MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK VIII ČÍSLO 4

POZNÁMKA O ŠTRUKTÚRE ISTÉHO TYPU ZĽAVA JEDNODUCHÝCH POLOGRÚP

JURAJ KAJAN, Bratislava

Nech $S = \{a, b, c, \dots\}$ je pologrupa. Pologrupu S nazývame *zľava jednoduchou*, ak rovnica $xa = b$ má aspoň jedno riešenie $x \in S$ pre každé $a, b \in S$. Takáto pologrupa splňuje teda pre každé $a \in S$ vzťah $Sa = S$ a neobsahuje žiadny ľavý ideál rôzny od S.

Ak zľava jednoduchá pologrupa S obsahuje idempotent, je štruktúra S známa. Platia tieto vety (pozri [1] a [2]):

Veta A. *Každý idempotent e_α zľava jednoduchej pologrupy S je pravou jednotkou pologrupy S.*

Veta B. *Zľava jednoduchá pologrupa obsahuje idempotent vtedy a len vtedy, ak má aspoň jeden minimálny pravý ideál.*

Veta C. *Ak e_α, $\alpha \in A$ je množina všetkých idempotentov $\in S$, potom*

$$S = \sum_{\alpha \in A} e_\alpha S = \sum_{\alpha \in A} G_\alpha,$$

kde $G_\alpha = e_\alpha S$ je grupa. Pre každé dva idempotenty $e_\alpha \neq e_\beta$ sú grupy G_α, G_β disjunktné a navzájom izomorfné.

Veta D. *Každá zľava jednoduchá pologrupa majúca idempotent je izomorfná direktnému súčinu $G \times E$, kde G je grupa a $E = \{e_\alpha, e_\beta, \dots\}$ je pologrupa, v ktorej je násobenie definované vzťahom $e_u \,.\, e_u = e_n$.*

Vety A, B, C použijeme v odseku I.

Ak S je zľava jednoduchá pologrupa a S *neobsahuje* idempotent, štruktúra pologrupy S nie je známa a je pravdepodobne značne komplikovaná. Úlohou tejto poznámky je zaoberať sa zľava jednoduchými pologrupami nemajúcimi idempotent, ktoré však navyše splňujú ďalšiu podmienku, a to, že sú *zľava regulárne*, t. j. vzťah $ax = ay$ implikuje $x = y$ pre každé a, x, $y \in S$.

Z výsledkov tejto poznámky vysvitne, že i za tejto dodatkovej podmienky je štruktúra zľava jednoduchých pologrúp ešte dosť komplikovaná. Obzvlášť sa zdá veľmi ťažké nájsť vetu, ktorú by sa mohlo považovať za náhradu vety D.

I

Aby sme si zjednodušili terminológiu, zavedieme túto definíciu:

Definícia. *Pologrupu S nazývame typu K, ak a) je zľava jednoduchá a b) je zľava regulárna.*

Veta 1. *Pologrupa typu K môže obsahovať najviac jeden idempotent.*

Dôkaz. Nech $e_\alpha \neq e_\beta$ sú dva idempotenty $\in S$. Podľa vety A je $e_\alpha = e_\alpha e_\beta$, teda $e_\alpha e_\alpha = e_\alpha e_\beta$ a vzhľadom na platnosť pravidla krátenia zľava $e_\alpha = e_\beta$, čo je v rozpore s predpokladom.

Veta 2. *Pologrupa S typu K obsahuje idempotent vtedy a len vtedy, ak je grupou.*

Dôkaz. 1. Ak S je grupa, obsahuje S idempotent a je zrejme typu K.

2. Ak S obsahuje idempotent e, je podľa vety 1 taký len jeden a podľa vety C platí $S = eS = G$, kde G je grupa.

Vzhľadom na vetu 2 budú nás v ďalšom zaujímať iba také pologrupy typu K, ktoré neobsahujú idempotent, t. j. také, ktoré nie sú grupami. Kvôli ľahšej formulácii viet zavedieme definíciu:

Definícia. *Pologrupou S nazývame typu K_1, ak je typu K a súčasne nie je grupou.*

Na príkladoch sa dá dokázať, že pologrupy typu K_1 existujú. (Pozri napr. [3].)

Z vety B vyplýva okamžite:

Veta 3. *Nech S je pologrupou typu K_1 potom K_1 nemá ani jeden minimálny ideál.*

II

Pri definícii zľava jednoduchej pologrupy sme predpokladali, že rovnica $xb = a$ má aspoň jedno riešenie. Nežiadali sme však jednoznačnosť riešenia.[1] Je preto celkom prirodzené študovať množinu všetkých riešení takejto rovnice.

Označenie. *Množinu všetkých riešení rovnice $xb = a$ označíme znakom S_a^b.*

Pre každú dvojicu a, $b \in S$ je množina S_a^b neprázdna.

Najprv budeme študovať množinu S_a^a, t. j. množinu všetkých riešení rovnice $xa = a$.

Veta 4. *Nech S je pologrupa typu K_1. Potom S_a^a je opäť pologrupa typu K_1 a S_a^a je vlastnou podmnožinou množiny S.*

Dôkaz. 1. Ak $\xi a = a$, $\eta a = a$, ξ, $\eta \in S$, potom $\xi\eta a = \xi(\eta a) = \xi a = a$, t. j. $\xi\eta \in S_a^a$. Teda S_a^a je pologrupa.

2. Že pologrupa S_a^a je zľava jednoduchá, vyplýva z tohto: Nech je $a_1, a_2 \in S_a^a$, teda $= a_1 a$ a, $a_2 a = a$. Označme znakom x nejaké riešenie rovnice $xa_1 = a_2$. Také x existuje, musíme iba zistiť, či padne do S_a^a. Násobením sprava elementom a dostávame z tejto rovnice $x(a_1 a) = (a_2 a)$, t. j. $xa = a$. To znamená, že $x \in S_a^a$.

[1] Dá sa totiž ľahko dokázať, že z požiadavky jednoznačnosti riešenia rovnice $xb = a$ a platnosti pravidla krátenia zľava vyplýva, že S je grupou.

3. S_a^a je, pravda, typu K_1, lebo pravidlo krátenia zľava platí aj v S_a^a.

4. S_a^a neobsahuje element a, lebo $a \,.\, a = a$ by implikovalo existenciu idempotentu, če je v rozpore s predpokladom. Tým je veta 4 úplne dokázaná.

Pologrupa S_a^a má iste nekonečný počet elementov, lebo keby mala iba konečný počet elementov, obsahovala by idempotent, čo nie je pravda.

Keďže pologrupa S_a^a je opäť typu K_1, možno zvoliť v pologrupe S_a^a ľubovoľný element α a zostrojiť množinu $(S_a^a)_\alpha^\alpha$, t. j. množinu všetkých riešení $x\alpha = \alpha$, kde $x \in S_a^a$. Keďže α opäť neleží v $(S_a^a)_\alpha^\alpha$, dostávame tak vlastnú podmnožinu množiny S_a^a. Tento postup možno opakovať ľubovoľne mnohokrát. Platí teda:

Veta 5. *V každej pologrupe S typu K_1 existuje reťazec do seba zapadajúcich čiastočných pologrúp $S \supset S_1 \supset S_2 \ldots$, z ktorých každá je vlastnou podmnožinou predchádzajúcej a každá z pologrúp S_i je typu K_1.*

Pokúsime se teraz získať prehľad o všetkých riešeniach rovnice $xb = a$.

Veta 6. *Nech x_1 je jedno riešenie rovnice $xb = a$. Potom ku každému riešeniu ξ tejto rovnice existuje také $\alpha \in S_a^a$, že $\xi = \alpha x_1$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu je $x_1 b = a$, $\xi b = a$. Nájdime α také, aby platilo $\xi = \alpha x_1$. Musíme len ukázať, že je $\alpha \in S_a^a$. Násobením elementom b sprava dostávame $\alpha(x_1 b) = \xi b$, t. j. $\alpha a = a$. Teda α je elementom pologrupy S_a^a, č. b. t. d.

Naopak, ak α je ľubovoľný element $\in S_a^a$, je $(\alpha x_1)\, b = \alpha(x_1 b) = \alpha a = a$. Teda αx_1 je riešením rovnice $xb = a$. Vetu 6 možno preto vysloviť aj takto:

Veta 6a. *Nech x_a^b je ľubovoľné riešenie rovnice $xb = a$. Potom množina $S_a^a \,.\, x_a^b$ dáva práve všetky riešenia rovnice $xb = a$.*

Veta 7. *Nech $b \neq c$, potom je $S_a^b \cap S_a^c = \emptyset$.*

Dôkaz. Predpokladajme nepriamo, že $S_a^b \cap S_a^c \neq \emptyset$, a že $x_1 \in S_a^b \cap S_a^c$. Potom je $x_1 b = a$, $x_1 c = a$, teda $x_1 b = x_1 c$ a vzhľadom na platnosť pravidla krátenia zľava $b = c$, čo je v rozpore s predpokladom.

Poznámka 1. Všimnite si, že tu sme v podstate prvý raz použili pravidlo krátenia zľava. Vety 4—6 platia pre každú zľava jednoduchú pologrupu bez idempotentu, nezávisle od platnosti pravidla krátenia zľava.

Poznámka 2. Ak $a \neq b$, množina S_a^b nie je pologrupou.

Dôkaz. Nech x_1, $x_2 \in S_a^b$, t. j. $x_1 b = a$, $x_2 b = a$. Keby platilo $x_1 x_2 \in S_a^b$, bolo by $x_1 x_2 b = a$, t. j. $x_1(x_2 b) = x_1 a = a$. Teda by x_1 patrilo do S_a^a, čo je v rozpore s vetou 7.

III

Považujme na chvíľu v rovnici $x\xi = a$ element a za pevný a nech ξ prebieha všetky prvky $\in S = \{a, b, c, \ldots\}$. Tým dostaneme množiny S_a^a, S_a^b, S_a^c, $\ldots$ Podľa vety 7 sú všetky tieto množiny navzájom disjunktné.

Ukážme, že množina $\sum_{b \in S} S_a^b$ je vlastnou podmnožinou z S. Na to stačí dokázať, že napr. element a nepatrí do množiny $\sum_{b \in S} S_a^b$. To dokážeme nepriamo. Keby platilo $a \in \sum_{b \in S} S_a^b$, existovalo by isté $\xi \in S$, že $a \in S_a^\xi$, t. j. $a\xi = a$. Násobením sprava elementom ξ dostávame z tejto rovnice $a\xi^2 = a\xi$, a (vzhľadom na platnosť pravidla krátenia zľava) $\xi^2 = \xi$. Pologrupa S by obsahovala idempotent, čo je rozpor s predpokladom.

Veta 8. *Nech S je pologrupa typu K a nech S_a^b má hore zavedený význam. Potom $R_a = S - \sum_{b \in S} S_a^b$ je pravým ideálom pologrupy S.*

Dôkaz. Máme dokázať, že pre každé $s \in S$ je $R_a s \subset R_a$. Množina R_a sa skladá zrejme práve z tých elementov $u \in S$, pre ktoré $ux = a$ *nemá* riešenie v S, t. j. pre ktoré je $uS \cap \{a\} = \emptyset$. Ak je $\xi \in R_a$, je teda $\xi S \cap \{a\} = \emptyset$, keďže $(\xi s) S \subset \xi S$, je aj $(\xi s) S \cap \{a\} = \emptyset$, t. j. $\xi s \in R_a$.

Poznámka 1. Podľa práve dokázaného tvrdenia je $R_a S \cap \{a\} = \emptyset$, a teda tým skôr $R_a R_a \cap \{a\} = \emptyset$. Keďže je $a \in R_a$, je $R_a . a \cap \{a\} = \emptyset$. Z toho je zrejmé, že R_a nie je zľava jednoduchou pologrupou (lebo $xa = a$ nemá riešenie $x \in R_a$).

Poznámka 2. Zo vzťahu $R_a . R_a \cap \{a\} = \emptyset$ vyplýva aj $aR_a \cap \{a\} = \emptyset$. Teda aR_a je vlastná podmnožina z R_a. Podľa vety B nemôže byť R_a minimálnym pravým ideálom z S. Preto musí existovať v R_a nekonečná postupnosť do seba zapadajúcich ideálov z S. Takou postupnosťou je napr. $R_a \supset aR_a \supset a^2R_a \supset, \ldots$ Je zrejmé, že $a^\nu R_a$ obsahuje v sebe element $a^{\nu+1}$, ale element $a^{\nu+1}$ neleží v $a^{\nu+1}R_a$. Inak by totiž existovalo $x \in R_a$, že $a^{\nu+1} = a^{\nu+1}x$ a vzhľadom na pravidlo krátenia $a = ax \in aR_a$, čo nie je pravda. Je teda každý z napísaných pravých ideálov pologrupy S vlastnou podmnožinou predchádzajúceho.

Množina R_a sa dá charakterizovať aj takto:

Veta 9. *Množina $R_a - \{a\}$ je najväčší pravý ideál z S, ktorý neobsahuje element a.*

Dôkaz. Nech I je najväčší pravý ideál pologrupy S, ktorý neobsahuje element a. Keďže je $R_a S \cap \{a\} = \emptyset$ a $R_a S \subset R_a$, je zrejmé, že $R_a S \subset R_a - \{a\}$, a teda tým skôr $\{R_a - \{a\}\} . S \subset R_a - \{a\}$, t. j. $R_a - \{a\}$ je pravým ideálom z S, t. j. $R_a - \{a\} \subset I$. Ak by I obsahoval element $x_a^b \in S_a^b$ (s nejakým $b \in S$), platilo by (vzhľadom na $IS \subset I$) tým skôr $a = x_a^b . b \in x_a^b S \subset IS \subset I$, t. j. $a \in I$, čo je rozpor s predpokladom.

Z dokázaných viet dostávame nakoniec túto vetu:

Veta 10. *Nech S je pologrupa typu K_1 a a ľubovoľný element $\in S$. Potom S sa dá písať ako súčet neprázdnych disjunktných sčítancov v tvare $S = R_a + \sum_{b \in S} S_a^a x_a^b$. Pritom pravý ideál R_a je jednoznačne charakterizovaný tým, že $R_a - \{a\}$ je najväčší pravý ideál z S neobsahujúci a, S_a^a je zľava jednoduchá pologrupa všetkých riešení rovnice $xa = a$ a x_a^b je ľubovoľné riešenie rovnice $xb = a$.*

Poznámka. Ponechajme doterajšie označenie. Potom zrejme $x \in S_{xb}^b$. [Tento vzťah hovorí iba toľko, že $x . b = (xb)$.] Teda $\sum_{x \in S} x = \sum_{x \in S} S_{xb}^b$. Ak x prebieha celé S, prebieha xb (vzhľadom na vzťah $Sb = S$) všetky elemty $\in S$. Teda

$S = \sum_{a \in S} S_a^b$. Pre $u \neq v$ sú množiny S_u^b, S_v^b zrejme disjunktné (lebo $\xi \in S_u^b \cap S_v^b$ by implikovalo $\xi b = u$, $\xi b = v$, t. j. $u = v$). Vzťah $S = \sum_{a \in S} S_a^b$ dáva teda rozklad pologrupy S na súčet disjunktných množín. Tento vzťah je však vcelku triviálny a nedáva jasnejší pohľad do štruktúry S, lebo o vzájomnom vzťahu množín S_n^b, S_n^c, $b \neq c$ nevieme nič bližšieho povedať.

LITERATÚRA

[1] Š. Schwarz, Структура простых полугрупп без нуля, Чехослов. мат. журнал 1 (76), (1951) 51—65.

[2] Š. Schwarz, Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity VI, Bratislava 1943.

[3] Naoki Kimura, On some examples of semigroups. Mathematical Department, Tokyo Institute of Technology.

Došlo 19. 4. 1958.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОМ ТИПЕ СЛЕВА ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП

ЮРАЙ КАЯН

Выводы

Полугруппа S называется слева простой, если уравнение $xb = a$ имеет по крайней мере одно решение $x \in S$, для каждой пары $a, b \in S$ и она называется слева регулярной если из отношения $ax = ay$ вытекает $x = y$.

Целью этой заметки является исследование структуры слева простых и слева регулярных полугрупп без идемпотента. Главный результат этой заметки — следующая теорема:

Пусть S слева простая и слева регулярная полугруппа без идемпотента, пусть a произвольный элемент $\in S$. Потом S может быть представлена в виде суммы непустых непересекающихся подмножеств: $S = R_a + \sum_{b \in S} S_a^a x_a^b$, где R_a правый идеал однозначно характеризованный таким образом, что $R_a - \{a\}$ — найбольший правый идеал из S несодержащий a, S_a^a — слева простая полугруппа всех решений уравнения $xa = a$ и x_a^b — произвольное решение уравнения $xb = a$.

ON A TYPE OF LEFT SIMPLE SEMIGROUPS

JURAJ KAJAN

Summary

A semigroup is called left simple, if the equation $xa = b$ has at least one solution $x \in S$ for every $a, b \in S$. It is called regular, if the relation $ax = ay$ implies $x = y$.

The purpose of this remark is to study the structure of left simple and left regular semigroups without idempotent.

The main result is given by the following Theorem:

Let S be a left simple and left regular semigroup without idempotent and let a be any element $\in S$. Then S can be written as a sum of non-vacuous disjoint subsets: $S = R_a + \sum_{b \in S} S_a^a x_a^b$. Here R_a is the right ideal uniqually determined by the property, that $R_a - \{a\}$ is the maximal left ideal of S notcontaining a, S_a^a is the left simple semigroup of all solutions of the equation $xa = a$ and x_a^b is any solution of the equation $xb = a$.