S_α eine maximale Kette R_β, kard $R_\beta = \beta$.

Weiter werden folgende Behauptungen bewiesen:

Wenn in einem Booleschen Verband S kein Atom existiert, dann ist jede maximale Kette $R \subset S$ in sich dicht.

Wenn in einem vollständigen Booleschen Verband S ein Atom existiert, dann gibt es in jeder maximalen Kette $R \subset S$ ein Primintervall.

Es sei R eine maximale Kette in einem vollständigen Booleschen Verband S. Es sei M die Menge aller Atome in S und es sei M_1 die Menge aller Primintervallen der Kette R. Dann gilt

$$\text{kard } M = \text{kard } M_1.$$

Es wird ein Beispiel eines vollständigen distributiven Verbandes S mit einer maximalen Kette $R \subset S$ konstruiert, wobei in S ein Atom existiert und in R gibt es kein Primintervall. Weiter wurde ein Beispiel eines (nicht vollständigen) Booleschen Verbandes S mit einer maximalen Kette $R \subset S$ konstruiert wobei in S ein Atom enthalten ist und in R gibt es kein Primintervall.